P1-P2 (espaces probabilisés, v.a. discrètes) : exercices

I Exercices ccp 2015

$\boxed{\text{EXERCICE 97}}$

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et

$\forall\, x \in \,]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.

Soit $p \in \,]0,1[$ et $r \in \mathbb{N}^*$.

On dépose une bactérie dans une enceinte fermée à l'instant $t = 0$ (le temps est exprimé en secondes).
On envoie un rayon laser par seconde dans cette enceinte.
Le premier rayon laser est envoyé à l'instant $t = 1$.
La bactérie a la probabilité p d'être touchée par le rayon laser.
Les tirs de laser sont indépendants.
La bactérie ne meurt que lorsqu'elle a été touchée r fois par le rayon laser.
Soit X la variable aléatoire égale à la durée de vie de la bactérie.

1. Déterminer la loi de X.
2. Prouver que X admet une espérance et la calculer.

---

1. Lorsque $r = 1$, on reconnaît une loi géométrique, il est donc bien de commencer l'oral en rappelant cette loi, son espérance.
Première solution : Les hypothèses de l'énoncé font que, pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire égale au nombre de tirs « réussis » entre l'instant $t = 1$ et l'instant $t = n$ suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. Or on a $X = n$ si et seulement si la bactérie a été touchée $r-1$ fois entre l'instant $t = 1$ et l'instant $t = n-1$ et touchée à l'instant $t = n$. Par indépendance, on a donc :

$$P(X = n) = \binom{n-1}{r-1} p^{r-1}(1-p)^{n-r} \;\times\; p$$

Deuxième solution : La loi du temps du premier tir réussi est une loi $\mathcal{G}(p)$. Par indépendance, on a donc $X = Z_1 + \ldots + Z_r$ où les Z_i sont indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$ (Z_i est le temps entre les $i-1$ème et $i$ème tirs réussis). La fonction génératrice d'une loi géométrique est

$$s \mapsto \frac{ps}{1-(1-p)s}$$

(définie sur $]-\frac{1}{1-p}, \frac{1}{1-p}[$). Donc la fonction génératrice de X est, sur le même intervalle,

$$s \mapsto \left(\frac{ps}{1-(1-p)s}\right)^r$$

On peut alors faire un produit de Cauchy, ou mieux une dérivation pour obtenir le développement en série entière de

$$s \mapsto \left(\frac{1}{1-(1-p)s}\right)^r$$

puis mulitplier par $p^r s^r$ mais c'est plus long que la première méthode.

2. Là, c'est la deuxième méthode qui l'emporte de loin pour la simplicité des calculs. En effet, somme de r variables aléatoires qui ont une espérance, X en a une, et

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

L'énoncé suggère une autre méthode (celle que les examinateurs connaîtront, or certains n'auront jamais fait de probabilités...)

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X) &= \sum_{n=r}^{+\infty} n\binom{n-1}{r-1}p^r(1-p)^{n-r}\\ &= rp^r\sum_{n=r}^{+\infty}\binom{n}{r}(1-p)^{n-r}\\ &= rp^r\frac{1}{(1-(1-p))^{r+1}}\\ &= \frac{r}{p}\end{aligned}$$

$\boxed{\text{EXERCICE 98}}$

Soit $a \in]0,+\infty[$.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2,\ P(X=j, Y=k) = \frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

On pourrait commencer par montrer que la famille proposée est sommable de somme 1. On va faire confiance à l'énoncé, et calculer, si $j \in \mathbf{N}$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=j) &= \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{e\, j!} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{j+k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{1}{e\, j!} \left(j\sqrt{e} + \frac{\sqrt{e}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{2}\right)^j \frac{j+\frac{1}{2}}{j!}
\end{aligned}$$

On vérifie bien que $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=j) = 1$, d'où la sommabilité et la « bonne somme » de la famille. Par symétrie, $\mathbf{P}(Y=j) = \mathbf{P}(X=j)$. Comme $(j+\frac{1}{2})(k+\frac{1}{2}) \neq j+k$ en général, il n'y a pas indépendance.

2. On calcule donc à l'aide du théorème de transfert :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[2^{X+Y}\right] &= \frac{1}{e} \sum_{(j,k)\in\mathbf{N}^2} \frac{j+k}{j!k!} \\
&= \frac{2}{e} \sum_{(j,k)\in\mathbf{N}^2} \frac{j}{j!k!} \\
&= 2e \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

EXERCICE 100

1. Rappeler l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
2. Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi et admettant un moment d'ordre 2. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} Y_k$.
   Prouver que : $\forall\, a \in]0,+\infty[$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - E(Y_1)\right| \geqslant a\right) \leqslant \frac{V(Y_1)}{na^2}$.
3. **Application** :
   On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   Á partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95% que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et

$0,45$?

Indication : Considérer la suite (Y_i) de variables aléatoires de Bernoulli où Y_i mesure l'issue du $i^{\text{ième}}$ tirage.

1. QC **2.** QC

3. On pose $Y_i = 1$ si une boule rouge est sortie au $i$ème tirage, $Y_i = 0$ sinon. Il n'y a plus qu'à appliquer l'inégalité précédente, avec $a = 0,05$ et $\mathbf{V}(Y_1) = 0,4(1-0,4) = 0,24$. Il s'agit donc de déterminer n tel que

$$\frac{0,24}{(0,05)^2 n} \leq 0,05$$

(calcul à faire). Remarque : la majoration est grossière en général.

EXERCICE 101

Soit $\lambda \in]0,+\infty[$.

Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = \dfrac{\lambda}{n(n+1)(n+2)}$.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle R définie par $R(x) = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
2. Calculer λ.
3. Prouver que X admet une espérance, puis la calculer.
4. X admet-elle une variance ? Justifier.

1. $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{2x} - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{2(x+2)}$

2. Et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(n+2)}\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$$

Et, finalement, $\lambda = 4$.

3. On a $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}_*} n\mathbf{P}(X=n) < +\infty$. Ce qui montre que X admet une espérance, et

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{(n+1)(n+2)} = 4\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = 2$$

3. Et $\displaystyle\sum_{n\in\mathbf{N}_*} n^2\mathbf{P}(X=n) = +\infty$, donc pas de moment d'ordre 2, donc pas de variance.

EXERCICE 103

Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N} (X_i)$.
   c'estàdire $\forall \omega \in \Omega$, $Y(\omega) = \min(X_1(\omega), \cdots, X_N(\omega))$, min désignant le plus petit élément.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$.
   En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.
   (b) Prouver que Y admet une espérance et la calculer.

1.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_i \leq n) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} \\
&= p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} \\
&= 1-(1-p)^n
\end{aligned}$$

et donc $\mathbf{P}(X_i > n) = (1-p)^n$. Bien sûr, il vaut mieux faire l'inverse : ce dernier résultat est évident compte tenu de la définition de la loi géométrique, l'énoncé semble néanmoins demander de faire le calcul. On fera quand même remarquer à l'examinateur qu'on n'est pas dupe, dans un bon esprit !

2. (a) De $\mathbf{P}(Y > n) = \mathbf{P}(X_1 > n, \ldots, X_N > n)$, de l'indépendance des X_i et du résultat du **1.** on tire

$$\mathbf{P}(Y > n) = (1-p)^{Nn}$$

puis

$$\mathbf{P}(Y \leq n) = 1 - (1-p)^{Nn}$$

puis

$$\mathbf{P}(Y = n) = (1-p)^{N(n-1)}(1-(1-p)^N)$$

(qui d'ailleurs se déduit au moins aussi bien du premier résultat : encore un « puis » bizarre).

(b) Y suit donc une loi géométrique de paramètre $1-(1-p)^N$, ce qui donne par le cours son espérance (mais il faut être prêt à la recalculer à la demande de l'examinateur) :

$$\mathbf{E}(Y)=\frac{1}{1-(1-p)^N}$$

EXERCICE 107

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes et à valeurs dans $\mathbb{N}$.
Elles suivent la même loi définie par : $\forall\, k\in\mathbb{N},\ P(X=k)=P(Y=k)=pq^k$ où $p\in\,]0,1[$ et $q=1-p$.
On considère alors les variables U et V définies par $U=\sup(X,Y)$ et $V=\inf(X,Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U,V).
2. Expliciter les lois marginales de U et de V.
3. U et V sont-elles indépendantes ?

1. Le couple (U,V) est à valeurs dans $E=\{(m,n)\in\mathbf{N}^2\ ;\ m\geq n\}$. Et
$\mathbf{P}(U=m,V=m)=\mathbf{P}(X=m,Y=m)=p^2q^{2m}$ (par indépendance de X et Y) et, si $m>n$,
$\mathbf{P}(U=m,V=n)=\mathbf{P}(X=m,Y=n)+\mathbf{P}(X=n,Y=m)=2p^2q^{m+n}$ toujours par indépendance.
2. Donc, pour tout entier naturel non nul n,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(U=n)&=\sum_{m=0}^{n}\mathbf{P}(U=n,V=m)\\&=\sum_{m=0}^{n-1}2p^2q^{m+n}\ +\ p^2q^{2n}\\&=2p^2q^n\frac{1-q^n}{1-q}+p^2q^{2n}\\&=pq^n\left(2(1-q^n)+pq^n\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(V=n)&=\sum_{m=n}^{+\infty}\mathbf{P}(U=m,V=n)\\&=\sum_{m=n+1}^{+\infty}2p^2q^{m+n}\ +\ p^2q^{2n}\\&=2p^2q^{2n+1}\frac{1}{1-q}\ +\ p^2q^{2n}\\&=pq^{2n}(2q+p)\\&=pq^{2n}(1+q)\\&=(1-q^2)\left(q^2\right)^n\end{aligned}$$

3. S'il y avait indépendance, on aurait

$$\mathbf{P}(U=m, V=n) = \mathbf{P}(U=m)\ \mathbf{P}(V=n)$$

et si $m < n$ c'est manifestement faux.

EXERCICE 108

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.
Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ».
On pose également $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

1. Par formule des probabilités totales (on conditionne par le « choix » de l'urne :

$$p_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{4}{7} = \frac{17}{35}$$

2. On conditionne par la couleur de la boule tirée au $n$ième tirage ; toujours avec la formule des probabilités totales :

$$p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{5} + (1-p_n) \times \frac{4}{7}$$

qui est bien la formule cherchée.
3. On résout

$$x = -\frac{6}{35}x + \frac{4}{7}$$

on appelle x_0 la solution ; on a alors

$$p_{n+1} - x_0 = -\frac{6}{35}(p_n - x_0)$$

ce qui donne assez vite le résultat.

