mp* 22-23 DS4

5/12/2022

Au choix :

Choix 1 : Problème 1 + Problème 2 : Un demi-problème Centrale et un extrait de problème CCP

Choix 2 : Problème 1 + Problème 3 : Un demi-problème Centrale et un problème X incomplet.

Donc tout le monde doit traiter le problème 1. Il est d'ailleurs recommandé de commencer par cela. Inutile de faire des copies séparées pour les différents problèmes.

Mathématiques 2

MP

2016

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrices autorisées

~~Le problème étudie quelques propriétés de variables aléatoires réelles finies de la forme $\sum_{k=1}^{n} a_k X_k$, où les a_k sont des réels et les X_k sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\{1,-1\}$~~

~~La première partie établit des résultats sur des intégrales, utilisés dans les parties suivantes.~~

~~À partir de la deuxième partie, on suppose donnée une suite $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et vérifiant~~

$$\cancel{\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}}$$

Problème 1 (pour tout le monde !)

I Suites et intégrales

I.A – Étude d'une intégrale à paramètre

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, on pose

$$f(x) = \int_0^{\infty} \frac{1-\cos t}{t^2} \mathrm{e}^{-xt} \,\mathrm{d}t$$

I.A.1) Montrer que f est définie et continue sur $[0,+\infty[$ et de classe C^2 sur $]0,+\infty[$.

I.A.2) Déterminer les limites de f et f' en $+\infty$.

I.A.3) Exprimer f'' sur $]0,+\infty[$ à l'aide de fonctions usuelles et en déduire que

$$\forall x > 0, \quad f'(x) = \ln(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

I.A.4) Montrer

$$\begin{cases} \forall x > 0, \quad f(x) = x\ln(x) - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) - \arctan(x) + \frac{\pi}{2} \\ f(0) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

I.A.5) Montrer

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |s| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{1-\cos(st)}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

I.B – Étude d'une suite d'intégrales

Dans cette section, on étudie la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_0^{\infty} \frac{1-(\cos t)^n}{t^2} \,\mathrm{d}t$$

I.B.1) Justifier l'existence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser la monotonie de la sous-suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

I.B.2) Montrer que $u_1 = u_2 = \dfrac{\pi}{2}$.

I.C – Calcul d'un équivalent de u_n

I.C.1) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{2}} v_n \qquad \text{avec} \qquad v_n = \int_0^{\infty} \frac{1-\left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n}{u\sqrt{u}} \,\mathrm{d}u$$

I.C.2) Montrer que

$$\forall (n,u) \in \mathbb{N}^* \times]0,1], \quad \left|1 - \left(\cos\left(\sqrt{2u/n}\right)\right)^n\right| \leqslant u$$

I.C.3) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite finie l vérifiant

$$l = \int_0^\infty \frac{1-\mathrm{e}^{-u}}{u\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$$

I.C.4) On admet la relation $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-u}}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$.

Conclure que $u_n \sim \sqrt{\dfrac{n\pi}{2}}$.

Fin du problème 1

[redacted]

Dans cette partie, comme il est indiqué dans le préambule, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes, à valeurs dans $\{1,-1\}$ et telles que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \frac{1}{2}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
L'espérance d'une variable aléatoire réelle finie Z est notée $E(Z)$ et sa variance $V(Z)$.

II.A – Étude de $E(|S_n|)$

II.A.1) Déterminer l'espérance et la variance de S_n.

II.A.2) Soit S et T deux variables aléatoires réelles finies indépendantes définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On suppose que T et $-T$ ont même loi.
Montrer que $E(\cos(S+T)) = E(\cos(S))E(\cos(T))$.

II.A.3) On considère la fonction φ_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi_n(t) = E(\cos(S_n t))$ pour tout réel t.
Montrer que $\varphi_n(t) = (\cos t)^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ et tout réel t.

II.A.4) Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $E(|S_n|) = \dfrac{2}{\pi}u_n$.

On utilisera l'expression intégrale de la valeur absolue obtenue à la question I.A.5.

II.A.5) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n+1} = u_{2n+2}$.

II.B – Étude de $\dfrac{S_n}{n}$

On se propose de démontrer que la suite $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0, c'est-à-dire qu'il existe un événement négligeable $\mathcal{Z} \in \mathcal{A}$ tel que

$$\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{Z}, \quad \frac{S_n(\omega)}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$U_n = \left(\frac{S_n}{n}\right)^4 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{Z}_n = \left\{\omega \in \Omega,\ \exists k \geqslant n,\ U_k(\omega) \geqslant \frac{1}{\sqrt{k}}\right\}$$

II.B.1) Montrer que $E(S_n^4) = 3n^2 - 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

II.B.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\left(U_n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \leqslant \dfrac{3}{n^{3/2}}$.

II.B.3) Montrer que $\mathcal{Z}_n \in \mathcal{A}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et que $\lim\limits_{n\to\infty} P(\mathcal{Z}_n) = 0$.

II.B.4) En considérant $\mathcal{Z} = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \mathcal{Z}_n$, montrer que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

Problème 2 (d'après CCP)

Dans tout ce problème, $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite de nombre réels telle que la série entière $\sum a_n x^n$ de la variable réelle x ait pour rayon de convergence 1.
On désigne alors par $\sum a_n$ la série de terme général a_n et par f la fonction définie sur l'intervalle ouvert $]-1,1[$ par : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
On désigne par $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ les deux propriétés suivantes possibles de la suite (a_n) :
$(\mathcal{P}_1)$: la série $\sum a_n$ converge.
$(\mathcal{P}_2)$: la fonction f admet une limite finie, notée $\lim_{x\to 1^-} f(x)$, lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

1. En utilisant par exemple des développements en série entière usuels, donner, dans chacun des cas suivants, un exemple de suite (a_n) telle que :
   (a) (a_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;
   (b) (a_n) ne vérifie pas $(\mathcal{P}_1)$ et vérifie $(\mathcal{P}_2)$;
   (c) (a_n) ne vérifie ni $(\mathcal{P}_1)$ ni $(\mathcal{P}_2)$;
   (d) La série $\sum a_n x^n$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $]-1,1[$ (justifier).
2. Enoncer le théorème radial d'Abel en termes d'implication entre les deux propriétés $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.
3. On rappelle que le produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes est une série absolument convergente.
   (a) Le produit de Cauchy de deux séries convergentes est-elle une série convergente ? (On pourra examiner le cas $u_n = v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{1/4}}$ pour $n \geq 1$).
   (b) Soit $\sum u_n$, $\sum v_n$ deux séries de nombres réels, on pose pour n entier naturel, $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ et on suppose que les trois séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ convergent.
   Montrer, à l'aide du théorème radial d'Abel, qu'alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.
4. On nomme $(\mathcal{Q})$ la propriété : pour tout entier n, $a_n \geq 0$.
   Montrer que si (a_n) vérifie les propriétés $(\mathcal{P}_2)$ et $(\mathcal{Q})$, alors elle vérifie $(\mathcal{P}_1)$ (on pourra montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k \leq \lim_{x\to 1^-} f(x)$).

5. Dans cette question on admet le théorème de Littlewood :

   si la fonction f admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures et si $a_n = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right)$ (la suite (a_n) est dominée par la suite $(1/n)$) alors la série $\sum a_n$ converge.

   Pour p entier naturel non nul, on considère une suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ périodique de période p formée d'élements de l'ensemble $\{-1, 1\}$.

   (a) Donner, en justifiant leur valeur, les rayons de convergence des séries entières $\sum_{n\geq 1} \epsilon_n x^{n-1}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\epsilon_n}{n} x^n$.

   On pose, pour $x \in]-1, 1[$: $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{n} x^n$ et $g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \epsilon_n x^{n-1}$.

   (b) Etablir que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$ converge si et seulement si la fonction $f \; : \; x \mapsto \int_0^x g(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers 1 par valeurs inférieures.

   (c) Montrer que g est une fraction rationnelle à déterminer.

   (d) Retrouver, uniquement à l'aide des deux questions précédentes, que la série harmonique diverge et que la série alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge en précisant sa somme.

   (e) Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur la somme $\sum_{i=1}^{p} \epsilon_i$ pour que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\epsilon_n}{n}$ converge. Que peut-on en conclure dans les cas où la période p est un entier impair ?

   (f) ~~Dans le cas où la suite $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ est périodique de période 6 avec $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_3 = 1$, $\epsilon_4 = \epsilon_5 = \epsilon_6 = -1$, déterminer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\epsilon_n}{n}$ (il est demandé de détailler les calculs).~~

Fin du problème 2

Problème 3

ÉCOLE POLYTECHNIQUE **FILIÈRE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 2000

PREMIÈRE COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On se propose d'étudier certaines équations différentielles, d'abord dans le cadre des séries entières, ensuite dans celui des fonctions indéfiniment dérivables.

Notations des parties I, II et III.