EXERCICE 109

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

1. Si $i \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(X=i) = \frac{1}{e\ 2^{i+1}} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{2^{i+1}}$$

Il est judicieux de remarquer qu'on a bien

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}} = 1$$

De même, si $j \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(Y=j) = \frac{1}{e\ j!}$$

2.a. Si $i \in \mathbf{N}_*$,

$$\mathbf{P}(X+1=i) = \mathbf{P}(X=i-1) = (1-\frac{1}{2})^{i-1}\ \frac{1}{2}$$

ce qui montre que $X+1 \sim \mathcal{P}(1/2)$.
Donc l'espérance de X est $2-1=1$, la variance vaut 2. **2.b.** $Y \sim \mathcal{P}(1)$, donc espérance et variance valent 1. **3.** Manifestement, oui.
4. La probabilité cherchée est

$$\frac{1}{e}\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{i+1}i!} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

EXERCICE 112

On admet, dans cet exercice, que : $\forall\, q \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k\geqslant q} \binom{k}{q} x^{k-q}$ converge et $\forall\, x \in\ ]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{k=q}^{+\infty} \binom{k}{q} x^{k-q} = \frac{1}{(1-x)^{q+1}}$.
Soit $p \in\ ]0,1[$.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi de probabilité du couple (X, Y) est donnée par :

$$P((X=k)\cap(Y=n)) = \begin{cases} \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \text{ si } k \leqslant n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. (a) Déterminer la loi de Y.
   (b) Prouver que $1+Y$ suit une loi géométrique.
   (c) Déterminer l'espérance de Y.
3. Déterminer la loi de X.

---

1. et **2. (a), (b), (c)** se fait de tête.
3. On écrit

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X=k) &= \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n p(1-p)^n \\
&= p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\left(\frac{1-p}{2}\right)^{n-k} \\
&= p\left(\frac{1-p}{2}\right)^k \frac{1}{\left(1-\frac{1-p}{2}\right)^{k+1}} \\
&= \frac{2p}{1+p}\left(\frac{1-p}{1+p}\right)^k
\end{aligned}$$

$X+1$ suit donc une loi géométrique de paramètre $\dfrac{2p}{1+p}$

II Travail dans les tribus d'événements

Exercice 1. Soit Ω un ensemble, A une partie de Ω. Quelle est la plus petite tribu contenant A ?

On vérifie que $\{\emptyset, A, \overline{A}, \Omega\}$ est une tribu. C'est assez facilement la plus petite contenant A.

Exercice 2. Soit Ω un ensemble, $(\Omega_j)_{j\in I}$ une partition finie ou dénombrable de Ω (i.e. I est fini ou dénombrable, les Ω_j sont non vides, deux à deux disjoints, et leur réunion est Ω). Décrire la plus petite tribu $\mathcal{A}$ telle que $\forall j \in I \quad \Omega_j \in \mathcal{A}$.

Une telle tribu doit contenir toutes les $\bigcup_{j \in J'} \Omega_j$, où J' est une partie de J. Mais on vérifie que

$$\{ \bigcup_{j \in J'} \Omega_j \ ; \ J' \subset J\}$$

est un tribu (comme d'habitude, on convient que $\bigcup_{j \in \emptyset} \Omega_j = \emptyset$). C'est facilement la plus petite vérifiant la condition imposée.

Exercice 3. Soit Ω, Ω' deux ensembles, $f \ : \ \Omega \mapsto \Omega'$ une application. Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω', montrer que $\{f^{-1}(A) \ ; \ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur Ω. On peut résumer cette propriété en disant que « l'image réciproque d'une tribu par une application est une tribu ». L'image directe d'une tribu par une application est-elle une tribu ?

On a $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$, et, si $A \in \mathcal{A}$,

$$\overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A})$$

Enfin,

$$\bigcup_{n \in \mathbf{N}} f^{-1}(A_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n \in \mathbf{N}} A_n\right)$$

Et tout cela permet de conclure qu'effectivement l'image réciproque d'une tribu par f est une tribu. En revanche l'image directe d'une tribu n'est pas une tribu. La considération d'une application constante permet par exemple de voir que la stabilité par passage au complémentaire n'est pas vérifiée.

Exercice 4. On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ des parties A de $\mathbf{N}$ qui vérifient : A est finie ou $A^c = \mathbf{N} \setminus A$ est finie. A est-elle une tribu ?

Non, elle n'est pas stable par réunion dénombrable (la réunion des $\{2n\}$, qui sont dans la « tribu », n'y est pas).

Exercice 5. Soit $(A_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite d'événements indépendants, tous de probabilité non nulle. Montrer que $\varliminf_{n \to +\infty} (A_n) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m \right)$ est négligeable si et seulement si $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ l'est.

La continuité croissante montre :

$$P\left(\varliminf_{n\to+\infty}(A_n)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(P\left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m\right)\right)$$

Mais la suite $\left(P\left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m\right)\right)_{n\geq 0}$ est croissante positive, donc on peut réécrire

$$\left(P\left(\varliminf_{n\to+\infty}(A_n)\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\forall n \geq 0 \qquad P\left(\bigcap_{m=n}^{+\infty} A_m\right)\right) = 0$$

On entrevoit déjà une implication...Mais supposons réciproquement

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 0$$

On a alors

$$P\left(\bigcap_{n=0}^{m} A_n\right) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

Et donc, par indépendance

$$\prod_{n=0}^{m} P(A_n) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

Comme les A_n sont de probabilité non nulle, pour tout q on a

$$\prod_{n=q}^{m} P(A_n) \xrightarrow[m\to+\infty]{} 0$$

Ce qui permet de conclure.

Exercice 6. Montrer qu'une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables l'est. Montrer qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs l'est.

Pour une réunion finie ou dénombrable d'évènements négligeables, c'est à peu près dans le cours. Pour le presque sûr, on passe au complémentaire.

Exercice 7 (Borel-Cantelli). Deux joueurs jouent à Pile ou Face. Eux non plus ne s'arrêtent jamais. Le jeu n'est pas équitable : la probabilité de tomber sur Pile est $p \neq 1/2$. Montrer que, presque sûrement, il n'y aura qu'au plus un nombre fini d'égalités.

Soit A_n l'évènement « il y a égalité après $2n$ parties ». On a

$$P(A_n) = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n$$

Il suffit de vérifier que $\sum P(A_n) < +\infty$ pour conclure. Cela peut se faire par Stirling ou, plus simplement, par d'Alembert.

Exercice 8 (Borel-Cantelli : application à une loi forte des grands nombres). On considère une suite (X_n) de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. On suppose, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_n P(X_n > \epsilon) < +\infty$$

   Montrer que (X_n) converge vers 0 presque sûrement.

2. On suppose

$$\sum_n \mathrm{E}(X_n) < +\infty$$

   Montrer que (X_n) converge vers 0 presque sûrement.

3. Les X_n sont maintenant supposées indépendantes équidistribuées de même loi $\mathcal{B}(p)$ $(0 < p < 1)$. On note, pour tout i, $Y_i = X_i - p$ et

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

   Montrer que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^4\right] &= \frac{1}{n^4} \sum_{(i,j,k,l) \in [\![1,n]\!]^4} \mathrm{E}(Y_i Y_j Y_k Y_l) \\ &= \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^n \mathrm{E}(Y_k^4) \ + \ \frac{6}{n^4} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathrm{E}(Y_i^2 Y_j^2) \end{aligned}$$

   puis, en utilisant la question précédente, montrer que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\text{p.s.}} p$$

   (loi forte des grands nombres pour le jeu de Pile ou Face)

Pour le début, voir le corrigé du TD sur les convergences ce variables aléatoires. Pour le développement de $\mathrm{E}\left[\left(\frac{S_n}{n} - p\right)^4\right]$, on remarque que si $i \notin \{j, k, \ell\}$, on a, par indépendance de Y_i avec $Y_j Y_k Y_\ell$,

$$\mathbf{E}(Y_i Y_j Y_k Y_\ell) = \mathbf{E}(Y_i) \mathbf{E}(Y_j Y_k Y_\ell) = 0$$

et bien sûr de même si $j \notin \{i,k,\ell\}$, etc.... Donc si $\{i,j,k,\ell\}$ est de cardinal impair, $\mathbf{E}(Y_iY_jY_kY_\ell) = 0$. Notons de plus que, si r et s sont deux entiers distincts entre 1 et n, il y a $\binom{4}{2} = 6$ quadruplets (i,j,k,ℓ) tels que $\{i,j,k,\ell\} = \{r,s\}$ On a donc :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{n} Y_k\right)^4\right] &= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}[(Y_i)^4] \ + 6 \sum_{1\leq r<s\leq n} \mathbf{E}[(Y_r)^2(Y_s)^2] \\ &\leq n + 6\binom{n}{2} \\ &\leq n + 3n(n-1)\end{aligned}$$

ce qui permet de s'en sortir.

Exercice 9 (**Fonction de répartition d'une variable aléatoire).**

1. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs réelles. Montrer que la fonction
$$F \ : \ x \longmapsto \mathbf{P}(X \leq x)$$
est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Tracer le graphe de la fonction de répartition d'une loi binomiale. *Dans les autres questions, on considère une variable aléatoire réelle discrète quelconque.*
3. Etudier la monotonie de F.
4. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de F.
5. Etudier la continuité à gauche et à droite de F (on montrera que F est continue à ...en tout point, mais qu'elle n'est pas partout continue à ...)

$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable, donc $I_x = \{t \in X(\Omega) \ ; \ t \leq x\}$ est fini ou dénombrable, $(X \leq x) = \bigcup_{t\in I_x} (X = t)$ est donc un évènement, F est donc bien définie. Elle est croissante, car si $x \leq x'$,

$$(X \leq x) \subset (X \leq x')$$

Elle est bornée, elle a donc des limites en $+\infty$ et en $-\infty$. Or

$$\lim_{+\infty}(F) = \lim_{n\to+\infty} (F(n)) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X \leq n)\right) = P(\Omega) = 1$$

(on utilise la continuité croissante) et, en utilisant la continuité décroissante, et le fait que

$$\lim_{-\infty}(F) = \lim_{n\to+\infty} (F(-n))$$

on obtient que la limite en $-\infty$ vaut 0. En utilisant la continuité décroissante et le fait que

$$(X \leq x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left(X \leq x + \frac{1}{n} \right)$$

on obtient que F est continue à droite (inutile de prendre n'importe quelle suite qui tend vers x, les $x + 1/n$ suffisent puisque la monotonie de F assure qu'elle a une limite à gauche et à droite en tout point). En revanche, on montre de même que la limite à gauche de F en x est $P(X < x)$, donc il y a discontinuité en x si et seulement si $P(X = x) \neq 0$.

Exercice 10 (Somme de variables aléatoires).
Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un univers probabilisé$(\Omega, \mathcal{A}, P)$, à valeurs dans un groupe $(G, *)$.

1. Montrer que $X(\Omega) * Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
2. Montrer que $(X * Y)(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
3. Montrer que $X * Y$ est une variable aléatoire discrète.

Il y a plusieurs moyens d'aborder ce genre de question : on peut d'abord se rappeler qu'une fonction d'une variable aléatoire discrète est une variable aléatoire discrète, et qu'un couple de variables aléatoires discrètes est une variable aléatoire discrète. C'est le plus rapide pour montrer le résultat de la dernière question. Mais savoir faire « à la main » ce cas particulier est intéressant.

$X(\omega) * Y(\Omega) = \displaystyle\bigcup_{a \in X(\Omega)} \{a\} * Y(\Omega)$ est donc réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables, donc est fini ou dénombrable. Et il contient $(X * Y)(\Omega)$. Ensuite,

$$(X * Y = g) = \bigcup_{h \in X(\Omega)} \left(X = h, Y = h^{-1} * g \right)$$

et une union finie ou dénombrable d'intersections d'évènements est un évènement.

Exercice 11 (Règle de 0-1 de Kolmogorov : un exemple).

1. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé ; soit A un événement. On suppose que $(B_i)_{i \geq 1}$ est une famille croissante d'événements tous indépendants de A. Montrer que $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{+\infty} B_i$ est indépendante de A.

2. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé ; soit A un événement. On suppose que $(B_i)_{i\geq 1}$ est une famille décroissante d'événements tous indépendants de A. Montrer que $\bigcap_{i=1}^{+\infty} B_i$ est indépendante de A.
3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, P)$; on pose, si $n \geq 1$,

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

   (a) Montrer que les évènements $\bigcup_{k=1}^{N} (|S_k| \geq M)$ et $\bigcup_{k=N+1}^{N'} (|S_k - S_N| \geq M')$ sont indépendants pour tous réels M et M' et tous entiers N et N' tels que $1 \leq N < N'$.

   (b) Montrer en utilisant **1.** et **2.** que les évènements $B = \bigcap_{p=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{k=N+1}^{+\infty} (|S_k - S_N| \geq p) \right)$ et $\bigcup_{k=1}^{N} (|S_k| \geq M)$ sont indépendants (N désigne un entier naturel).

   (c) Montrer que B ne dépend pas de N (on cherchera une propriété simple de la suite $(S_n(\omega))$ équivalente à $\omega \in B$).

   (d) En appliquant de nouveau **1.** et **2.**, montrer que B est indépendant de lui-même. En déduire que $P(B) \in \{0, 1\}$.

III Espérance, variance, moments

Exercice 12 (Oral Centrale). Soit (Ω, A, P) un espace probabilisé et $(E_n)_{n\in\mathbf{N}} \in A^{\mathbf{N}}$ une suite d'événements quelconques. On suppose que $\sum_{n\geq 0} P(E_n) < +\infty$. Pour X un ensemble, on note 1_X la fonction indicatrice de X.

1. Soit $Z = \sum_{n=0}^{+\infty} 1_{E_n}$ (on convient que $Z = +\infty$ si la série diverge). Prouver que Z est une variable aléatoire discrète.
2. Soit $F = \{\omega \in \Omega \ ; \ \omega \text{ appartient à un nombre fini de } E_n\}$. Prouver que F est un événement et que $P(F) = 1$.
3. Prouver que Z admet une espérance.

---

1. Z est bien une application définie sur Ω à valeurs dans $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$ qui est un ensemble dénombrable (si on nous demande de détailler une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, on pourra par exemple donner $0 \mapsto +\infty$, $n \mapsto n-1$ si $n \geq 1$).

On doit montrer que, si $x \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, $X^{-1}(\{x\}) \in A$. Pour $x = 0$, par exemple, c'est facile, car

$$X^{-1}(\{0\}) = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \overline{E_n}$$

Or, pour tout n, $\overline{E_n} \in A$ (stabilité de A par passage au complémentaire), et A est stable par réunion dénombrable. Pour $x = 1$, ce n'est pas non plus très difficile :

$$X^{-1}(\{1\}) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left(E_n \cap \bigcap_{p \neq n} \overline{E_p} \right)$$

et là aussi, la stabilité de A par réunion dénombrable, passage au complémentaire et intersection dénombrable conclut.

D'une manière générale, soit $x \in \mathbf{N}$. Notons P_x l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$ à x éléments. On peut espérer que P_x soit dénombrable. Il l'est, par exemple l'application qui à $Y \in P_x$ associe la liste ordonnée par ordre croissant des éléments de Y définit une application injective de P_x dans $\mathbf{N}^x$, donc une bijection de P_x sur une partie de $\mathbf{N}^x$, or une partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable (car une partie de $\mathbf{N}$ est finie ou dénombrable). Et on sait par le cours que $\mathbf{N}^x$ est dénombrable. Or

$$X^{-1}(\{x\}) = \bigcup_{Y \in P_x} \left(\bigcap_{n \in Y} E_n \cap \bigcap_{n \in \mathbf{N} \setminus Y} \overline{E_n} \right)$$

D'où l'appartenance à A de $X^{-1}(\{x\})$, pour tout $x \in \mathbf{N}$. Et par suite celle de $X^{-1}(\{+\infty\})$, car

$$X^{-1}(\{+\infty\}) = \overline{\bigcup_{n=0}^{+\infty} X^{-1}(\{n\})}$$

2. Comme $F = (Z < +\infty) = \overline{(Z = +\infty)}$, l'appartenance de F à A a déjà été montrée. La question est alors la version « facile » de Borel-Cantelli.
3. Une remarque préliminaire : l'énoncé n'est pas conforme au programme, puisque Z n'est pas une variable aléatoire réelle. Néanmoins, l'événement $(Z = +\infty)$ étant négligeable (d'après la deuxième question), on ne se formalisera pas de ce petit dérapage, déjà rencontré aussi à l'oral de l'X.

   Posons $Z_N = \sum_{n=0}^{N} 1_{E_n}$; alors $E(Z_N) = \sum_{n=0}^{N} P(E_n)$. Mais peut-on « passer à la limite » quand $N \to +\infty$? Il n'est pas évident, avec les outils du programme, de montrer que

$$E(Z_N) \xrightarrow[N \to +\infty]{} E(Z)$$

On a davantage d'outils concernant les probabilités que les espérances (continuité croissante, continuité décroissante par exemple), on peut penser à la formule

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{+\infty} P(Z \geq j)$$

Mais elle n'est pas au programme...Il faut donc la redémontrer. On peut penser qu'avec l'expérience, cela ferait partie de l'énoncé. On a, pour tout $j \geq 1$,

$$(Z \geq j) = \bigcup_{N=0}^{+\infty} (Z_N \geq j)$$

et cette réunion est croissante, donc

$$P(Z \geq j) = \lim_{N \to +\infty} \left(P(Z_N \geq j)\right)$$

On ajoute pour $j = 1, \ldots, J$, on obtient

$$\sum_{j=1}^{J} P(Z \geq j) = \lim_{N \to +\infty} \left(\sum_{j=1}^{J} P(Z_N \geq j) \right)$$

(sans problème, la somme étant finie). Mais $\displaystyle\sum_{j=1}^{J} P(Z_N \geq j) \leq E(Z_N) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)$. On en déduit que Z a une espérance, et d'ailleurs, aussi, que $E(Z) \leq \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P(E_n)$.

Exercice 13 (Un peu de théorie préhilbertienne). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé dénombrable, tel que

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbf{P}(\{\omega\}) \neq 0$$

On notera $\mathcal{L}^2$ l'ensemble des variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ qui admettent un moment d'ordre 2.

1. Montrer que $\mathcal{L}^2$ est un espace vectoriel, et que

$$(X|Y) = \mathbf{E}(XY)$$

   définit un produit scalaire sur cet espace.

2. Si $X \in \mathcal{L}^2$, déterminer le projeté orthogonal de X sur l'espace des variables aléatoires constantes. Déterminer la distance de X à cet espace.

3. A partir de la question précédente, retrouver la formule

$$\mathbf{V}(aX + b) = a^2 \mathbf{V}(X)$$

4. Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{L}^2$, X non constante, déterminer la projection orthogonale de X sur $\{aY + b \ ; \ (a,b) \in \mathbf{R}^2\}$. Calculer la distance de X a ce plan.
5. Si X et Y sont deux éléments de $\mathcal{L}^2$, on définit leur coefficient de corrélation linéaire :
$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$
Montrer que $\rho(X,Y) \in [-1,1]$. Quand ce coefficient est-il égal à ± 1 ?
6. Soit X, Y deux éléments de $\mathcal{L}^2$. On note
$$F = \left\{ Z \in \mathcal{L}^2 \ ; \ \exists (a_x)_{x \in X(\Omega)} \in \mathbf{R}^{X(\Omega)} \quad Z = \sum_{x \in X(\Omega)} a_x \mathbf{1}_{(X=x)} \right\}$$
déterminer, s'il existe, le projeté orthogonal de Y sur F (on suppose, pour tout x, $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$).

1. L'inégalité
$$|XY| \leq \frac{1}{2}\left(X^2 + Y^2\right)$$
fait que le produit de deux éléments de $\mathcal{L}^2$ est d'espérance finie. Et donc, si X et Y sont dans $\mathcal{L}^2$, $X + Y$ y est aussi, en vertu de
$$(X+Y)^2 = X^2 + Y^2 + 2XY$$
le membre de droite ne contenant que des termes d'espérance finie. Comme λX y est évidemment, $\mathcal{L}^2$ est bien un espace vectoriel. Et $(X,Y) \mapsto \mathbf{E}(XY)$ est bien défini dessus. Les propriétés d'un produit scalaire sont sans problème, on remarque seulement que si $(X|X) = 0$,
$$\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{P}(\{\omega\}) X^2(\omega) = 0$$
ce qui vu l'hypothèse de départ donne $X = 0$. *Sans l'hypothèse de départ, on peut toujours construire ce genre de produit scalaire, mais on a seulement* $(X|X) = 0 \Rightarrow X = 0$ *presque sûrement. Ce qui n'est dans le fond pas gênant, mais oblige à déborder un peu du strict cadre du programme.*
2. L'existence et l'unicité est assurée par le théorème de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie. Soit a la projection cherchée : on a $X - a \perp 1$, donc
$$\mathbf{E}\left((X - a) \times 1\right) = 0$$
et cela donne $a = \mathbf{E}(X)$. Pas si étonnant si on y réfléchit. Et notant $F = \mathrm{Vect}(1)$,
$$d(X,F) = \sqrt{\mathbf{E}\left((X - \mathbf{E}(X))^2\right)} = \sqrt{\mathbf{V}(X)}$$

3. Soit p la projection orthogonale sur F. On a

$$p(aX+b) = ap(x) + p(b) = ap(X) + b$$

et donc

$$(aX+b) - p(aX+b) = a(X - p(X))$$

Prenant le carré de la norme des deux membres, on obtient bien par la question précédente

$$\mathbf{V}(aX+b) = a^2\mathbf{V}(X)$$

4. Notons $\alpha Y + \beta$ la projection cherchée. Alors $(X - \alpha Y - \beta|1) = (X - \alpha Y - \beta|Y) = 0$. Ce qui donne le système

$$\begin{cases} \mathbf{E}(Y^2)\alpha & + & \mathbf{E}(Y)\beta & = & \mathbf{E}(XY) \\ \mathbf{E}(Y)\alpha & + & \beta & = & \mathbf{E}(X) \end{cases}$$