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ formé des suites de nombres complexes $u = (u_k)_{k=1,2,\ldots}$, et par e_n la suite u où $u_k = 1$ si $k = n$ et 0 si $k \neq n$. Pour tout u de E on note $r(u)$ le rayon de convergence, éventuellement nul ou infini, de la série entière $\sum_{k=1}^{\infty} u_k\, x^k$; pour tout nombre réel $R > 0$ on note E_R l'ensemble des u de E tels que $r(u) \geq R$; enfin on note E_+ l'ensemble des $u \in E$ tels que $r(u) > 0$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Un élément u de E appartient à E_+ si et seulement s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que l'on ait $|u_k| \leq M^k$ pour tout k ; dans ce cas on a $r(u) \geq \dfrac{1}{M}$.

b) Si, pour un réel $M > 0$, on a $|u_k| \geq M^k$ pour tout k, on a $r(u) \leq \dfrac{1}{M}$.

2. Déterminer un nombre réel $\gamma > 0$ tel que l'on ait, pour tout $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-i)^2} \leq \frac{\gamma}{k^2}$$

Deuxième partie

On fixe un nombre complexe a et on désigne par A_a l'endomorphisme de E défini par $(A_a u)_k = (k+a)u_k$ pour tout k.

3. Déterminer le noyau et l'image de A_a.

4. Vérifier que, si a n'est pas un entier strictement négatif, pour tout $R > 0$, la restriction de A_a à E_R est un isomorphisme de ce sous-espace sur lui-même.

Troisième partie

On définit le produit $u * v$ de deux éléments u et v de E par $(u * v)_1 = 0$ et

$$(u * v)_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i \, v_{k-i} \quad \text{pour} \quad k \geq 2 \, .$$

On fixe deux nombres complexes a et c, a n'étant pas un entier strictement négatif ; on note T l'application de E dans lui-même définie par $Tu = A_a u + c\, u * u$.

5.a) Supposant que $Tu = v$ où u et v sont des éléments de E, écrire u_1 en fonction de v_1, puis u_k en fonction de $v_k, u_1, \ldots, u_{k-1}$ pour $k \geq 2$.

b) L'application T est-elle injective ? surjective ?

6. On se propose de démontrer que la restriction de T à E_+ est une bijection de ce sous-espace sur lui-même.

a) Vérifier que $T(E_+)$ est inclus dans E_+.

b) Soit $u \in E$ tel que $v = Tu \in E_+$. Démontrer l'existence de nombres réels δ, M, M_0, M_1 strictement positifs satisfaisant les conditions suivantes :

(1) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*, \ |k + a| \geq \delta$

(2) $\quad 2|c|\gamma \, M_0 \leq \delta$, où γ est la constante introduite à la question **2.**

(3) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*, \ |v_k| \leq M^k$

(4) $\quad M \leq \delta\, M_0 M_1$

(5) $\quad \forall k \in \mathbf{N}^*,\ 2k^2 M^k \leq \delta\, M_0 M_1^k$.

c) Comparer $|u_k|$ et $\dfrac{M_0 M_1^k}{k^2}$.

d) Conclure.

Fin du problème 3

[redacted]

a) Montrer que u_k est de la forme $u_k = \alpha_k \lambda^k$ avec $\alpha_k \in \mathbf{R}_+^*$ et

$$2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1 \quad \text{pour tout } k\ .$$

b) En déduire un encadrement de $r(u)$.

Quatrième partie

Pour tout intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$ on note $C^\infty(I)$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur I. On désigne par a un nombre réel non nul et par D l'endomorphisme de $C^\infty(I)$ défini par

$$(Df)(t) = t\, f'(t) + a\, f(t)\ .$$

8. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $Df = 0$ sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, et préciser leurs intervalles de définition.

9. Dire pour quelles valeurs de a il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, vérifiant $Df = 0$, nulle en 0 mais non identiquement nulle.

Dans la suite, on prend pour I un intervalle de la forme $]0, \theta[$ avec $\theta \in]0, +\infty]$. On désigne par t_0 un point de I, par g une fonction de $C^\infty(I)$, et enfin par α un nombre complexe.

10. Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle $Df = g$ sur I telle que $f(t_0) = \alpha$ [on pourra introduire la fonction

$$t \mapsto \int_{t_0}^{t} s^{a-1}\, g(s) ds\,]$$

11. On suppose dans cette question que a n'est pas un entier strictement négatif et que g est la restriction à I de la somme d'une série entière $\sum_{k=1}^{\infty} v_k\, t^k$ ayant un rayon de convergence $\geq \theta$.

Déterminer α de façon que f soit aussi la restriction à I de la somme d'une série entière ayant un [redacted]