On remarque que le déterminant est $\mathbf{V}(Y)$, non nul car Y n'est pas constante. Et on trouve

$$\alpha = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbf{V}(Y)} \qquad , \qquad \beta = \frac{\mathbf{E}(Y^2)\mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y)\mathbf{E}(XY)}{\mathbf{V}(Y)}$$

Pour le calcul de la distance, il est utile de remarquer que $\left(1, \dfrac{1}{\sigma(Y)}(Y - \mathbf{E}(Y))\right)$ est une base orthonormale du plan $\mathrm{Vect}(1, Y)$ (facile à voir si on a compris la deuxième question). Donc avec les notations précédentes,

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \|X\|^2 - \left[(X|1)^2 + \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\,(X|Y - \mathbf{E}(Y))^2\right]$$

ou encore

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \mathbf{E}(X^2) - (\mathbf{E}(X))^2 - \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\,(\mathrm{Cov}(X,Y))^2$$

D'où finalement

$$\mathrm{d}(X,F)^2 = \frac{1}{\mathbf{V}(Y)}\left[\mathbf{V}(X)\mathbf{V}(Y) - (\mathrm{Cov}(X,Y))^2\right]$$

5. De la question précédente, ou de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (en effet, on remarque que

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = (X - \mathbf{E}(X)|Y - \mathbf{E}(Y)) \qquad)$$

on déduit l'encadrement proposé. Avec égalité si et seulement si Y est constante ou X est de la forme $aY + b$.

Exercice 14 (Hiérarchie de l'existence des moments). Soit X une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé, r et r' deux nombres réels tels que $0 < r' < r$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left[|X|^r\right] < +\infty \;\Rightarrow\; \mathbf{E}\left[|X|^{r'}\right] < +\infty$$

L'idée est assez simple : ce sont les « grandes » valeurs prises par $|X|$ qui peuvent gêner l'existence de l'espérance. Or, si $|X(\omega)|$ est « grand », $|X(\omega)|^r$ est d'autant plus grand que r est grand. Que signifie « grand » ? tout simplement plus grand que 1. On a

$$|X(\omega)| > 1 \;\Rightarrow |X(\omega)|^{r'} \leq |X(\omega)|^r$$

ce qui permet d'écrire

$$\forall \omega \in \Omega \quad |X(\omega)|^{r'} \leq |X(\omega)|^r + 1$$

et de conclure.

Exercice 15 (Monotonie des écarts). Dans cet exercice, X désigne une variable aléatoire discrète strictement positive, admettant des moments de tous ordres.

1. Montrer qu'une application f continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ à valeurs réelles est convexe si et seulement si

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$$

2. Montrer que l'application

$$r \longmapsto \left(\mathbf{E}(X^r)\right)^{1/r}$$

est croissante sur $\mathbf{R}_*^+$.

Supposons

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)$$

alors, par exemple,

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{1}{2}(x+\frac{1}{2}(x+y)\right) \leq \frac{1}{2}\left(f(x)+f\left(\frac{1}{2}(x+y)\right)\right)$$

ce qui implique, en utilisant encore la propriété :

$$\begin{aligned}\forall (x,y) \in I^2 \qquad f\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{4}y\right) &\leq \frac{1}{2}\left(f(x)+\frac{1}{2}\left(f(x)+f(y)\right)\right)\\ &\leq \frac{3}{4}f(x)+\frac{1}{4}f(y)\end{aligned}$$

On peut alors avoir l'idée de démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, pour tout $k \in [\![0, 2^n]\!]$, pour tous x et y dans I,

$$f\left(\frac{k}{2^n}x+(1-\frac{k}{2^n})y\right) \leq \frac{k}{2^n}f(x)+(1-\frac{k}{2^n})f(y)$$

(la récurrence se fait comme la première étape : on remplace x ou y dans la propriété à l'étape n par $(x+y)/2$). La densité de l'ensemble des réels de la forme $k/2^n$ dans $[0,1]$, et la continuité de f, donnent alors

$$\forall (t,x,y) \in [0,1] \times I \times I \qquad f\left(tx + (1-t)y\right) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Que savons-nous ? l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui dit

$$[\mathbf{E}(X^r X^s)]^2 \leq \mathbf{E}(X^{2r})\mathbf{E}(X^{2s})$$

Tout étant strictement positif, la question 1 parlant plus de somme que de produit, on peut avoir l'idée de prendre le logarithme :

$$\ln\left(\mathbf{E}(X^{r+s})\right) \leq \frac{1}{2}\left(\ln\left(\mathbf{E}(X^{2r})\right) + \ln\left(\mathbf{E}(X^{2s})\right)\right)$$

La première question assure alors que la fonction

$$f \ : \ r \mapsto \ln\left(\mathbf{E}(X^r)\right)$$

est convexe. . .sous réserve de continuité, ce qui reste encore à voir. Admettons pour l'instant cette continuité, étendue à $[0,+\infty[$ par $f(0)=0$, seule valeur raisonnable (l'espérance de X^0 vaut 1). La convexité donne la croissance des pentes des cordes entre les points d'abscisses 0 et x, i.e., si $r \leq s$,

$$\frac{1}{r}\ln\left(\mathbf{E}(X^r)\right) \leq \frac{1}{r}\ln\left(\mathbf{E}(X^r)\right)$$

inégalité à laquelle on applique l'exponentielle pour conclure. Tout va bien, donc, si f est continue. Mais, si on indexe $X(\Omega)$ sous la forme $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, on écrit

$$\mathbf{E}(X^r) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n^r \mathbf{P}(X = x_n)$$

et les fonctions $\phi_n \ : \ r \mapsto x_n^r \mathbf{P}(X = x_n)$ sont continues sur $\mathbf{R}^+$. Sur $[0,M]$, on a

$$0 \leq \phi_n(x) \leq (1 + x_n^M)\mathbf{P}(X = x_n)$$

(toujours la même astuce : un majorant si $x_n \leq 1$, un autre si $x_n > 1$, et on les ajoute plutôt que de prendre le max, c'est plus rapide. Mais il est tout-à-fait possible et intelligent de couper la somme en deux : les x_i entre 0 et 1, les autres). Cette majoration permet d'obtenir la convergence normale et de finir de montrer la propriété.

Une autre idée est de se souvenir d'une inégalité vue il y a longtemps (espaces vectoriels normés) : on commence, si $p > 0$, $q > 0$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, par écrire pour tous a et b réels positifs :

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Si la famille $(a_i^p)_{i\in I}$ et la famille $(b_i^q)_{i\in I}$ sont deux familles sommables de réels positifs, on note $\|a\|_p = \left(\sum_{i\in I} a_i^p\right)^{1/p}$ et $\|b\|_q = \left(\sum_{i\in I} b_i^q\right)^{1/q}$, on a donc, pour tout i

$$\frac{a_i b_i}{\|a\|_p \|b\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{a_i^p}{\|a\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{b_i^q}{\|b\|_q^q}$$

On somme, on en déduit que la famille $(a_i b_i)$ est sommable et que

$$\sum a_i b_i \leq \|a\|_p \|b\|_q$$

etc…(voir exercice sur Holder et les intégrales, dans le chapitre sur les evn). On prend alors $a_i = (\mathbf{P}(X = x_i))^{1/p}$ pour avoir le terme $\|a\|_p = 1$. Comme on veut interpréter le tout avec des espérances, on a envie de considérer $b_i = (\mathbf{P}(X = x_i))^{1-1/p}\,\alpha_i$, on voit qu'on se rapproche, si $r < s$ on pose $\alpha_i = x_i^r$, il n'y a plus qu'à ajuster la valeur de q (la seule contrainte est $q > 1$, ça tombe bien, on prend $q = \dots$).

Exercice 16 (Médianes). On appelle médiane d'une variable aléatoire réelle discrète X tout réel m tel que

$$\mathbf{P}(X \geq m) \geq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{P}(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$$

1. Montrer que toute variable aléatoire a au moins une médiane.
2. A partir de maintenant, on suppose que X a une espérance. Montrer que, pour toute médiane m de X,

$$\forall a \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{E}\left[|X - m|\right] \leq \mathbf{E}\left[|X - a|\right]$$

3. Montrer que $\mathbf{E}\left[|X - m|\right]$ ne dépend pas de la médiane m de X. On l'appelle écart médian de X.
4. On suppose de plus que X a un moment d'ordre 2. Comparer son écart médian et son écart type.

La plupart des variables aléatoires discrètes qu'on est amené à rencontrer sont à valeurs dans $\mathbf{N}$, cela vaut donc la peine de commencer par examiner ce cas, intéressant, et dont la solution n'est pas trop compliquée. En effet, si X est à valeurs dans $\mathbf{N}$, il y a un « premier » n_0 (i.e. un plus petit) tel que $\mathbf{P}(X \leq n_0) \geq \frac{1}{2}$. C'est évident, mais c'est aussi une conséquence de la continuité croissante :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X \leq n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X \leq n)\right) = 1$$

Si $n_0 = 0$, clairement $m = 0$ convient, car $\mathbf{P}(X \geq 0) = 1$ et $\mathbf{P}(X \leq 0) \geq \frac{1}{2}$. Sinon, on peut dire que $\mathbf{P}(X \leq n_0 - 1) < \frac{1}{2}$, donc par passage au contraire $\mathbf{P}(X \geq n_0) \geq \frac{1}{2}$ et $m = n_0$ convient.

On remarquera utilement qu'une partie dénombrable de $\mathbf{R}$ peut toujours (par définition de la dénombrabilité) s'écrire $\{x_i\}_{i\in\mathbf{N}}$, mais il n'est pas en général possible d'imposer que la suite (x_i) soit croissante (prendre par exemple $\mathbf{Q}$, qui ne peut pas être ordonné en une suite car entre deux rationnels il y a toujours un rationnel). Il faut donc utiliser une autre méthode. Pas si autre d'ailleurs, car on va considérer par exemple la fonction

$$F \ : \ x \mapsto \mathbf{P}(X \leq x)$$

(il est bien sûr aussi pertinent d'introduire une des trois autres fonctions $x \mapsto \mathbf{P}(X \geq x)$, $\quad x \mapsto \mathbf{P}(X > x)$, $\quad x \mapsto \mathbf{P}(X < x)$, mais F a été choisie dans la littérature pour porter le nom de « fonction de répartition »). La fonction F est croissante (si $x \leq y$, $(X \leq x) \subset (X \leq y)$), or elle a pour limite 1 en $+\infty$ (comme elle est croissante, il suffit de tester sur la suite des entiers naturels : par continuité croissante,

$$\lim_{n\to+\infty} (F(n)) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty}(X \leq n)\right) = 1 \ )$$

de même, la continuité décroissante :

$$\lim_{n\to+\infty} (F(-n)) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty}(X \leq -n)\right) = 0$$

montre que F a pour limite 0 en $+\infty$. Attention néanmoins à ne pas utiliser le théorème des valeurs intermédiaires : pour une v.a. discrète, F n'est pas continue. La continuité décroissante appliquée à

$$(X \leq x) = \bigcap_{n=1}^{+\infty}(X \leq x + \frac{1}{n})$$

montre que $F(x + 1/n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$ d'où l'on déduit, par croissance de F, la continuité à droite de F. Si on essaye de faire la même chose pour la continuité à gauche, ça ne marche pas : en effet,

$$(X \leq x) \neq \bigcup_{n=1}^{+\infty}(X \leq x - \frac{1}{n})$$

De toute manière, la simple fonction de répartition d'une loi $\mathcal{B}(p)$ montre qu'il n'y a pas continuité à gauche en général.

Revenons à nos préoccupations ; la situation est un peu délicate, car si l'on voit que probablement m pourra être défini à partir d'une borne supérieure ou d'une borne inférieure d'un ensemble du type $F^{-1}(]-\infty, 1/2])$ ou $F^{-1}(]-\infty, 1/2[)$ ou $F^{-1}(]1/2, +\infty])$ ou $F^{-1}([1/2, +\infty[)$, reste à faire un bon choix. Si le premier essai ne marche pas, on refait un autre essai. Ou mieux : on dessine F, et on « voit » que

$$m = \inf\{x \in \mathbf{R} \ ; \ \mathbf{P}(X \leq x) \geq \frac{1}{2}\}$$

est un bon candidat. La continuité décroissante montre alors

$$\mathbf{P}(X \leq m) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X \leq m + 1/n) \geq \frac{1}{2}$$

Puis, par continuité croissante,

$$\mathbf{P}(X < m) = \lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(X \leq m - 1/n) \leq \frac{1}{2}$$

d'où, par passage au contraire, $\mathbf{P}(X \geq m) \geq \dfrac{1}{2}$

Pour la deuxième question, on peut, quitte à remplacer X par $X - m$, supposer $m = 0$. C'est plus simple à écrire, et ça ne change rien. On doit donc montrer

$$\forall a \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{E}(|X|) \leq \mathbf{E}(|X - a|)$$

sous l'hypothèse $\mathbf{P}(X \leq 0) \geq \dfrac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(X \geq 0) \geq \dfrac{1}{2}$. On peut supposer $a > 0$ (changer X en $-X$ ne change rien). On coupe alors en tranches en utilisant des fonctions indicatrices :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(|X-a|) &= \mathbf{E}(|X-a|\mathbf{1}_{X\leq 0}) + \mathbf{E}(|X-a|\mathbf{1}_{0<X\leq a}) + \mathbf{E}(|X-a|\mathbf{1}_{X>a}) \\
&= \mathbf{E}((a-X)\mathbf{1}_{X\leq 0}) + \mathbf{E}((a-X)\mathbf{1}_{0<X\leq a}) + \mathbf{E}((X-a)\mathbf{1}_{X>a}) \\
&= a\,(\mathbf{P}(X\leq a) - \mathbf{P}(X>a)) + \mathbf{E}(|X|) - 2\mathbf{E}(X\mathbf{1}_{0<X\leq a}) \\
&\geq a\,(\mathbf{P}(X\leq a) - \mathbf{P}(X>a) - 2\mathbf{P}(0<X\leq a)) + \mathbf{E}(|X|) \\
&= a(\mathbf{P}(X\leq 0) - \mathbf{P}(X>a) - \mathbf{P}(0<X\leq a)) + \mathbf{E}(|X|) \\
&= a(\mathbf{P}(X\leq 0) - \mathbf{P}(X>0) + \mathbf{E}(|X|) \\
&= a(2\mathbf{P}(X\leq 0) - 1) + \mathbf{E}(|X|) \\
&\geq \mathbf{E}(|X|)
\end{aligned}$$

La question 3 est une conséquence directe de la question 2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\mathbf{E}(|X-m|) \leq \mathbf{E}(|X - \mathbf{E}(X)|) \leq \sqrt{\mathbf{E}((X-\mathbf{E}(X))^2}$$

donc l'écart médian est inférieur ou égal à l'écart-type.

Exercice 17 (Une formule utile). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. Montrer que

$$\mathrm{E}(X) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(X \geq j)$$

Exercice 18 (L'espérance via une loi conditionnelle). On considère deux variables aléatoires réelles discrètes X et Y sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$; on suppose que Y est d'espérance finie. Montrer que

$$\mathbf{E}(Y) = \sum_{x \in X(\Omega), \mathbf{P}(X=x) \neq 0} \mathbf{E}(Y|X = x)\mathbf{P}(X = x)$$

où l'on désigne par $\mathbf{E}(Y|X = x)$ l'espérance de la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$.

Rappelons que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est définie par, pour $y \in Y(\Omega)$:

$$\mathbf{P}_{Y|X=x}(\{y\}) = \mathbf{P}(Y = y|X = x)$$

(il faut supposer $\mathbf{P}(X = x) \neq 0$, oubli de l'énoncé).
Commençons par supposer $Y \geq 0$. Pour $y \in Y(\omega)$, la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{x \in X(\Omega)}$$

est sommable, de somme $y\mathbf{P}(Y = y)$ (formule des probabilités totales). Et la famille $(y\mathbf{P}(Y = y))_{y \in Y}$ est sommable (du fait que Y est d'espérance finie). Il en découle, par sommabilité par paquets, que la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$$

est sommable. Et donc, pour tout $x \in X(\Omega)$, la famille

$$(y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{y \in Y(\Omega)}$$

est sommable, donc aussi la famille

$$(y\mathbf{P}(Y = y|X = x))_{y \in Y(\Omega)}$$

ce qui exprime que la loi conditionnelle de Y sachant $X = x$ est d'espérance finie. Et on a

$$\sum_{y \in Y(\Omega)} y\mathbf{P}(X = x)\mathbf{P}(Y = y|X = x) = \mathbf{P}(X = x)\mathbf{E}(Y|X = x)$$

ce qui permet de dire que la famille $(\mathbf{P}(X=x)\mathbf{E}(Y|X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable ; et la formule

$$\sum_{x\in X(\omega)} \mathbf{P}(X=x)\mathbf{E}(Y|X=x) = \sum_{y\in Y(\omega) y\mathbf{P}(Y=y)}$$

donne le résultat.
Si Y n'est pas à valeurs positives, ce qui précède appliqué à $|Y|$ permet d'affirmer que la famille

$$(y\mathbf{P}(X=x)\mathbf{P}(Y=y|X=x))_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}$$

est sommable, on a le droit de la sommer « dans les deux sens » et on obtient la formule.

IV Quelques problèmes classiques

Exercice 19 (Ruine du joueur). Un individu joue à un jeu auquel il gagne avec la probabilité p $(0<p<1)$; on note $q=1-p$ la probabilité pour qu'il perde. Chaque partie perdue lui coût 1 euro, chaque partie gagnée lui rapporte 1 euro. Il commence avec un capital de k euros $(0\leq k)$, et décide de jouer jusqu'à ce qu'il ait M euros ou jusqu'à ce qu'il soit ruiné.

1. On note q_k la probabilité de ruine (i.e. la probabilité pour que son capital arrive à 0 avant d'arriver à M. On suppose $1\leq k\leq M-1$. Exprimer q_k en fonction de q_{k-1} et de q_{k+1}.
2. On suppose $p=q=1/2$; calculer q_k pour tout $k\in[\![0,M]\!]$.
3. On suppose $p\neq q$. Trouver α tel que

$$q_{k+1}-q_k=\alpha(q_k-q_{k-1})$$

   et, en utilisant cette relation, calculer q_k pour tout $k\in[\![0,M]\!]$.
4. Retrouver ce résultat en résolvant l'équation caractéristique de la récurrence trouvée en 1.

On note X_1 le gain obtenu à la première partie : X_1 prend la valeur 1 avec probabilité p et la valeur -1 avec probabilité q. On conditionne par X_1, on obtient

$$q_k = pq_{k+1}+qq_{k-1}$$

Donc, si $p=q=1/2$,

$$q_k=\frac{1}{2}\left(q_{k+1}+q_{k-1}\right)$$

Mais $q_0 = 1$ et $q_M = 0$. Mais $q_{k+1} - q_k = q_k - q_{k-1}$. On en déduit assez facilement $q_k = 1 - k/M$ pour tout k.
Si $p \neq q$, on a

$$q_k - q_{k+1} = q(q_{k-1} - q_{k+1}) = q(q_{k-1} - q_k) + q(q_k - q_{k+1})$$

et donc

$$q_k - q_{k+1} = \frac{q}{p}(q_{k-1} - q_k)$$

D'où $q_k - q_{k+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^k (q_0 - q_1)$ pour $0 \leq k \leq M-1$. En ajoutant ces relations,

$$q_0 - q_M = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^M}{1 - \frac{p}{q}}(q_0 - q_1)$$

Donc

$$q_0 - q_1 = \frac{1 - \frac{p}{q}}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^M}$$

mais en ajoutant partiellement les relations $q_k - q_{k+1} = \left(\frac{p}{q}\right)^k (q_0 - q_1)$ de $k = 0$ à $k = j-1$ on obtient

$$q_0 - q_j = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^j}{1 - \frac{p}{q}}(q_0 - q_1) = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^j}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^M}$$

On en déduit q_j, car $q_0 = 1$.

Exercice 20 (Ruine du joueur, durée du jeu). On reprend les données de l'exercice précédent ; on note T_k le nombre de parties jouées (le capital de départ est k, on s'arrête lorsque le capital vaut 0 ou M).

1. Exprimer $P(T_k = t)$ en fonction de $P(T_{k+1} = t-1)$ et de $P(T_{k-1} = t-1)$ ($t \in \mathbf{N}_*$).
2. On admet que T_k est presque sûrement fini (pas difficile) et que T_k a une espérance, pour tout $k \in [\![0, M]\!]$. Exprimer $\mathrm{E}(T_k)$ à l'aide de $\mathrm{E}(T_{k-1})$ et $\mathrm{E}(T_{k+1})$ si $0 < k < M$.
3. Montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifie

$$\forall n \geq 1 \qquad u_n = pu_{n+1} + qu_{n-1} + 1$$

si et seulement si elle vérifie

$$\forall n \geq 1 \qquad u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} \ - \ 2$$

(on rappelle que $q = 1 - p$). En déduire une formule pour $\mathrm{E}(T_k)$, dans chacun des cas $p = q = 1/2$ et $p \neq 1/2$.

Exercice 21 (Pile ou Face : longueur des premières séquences).
On joue à Pile ou Face ; la probabilité d'obtenir Pile est p, celle d'obtenir Face est $1-p$. On appellera séquence une suite de tirages consécutifs identiques précédés et suivis de tirages différents. Voici deux issues :

$$PFFPPPFPFFF\ldots$$

$$FFFPFPPPFPFPPP\ldots$$

Dans la première issue, la première séquence est P, la seconde est FF. Dans la deuxième issue, la première séquence est FFF, la seconde est P.

1. Donner la loi de la longueur L_1 de la première séquence, son espérance et sa variance.

On note X_i la variable aléatoire égale à 1 si le ième lancer donne Pile, égale à 0 sinon. Comme d'habitude, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.

La variable aléatoire L_1 est à valeurs dans $\mathbf{N}_*$. Par probabilités totales, pour tout $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
P(L_1 = n) &= P(L_1 = n, X_1 = 0) + P(L_1 = n, X_1 = 1) \\
&= P(X_1 = 0, \ldots, X_n = 0, X_{n+1} = 1) + P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1, X_{n+1} = 0) \\
&= (1-p)^n p + p^n (1-p)
\end{aligned}$$

Ce qui donne, l'espérance étant manifestement finie,

$$\begin{aligned}
E(L_1) &= p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1} \ + \ p(1-p)\sum_{n=1}^{+\infty} np^{n-1} \\
&= p(1-p)\left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{(1-p)^2}\right) \\
&= \frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}
\end{aligned}$$

On est rassuré de voir que cette espérance est symétrique en p et $1-p$, qu'elle est minimale quand $p = 1/2$ (étudier les variations de $x + 1/x$ quand $x > 0$), qu'elle tend vers l'infini quand p tend vers 0 ou 1...

Maintenant,

$$\begin{aligned}
E\left(L_1(L_1-1)\right) &= p(1-p)^2\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)(1-p)^{n-2} \ + \ p^2(1-p)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)p^{n-2} \\
&= p(1-p)\left((1-p)\frac{2}{p^3}+p\frac{2}{(1-p)^3}\right) \\
&= 2\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right)
\end{aligned}$$

et donc, $V(L_1) = 2\left(\left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2\right)+\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}-\left(\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}\right)^2$
ou, en simplifiant un peu,

$$V(L_1) = \left(\frac{1-p}{p}\right)^2+\left(\frac{p}{1-p}\right)^2+\frac{1-p}{p}+\frac{p}{1-p}-2$$

---

2. Donner la loi de la longueur L_2 de la deuxième séquence, son espérance et sa variance.

Le plus simple est de calculer la loi conjointe de (L_1, L_2), i.e. de calculer

$$P(L_1 = n, L_2 = m)$$

pour tout couple $(n, m) \in \mathbf{N}_*^2$, puis d'utiiser les probabilités totales. On peut aussi utiliser le caractère sans mémoire de la loi géométrique.
Si on ne veut rien utiliser, on peut, par probabilités totales, la variable L_2 étant à valeurs dans $\mathbf{N}_*$, écrire

$$\begin{aligned}
P(L_2 = m) &= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = 0, L_1 = n, L_2 = m) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = 1, L_1 = n, L_2 = m) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = \ldots = X_n = 0, X_{n+1} = \ldots = X_{n+m} = 1, X_{n+m+1} = 0)+ \\
&\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} P(X_1 = 1, \ldots, X_n = 1, X_{n+1} = \ldots = X_{n+m} = 0, X_{n+m+1} = 1) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (1-p)^n p^m (1-p) + \sum_{n=1}^{+\infty} p^n (1-p)^m p \\
&= (1-p)^2 p^{m-1} + p^2(1-p)^{m-1}
\end{aligned}$$

Donc, facilement,

$$E(L_2) = 2$$

Surprenant ? nullement si $p = 1/2$ (il est clair que dans ce cas les lois de L_1 et de L_2 sont les mêmes). Si p est proche de 0 ou 1 : avec une probabilité forte, la première séquence est longue, et la deuxième courte. Et avec une probabilité faible, la première séquence est courte, la deuxième longue. On peut donc accepter que cela se compense en moyenne.
De

$$E\left(L_2(L_2-1)\right) = p(1-p)^2 \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)p^{m-2} + p^2(1-p) \sum_{m=2}^{+\infty} m(m-1)(1-p)^{m-2}$$

on déduit

$$\begin{aligned} V(L_2) &= p(1-p)^2 \frac{2}{(1-p)^3} + p^2(1-p)\frac{2}{p^3} + 2 - 4 \\ &= 2\left(\frac{p}{1-p} + \frac{1-p}{p} - 1\right) \end{aligned}$$

---

3. Montrer que $\mathbf{E}(L_1) \geq \mathbf{E}(L_2)$ et $\mathbf{V}(L_1) \geq \mathbf{V}(L_2)$.

Montrer que $V(L_1) \geq V(L_2)$ revient alors à montrer que, si $x > 0$,

$$\frac{1}{x^2} + x^2 \geq x + \frac{1}{x}$$

ou encore, en posant $y = x + 1/x$, que

$$y^2 - 2 \geq y$$

si $y \geq 2$, ce qui est vrai.

---

4. Calculer $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.

Par transfert, on calcule

$$\begin{aligned} E(L_1L_2) &= \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}_*^2} mnP(L_1 = n, L_2 = m) \\ &= \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}_*^2} mn\left(p^n(1-p)^m p + (1-p)^n p^m (1-p)\right) \\ &= \sum_{(n,m)\in\mathbf{N}_*^2} mn\left(p^{n+1}(1-p)^m + (1-p)^{n+1}p^m\right) \\ &= (1-p)\frac{1}{p^2}p^2\frac{1}{(1-p)^2} + p\frac{1}{(1-p)^2}(1-p)^2\frac{1}{p^2} \end{aligned}$$

(suites doubles produits de deux suites sommables...). Donc, après simplifications,

$$\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} - 2\left(\frac{1-p}{p} + \frac{p}{1-p}\right)$$

que l'on arrange un peu, pour vérifier :

$$\mathrm{Cov}(L_1, L_2) = \frac{1-2p}{1-p} + \frac{2p-1}{p} = -\frac{(1-2p)^2}{p(1-p)}$$

la covariance est nulle si $p = 1/2$, attendu car L_1 et L_2 sont intuitivement indépendantes dans ce cas. Elle est en général négative, ce qui est aussi assez intuitif (si la première séquence est particulièrement longue, c'est en général qu'elle est obtenue avec le côté de la pièce qui a le plus de chance de se montrer, la deuxième séquence aura tendance à être courte...).

---

5. Calculer $\lim\limits_{m\to+\infty} \mathbf{P}(L_2 = n | L_1 = m)$

Calculons enfin une probabilité conditionnelle :

$$\frac{P(L_2 = n, L_1 = m)}{P(L_1 = m)} = \frac{p^{m+1}(1-p)^n + (1-p)^{m+1}p^n}{p^m(1-p) + (1-p)^m p}$$

que l'on peut légèrement simplifier, et qui tend, quand m tend vers $+\infty$, vers $p(1-p)^{n-1}$ si $p > 1/2$, vers $(1-p)p^{n-1}$ si $p < 1/2$, les deux si $p = 1/2$...de nouveau, ce n'est par complètement contre-intuitif...

Exercice 22 (Le problème du collectionneur).
Un écolier collectionne des images. Il y a en tout n images différentes. L'écolier achète chaque jour une pochette ; chaque pochette contient une image, qui augmente sa collection d'une unité s'il ne la possédait pas déjà. On suppose bien sûr que lorsqu'on achète une pochette, la probabilité d'y trouver l'image i ($1 \leq i \leq n$) est $1/n$.

1. Supposons que la collection de l'écolier contienne déjà $k-1$ images ($2 \leq k \leq n$). On note L_k le nombre de pochettes que l'écolier va devoir acheter pour augmenter sa collection d'une unité (et ainsi posséder k images). Quelle est la loi de L_k ?
2. On note $T_n = L_1 + L_2 + \ldots + L_n$ le nombre total de pochettes que l'écolier va acheter pour avoir la collection complète (pour des raisons évidentes, L_1 désigne la variable aléatoire constante égale à 1). Calculer $\mathrm{E}(T_n)$. En donner un équivalent quand $n \to +\infty$.
3. Calculer $\mathrm{V}(T_n)$, en donner un équivalent. On rappelle $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

---

1. Les achats de pochettes sont supposés indépendants, et un achat est un succès avec la probabilité $\dfrac{n-k+1}{n}$. Donc L_k suit une loi géométrique $\mathcal{G}\left(\dfrac{n-k+1}{n}\right)$.
2. Et donc l'espérance est

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1}$$

Or

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n-k+1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{n}{j}$$

Un équivalent est donc $n \ \ln n$.
3. Les L_k sont considérés deux à deux indépendants. On a

$$V(L_1 + \cdots + L_n) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{n-k+1}{n}\right) \frac{n^2}{(n-k+1)^2} = n^2 \sigma_n - n H_n$$

où (σ_n) converge vers $\pi^2/6$. Un équivalent est donc $\dfrac{\pi^2}{6} n^2$.

V Autour de la loi géométrique

Exercice 23 (Somme de variables géométriques indépendantes).

1. Soit $p \in]0,1[$. On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_2 de même loi $\mathcal{G}(p)$. Décrire la loi de $X_1 + X_2$.

2. Soit $p \in]0,1[$. On considère trois variables aléatoires indépendantes X_1, X_2 et X_3 de même loi $\mathcal{G}(p)$. Décrire la loi de $X_1 + X_2 + X_3$.
3. (a) Montrer que, si $k \geq n$,

$$\sum_{j=n}^{k} \binom{j-1}{n-1} = \binom{k}{n}$$

(classer judicieusement les parties à n éléments de l'ensemble $[\![1,k]\!]$)

(b) Soit $p \in]0,1[$. On considère n variables aléatoires indépendantes X_i $(1 \leq i \leq n)$ de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. Montrer que, pour tout $k \geq n$,

$$P(S_n = k) = p^n(1-p)^{k-n}\binom{k-1}{n-1}$$

4. On joue à Pile ou Face ; on note T_k le numéro du k-ième tirage Pile. Déterminer la loi de T (loi binomiale négative). Combien vaut l'espérance de T ?

(*La loi géométrique donne le temps d'attente de la première occurence d'un événement ; la loi que l'on vient de trouver, dite « loi binomiale négative », donne le temps d'attente de la k-ième occurence de cet événement*).

Exercice 24 (**Comparaison de variables géométriques, fonctions de répartition, loi d'un max ou d'un min...**).

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (on notera $q = 1-p$). Calculer $\mathrm{P}(Y \geq X)$. Calculer aussi $\mathrm{P}(Y > X)$ et $\mathrm{P}(Y = X)$. Donner les résultats dans le cas particulier $p = 1/2$.
2. (a) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer, pour tout naturel non nul k,

$$\mathrm{P}\left(\max(X,Y) = k\right)$$

(b) On veut retrouver plus efficacement le résultat précédent. Calculer

$$\mathrm{P}\left(\max(X,Y) \leq k\right)$$

pour tout entier naturel non nul k. En déduire $\mathrm{P}\left(\max(X,Y) = k\right)$.

(c) En calculant

$$\mathrm{P}\left(\min(X,Y) \geq k\right)$$

pour tout entier naturel non nul k, identifier la loi de $\min(X,Y)$.

3. On suppose que $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et que, pour tout k, $U_k \sim \mathcal{G}(p_k)$. On note, pour tout k, $q_k = 1 - p_k$. Identifier la loi de
$$\min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$
4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Décrire la loi de
$$\max(X, Y) - \min(X, Y)$$
5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(p')$.
   (a) Calculer $\mathrm{P}(X < Y)$.
   (b) Identifier la loi conditionnelle de X sachant $X < Y$.
6. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $U = \min(X, Y)$ et $J = \mathbf{1}_{(X_1 < X_2)} - \mathbf{1}_{(X_1 > X_2)}$. On note enfin H l'événement
$$H = (X_1 \neq X_2)$$
Montrer que U et J sont indépendantes pour P_H

1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ (on notera $q = 1 - p$). Calculer $\mathrm{P}(Y \geq X)$. Calculer aussi $\mathrm{P}(Y > X)$ et $\mathrm{P}(Y = X)$. Donner les résultats dans le cas particulier $p = 1/2$.

On conditionne par les valeurs de X :

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y \geq X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq X, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq n, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y \geq n)\ \mathbf{P}(X = n) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} q^{n-1} p \\
&= \frac{p}{1 - q^2} \\
&= \frac{1}{1 + q}
\end{aligned}$$

Ce qui donne, pour $p = 1/2$, une probabilité de $2/3$. On pouvait aussi conditionner par les valeurs de Y, mais c'était un peu moins agréable à calculer (pour une loi géométrique, $\mathbf{P}(X \geq n)$ s'écrit un peu plus facilement que $\mathbf{P}(X \leq n)$).

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y > X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y > X, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y > n, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y > n)\ \mathbf{P}(X = n) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} q^n q^{n-1} p \\
&= \frac{pq}{1-q^2} \\
&= \frac{q}{1+q}
\end{aligned}$$

Pour $p = 1/2$, on trouve $1/3$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(Y = X) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = X, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(Y = n)\ \mathbf{P}(X = n) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} q^{n-1} q^{n-1} p^2 \\
&= \frac{p^2}{1-q^2} \\
&= \frac{p}{1+q}
\end{aligned}$$

Pour $p = 1/2$, on trouve $1/3$.
On pouvait faire plus rapidement le calcul :

$$\mathbf{P}(X < Y) + \mathbf{P}(X > Y) + \mathbf{P}(X = Y) = 1$$

d'où l'on tire

$$\mathbf{P}(X = Y) = 1 - 2\mathbf{P}(X < Y) = 1 - 2\frac{q}{1+q} = \frac{p}{1+q}$$

---

2. (a) Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Déterminer, pour tout naturel non nul k,

$$\mathrm{P}\left(\max(X, Y) = k\right)$$

Toujours la même chose. Commençons par supposer $k \geq 2$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max(X, Y) = k\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}\left(\max(X, Y) = k, X = n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} \mathbf{P}(Y = k, X = n) \ + \ \mathbf{P}(X = k, Y \leq k) \\
&= \sum_{n=1}^{k-1} q^{k-1} q^{n-1} p^2 \ + \ q^{k-1} p (1 - q^k) \\
&= p^2 q^{k-1} \frac{1 - q^{k-1}}{1 - q} \ + \ q^{k-1} p (1 - q^k) \\
&= p q^{k-1} \left(1 - q^{k-1} + 1 - q^k\right) \\
&= p q^{k-1} \left(2 - q^{k-1}(1 + q)\right)
\end{aligned}$$

formule qui marche encore pour $k = 1$, comme on le vérifie facilement.

(b) On veut retrouver plus efficacement le résultat précédent. Calculer

$$\mathrm{P}\left(\max(X, Y) \leq k\right)$$

pour tout entier naturel non nul k. En déduire $\mathrm{P}\left(\max(X, Y) = k\right)$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max(X, Y) \leq k\right) &= \mathbf{P}(X \leq k, Y \leq k) \\
&= (1 - q^k)^2
\end{aligned}$$

Et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max(X, Y) = k\right) &= \mathbf{P}\left(\max(X, Y) \leq k\right) - \mathbf{P}\left(\max(X, Y) \leq k - 1\right) \\
&= (1 - q^k)^2 - (1 - q^{k-1})^2 \\
&= q^{k-1} \left(-2q + q^{k+1} + 2 - q^{k-1}\right) \\
&= p q^{k-1} \left(2 - q^{k-1}(1 + q)\right)
\end{aligned}$$

(c) En calculant

$$\mathrm{P}\left(\min(X,Y) \geq k\right)$$

pour tout entier naturel non nul k, identifier la loi de $\min(X,Y)$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\min(X,Y) \geq k\right) &= \mathbf{P}(X \geq k, Y \geq k) \\ &= q^{2k-2}\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\left(\min(X,Y) = k\right) &= \mathbf{P}\left(\min(X,Y) \geq k\right) - \mathbf{P}\left(\min(X,Y) \geq k+1\right) \\ &= q^{2k-2} - q^{2k} \\ &= q^{2k-2}(1-q^2)\end{aligned}$$

On reconnaît une loi géométrique de paramètre $1-q^2$.

---

3. On suppose que $U_1, U_2, \ldots, U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et que, pour tout k, $U_k \sim \mathcal{G}(p_k)$. On note, pour tout k, $q_k = 1-p_k$. Identifier la loi de

$$\min(U_1, U_2, \ldots, U_n)$$

On refait les mêmes calculs que ci-dessus, on trouve successivement, pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbf{P}\left(\min(U_1, U_2, \ldots, U_n) \geq k\right) = (q_1 \ldots q_n)^{k-1}$$

$$\mathbf{P}\left(\min(U_1, U_2, \ldots, U_n) = k\right) = (q_1 \ldots q_n)^{k-1}(1 - q_1 \ldots q_n)$$

On obtient donc une loi $\mathcal{G}(q_1 \ldots q_n)$.

---

4. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. Décrire la loi de

$$\max(X,Y) - \min(X,Y)$$

C'est la variable aléatoire $|X-Y|$, à valeurs dans $\mathbf{N}$. On a déjà calculé plus haut :

$$\mathbf{P}\left(\max(X,Y) - \min(X,Y) = 0\right) = \mathbf{P}(X=Y) = \frac{p}{1+q}$$

Et, si $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(\max(X,Y) - \min(X,Y) = k\right) &= \mathbf{P}(|Y - X| = k) \\
&= \mathbf{P}(Y - X = k) + \mathbf{P}(X - Y = k) \\
&= 2\mathbf{P}(Y - X = k) \\
&= 2\sum_{j=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = j, Y = j + k) \\
&= 2p^2 \sum_{j=1}^{+\infty} q^{j-1} q^{j+k-1} \\
&= 2p \frac{q^k}{1+q}
\end{aligned}$$

5. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(p')$.

   (a) Calculer $\mathrm{P}(X < Y)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X < Y) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X < Y, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(n < Y, X = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\ \mathbf{P}(Y > n) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} q'^n q^{n-1} p \\
&= \frac{pq'}{1 - qq'}
\end{aligned}$$

   (b) Identifier la loi conditionnelle de X sachant $X < Y$.

Cette loi conditionnelle est caractérisée par, pour tout entier naturel non nul k,

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_{X<Y}(X=k) &= \frac{\mathbf{P}(X=k, X<Y)}{\mathbf{P}(X<Y)} \\
&= \frac{1-qq'}{pq'}\mathbf{P}(X=k, Y>k) \\
&= \frac{1-qq'}{pq'}pq^{k-1}q'^k \\
&= (1-qq')(qq')^{k-1}
\end{aligned}$$

...encore une loi géométrique, de paramètre $1-qq' = p+p'-pp'$.

---

6. Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $U = \min(X_1, X_2)$ et $J = \mathbf{1}_{(X_1<X_2)} - \mathbf{1}_{(X_1>X_2)}$. On note enfin H l'événement
$$H = (X_1 \neq X_2)$$
Montrer que U et J sont indépendantes pour P_H

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_H(U=k) &= \frac{\mathbf{P}(U=k, X_1 \neq X_2)}{\mathbf{P}(X_1 \neq X_2)} \\
&= \frac{2\mathbf{P}(X_1=k, X_2>k)}{1-\mathbf{P}(X_1=X_2)} \\
&= 2\frac{pq^{k-1}q^k}{1-\dfrac{p}{1+q}} \\
&= (1+q)pq^{2k-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_H(J=1) &= \frac{\mathbf{P}(J=1, X_1 \neq X_2)}{\mathbf{P}(X_1 \neq X_2)} \\
&= \frac{\mathbf{P}(X_1 < X_2)}{\mathbf{P}(X_1 \neq X_2)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à vérifier que

$$\mathbf{P}_H(J=\epsilon, U=k) = \mathbf{P}_H(J=\epsilon)\mathbf{P}_H(U=k)$$

ce qui se fait bien.

Exercice 25 (Une formule importante pour l'espérance ; espérance d'un maximum).

1. Soit U une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$.
   (a) Montrer que U a une espérance si et seulement si la famille $(\mathrm{P}(U \geq j))_{j\geq 1}$ est sommable, et que
   $$\mathrm{E}(U) = \sum_{j=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U \geq j)$$
   (b) Trouver une formule reliant $\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathrm{P}(U \geq j)$ à $\mathrm{E}(U)$ et $\mathrm{E}(U^2)$.
2. On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et de même loi, à valeurs dans $\mathbf{N}$. On pose, pour tout $k \geq 0$,
   $$F_k = \mathrm{P}(X_1 \leq k)$$
   En notant $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, exprimer $\mathrm{P}(M_n \leq k)$ à l'aide de F_k.
3. On reprend les hypothèses de la question précédente, la loi commune aux X_i étant une loi $\mathcal{G}(p)$. Exprimer $\mathrm{E}(M_n)$ sous forme d'une somme finie. Calculer $\mathrm{E}(M_3)$ dans le cas $p = 1/2$.

1.(a) La σ-additivité montre que, pour tout $j \geq 1$,
$$\mathrm{P}(U \geq j) = \sum_{k=j}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k)$$
(il est naturel de faire intervenir les $\mathrm{P}(U = k)$ vu la formule de définition de l'espérance d'une variable à valeurs entières). On doit donc étudier
$$\sum_{j\geq 1} \left(\sum_{k=j}^{+\infty} \mathrm{P}(U = k) \right)$$
ce qui conduit naturellement, pour pouvoir utiliser la théorie de la sommabilité des suites doubles, à introduire la suite double $(\alpha_{j,k})_{(j,k)\in\mathbf{N}}$ définie par
$$\alpha_{j,k} = \mathrm{P}(U = k) \quad \text{si } 1 \leq j \leq k, \qquad \alpha_{j,k} = 0 \quad \text{sinon}$$
C'est une suite double de réels **positifs**. On peut donc directement lui appliquer les résultats sur la sommabilité « par paquets » sans avoir à mettre des valeurs absolues.
Remarquons que (*paquets à j fixé*), pour tout $j \in \mathbf{N}$, la série $\sum_{k\geq 0} \alpha_{j,k}$ converge, et sa somme vaut $\sigma_j = 0$ si $j = 0$, $\sigma_j = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_{j,k} = \sum_{k=j}^{+\infty} \alpha_{j,k} = \mathrm{P}(U \geq j)$ sinon.

Remarquons d'autre part (*paquets à k fixé*) que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0}\alpha_{j,k}$ converge. Et sa somme vaut $s_k = 0$ si $k=0$, $s_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\alpha_{j,k} = \sum_{j=1}^{k}\alpha_{j,k} =$ $k\mathrm{P}(U=k)$ sinon.
Par théorème de sommabilité et sommation par paquets, les trois énoncés suivants sont équivalents :
(i) La famille $(\alpha_{j,k})_{(j,k)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable.
(ii) La série $\sum_j \sigma_j$ converge.
(iii) La série $\sum_k s_k$ converge.
Et le cas échéant (*C'est la façon snob classique de dire « si c'est le cas ». Vérifier que vous savez bien conjuguer le verbe échoir à tous les temps, tous les modes. Indication : c'est la même chose que choir),* $\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\sigma_j = \sum_{k=0}^{+\infty}s_k$ (la valeur commune est la somme de la suite double : $\displaystyle\sum_{(j,k)\in\mathbf{N}^2}\alpha_{i,j}$). Or l'énoncé (iii) est par définition de l'espérance équivalent à « U a une espérance ». Quand U a une espérance, on a donc bien $\displaystyle\sum_{j\geq 1}\mathrm{P}(U\geq j)$ convergente, et $\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\mathrm{P}(U\geq j) = \mathrm{E}(U)$. Dans le cas contraire, ces deux choses sont aussi égales, à condition de leur attribuer la valeur $+\infty$.
C'est une question classique et importante, qui demande de bien maîtriser les bases de la sommabilité. Bien entendu, si on rencontre dans un problème la formulation « on suppose que U est d'espérance finie, montrer que $\sum_j P(U\geq j)$ converge et que sa somme vaut $E(U)$, c'est un peu plus facile à rédiger. Le faire est un très bon entraînement. Notons enfin que cette formule a été admise à l'écrit math 2 des Mines 2015. On peut considérer que la démonstration n'en est pas évidente.

(b) Pourquoi ne pas refaire la même chose ? en s'intéressant cette fois à la suite double $(j\alpha_{j,k})_{(j,k)\in\mathbf{N}^2}$. De nouveau, pour tout $j\in\mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 0}j\alpha_{j,k}$ converge, et sa somme vaut $\sigma_j = 0$ si $j=0$, $\sigma_j = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}j\alpha_{j,k} = \sum_{k=j}^{+\infty}j\alpha_{j,k} = j\mathrm{P}(U\geq j)$ sinon.
Et aussi, pour tout $k\in\mathbf{N}$, la série $\displaystyle\sum_{j\geq 0}j\alpha_{j,k}$ converge. Et sa somme vaut $s_k = 0$ si $k=0$, $s_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}j\alpha_{j,k} = \sum_{j=1}^{k}j\alpha_{j,k} = \frac{k(k+1)}{2}\mathrm{P}(U=k)$ sinon.
Les mêmes arguments de sommabilité et sommation par paquets qu'en (a) (on a encore une famille positive) montrent que $\displaystyle\sum_j j\mathrm{P}(U\geq j)$ converge si et seulement si $\displaystyle\sum_k \frac{k(k+1)}{2}\mathrm{P}(U=k)$ converge, donc si et seulement si $\displaystyle\sum_k k^2\mathrm{P}(U=k)$

converge, donc si et seulement si U a un moment d'ordre 2. Et le cas échéant,

$$\sum_{j=1}^{+\infty} j\mathrm{P}(U \geq j) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{E}(U^2) + \mathrm{E}(U)\big)$$

(formule de transfert).
2.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M_n \leq k) &= \mathrm{P}(X_1 \leq k, \ldots, X_n \leq k) \\
&= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \leq k) \qquad \text{(indépendance)} \\
&= F_k^n
\end{aligned}$$

3. Et donc, pour tout $j \geq 1$

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(M_n \geq j) &= 1 - \mathrm{P}(M_n \leq j-1) \\
&= 1 - \big(\mathrm{P}(X_1 \leq j-1)\big)^n \\
&= 1 - \big(1 - \mathrm{P}(X_1 \geq j)\big)^n \\
&= 1 - (1-(1-p)^{j-1})^n \\
&= 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (1-p)^{k(j-1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (1-p)^{k(j-1)}
\end{aligned}$$

Et la formule donne alors (la convergence des séries écrites ci-dessous ne pose pas de problème : ce sont des séries géométriques de raison dans $]-1, 1[$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(M_n) &= \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} (1-p)^{k(j-1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k+1} \left(\sum_{j=1}^{+\infty} (1-p)^{k(j-1)} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^{k+1}}{1-(1-p)^k}
\end{aligned}$$

Exercice 26 (Quelques calculs d'espérance).

1. Si $X \sim \mathcal{G}(p)$ $(0 < p < 1)$, calculer $\mathrm{E}\left(\dfrac{1}{X}\right)$
2. Si X et Y sont indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$, montrer que $|X-Y|$ et $\min(X,Y)$ sont indépendantes.
3. Si X et Y sont indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$, calculer
$$\mathrm{E}\left(\frac{|X-Y|}{\min(X,Y)}\right)$$

---

1. On applique le théorème de transfert :
$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left(\frac{1}{X}\right) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(1-p)^{n-1}p \\ &= \frac{p}{1-p}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(1-p)^n}{n} \\ &= -\frac{p}{1-p}\ln(p)\end{aligned}$$
2. Plutôt que calculer les lois séparément, calculons la loi conjointe : si $(m,n) \in \mathbf{N}_* \times \mathbf{N}_*$,
$$\begin{aligned}P\left(|X-Y| = m, \min(X,Y) = n\right) &= P(X=n, Y=n+m) + P(Y=n, X=n+m) \\ &= 2p^2(1-p)^{2n+m-2}\end{aligned}$$
et
$$P\left(|X-Y| = 0, \min(X,Y) = n\right) = P(X=n, Y=n) = p^2(1-p)^{2n-2}$$
D'où l'on tire les lois marginales :
$$\begin{aligned}P(\min(X,Y) = n) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(\min(X,Y)=n, |X-Y|=m) \\ &= p^2(1-p)^{2n-2} + 2p^2(1-p)^{2n-1} \times \frac{1}{p} \\ &= p(1-p)^{2n-2}(p + 2(1-p))\end{aligned}$$
Or $1-(1-p)^2 = 2p - p^2$, on retrouve bien que $\min(X,Y)$ suit une loi $\mathcal{G}(1-(1-p)^2)$. Maintenant, la loi de $|X-Y|$:
$$P(|X-Y|=0) = \sum_{n=1}^{+\infty} p^2(1-p)^{2n-2} = \frac{p^2}{1-(1-p)^2}$$
et, si $m \in \mathbf{N}_*$,
$$P(|X-Y|=m) = \frac{2p^2(1-p)^m}{1-(1-p)^2}$$
On vérifie l'indépendance, ce qui permet sans difficulté le calcul de l'espérance cherchée.

VI Divers

Exercice 27 (Tribus (oral X)).
Soit Ω un ensemble et $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$. On dit que S est un δ-système si
i) $\Omega \in S$, **ii)** $A, B \in S$ et $A \subset B \implies B \setminus A \in S$
iii) $(A_n) \in S^{\mathbf{N}}$ et (A_n) croissante pour l'inclusion $\Longrightarrow \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in S$.

Une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$ est un π-système si on remplace la troisième propriété par la stabilité par intersection finie.

1. Montrer qu'un δ-système est stable par passage au complémentaire.
2. Montrer qu'une intersection de δ-systèmes est encore un δ-système.
3. Soit $S \subset \mathcal{P}(\Omega)$. Montrer que S est une tribu si et seulement si S est un δ-système et un π-système. Une intersection de tribus est donc une tribu.
4. Soient S un δ-système et $C \subset S$ un π-système. Si A est une partie de $\mathcal{P}(\Omega)$, on note $\sigma(A)$ la tribu et $\delta(A)$ le δ-système engendré par A. Montrer que $\delta(C) \subset S$ puis que $\delta(C) = \sigma(C)$.

---

1. Conséquence de **i)** et **ii)**.
2. On considère $S = \displaystyle\bigcup_{i \in I} S_i$ où les S_i sont des δ-systèmes. On montre facilement que S est un δ-système, il suffit pour chaque propriété de remarquer que
$$X \in S \iff \forall i \in I \quad X \in S_i$$
3. Les propriétés d'une tribu montrent qu'assez facilement, toute tribu est un δ-système et un π-système. Soit réciproquement S un « δ et π »-système. Soit $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de S. On aimerait montrer que $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \in S$. Pour cela on considère $A'_n = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} A_k$, alors $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} A'_n$ et la deuxième a l'avantage d'être croissante. Les A'_n sont dans S car S est stable par intersection finie et passage au complémentaire, donc par réunion finie (question intéressante, car elle remet en jeu des choses vues pour les réunions croissantes au moment de la « continuité croissante »).

4. $\delta(C)$ est (définition non donnée mais « évidente ») l'intersection de tous les δ-systèmes qui contiennent C, or S en est un, donc $\delta(C) \subset S$. Comme $\sigma(C)$ est une tribu donc un δ-système, on a $\delta(C) \subset \sigma(C)$. Montrer que

$\delta(C) = \sigma(C)$ revient alors à montrer que $\delta(C)$ est une tribu. Et comme c'est déjà un δ-système, cela revient à montrer que c'est un π-système. On doit montrer que si A et B sont dans $\delta(C)$, alors $A \cap B \in \delta(C)$. Commençons par montrer que si $A \in C$ et $B \in \delta(C)$, alors $A \cap B \in \delta(C)$. L'idée est de considérer $\{B \in \mathcal{P}(\Omega)\ ;\ A \cap B \in \delta(C)\}$. Cet ensemble de parties de Ω contient C car C est un π-système. Et on montre assez facilement que c'est un δ-système (un peu de manipulation des opérations ensemblistes). Donc il contient $\delta(C)$. Et donc

$$\forall A \in C \qquad \forall B \in \delta(C) \quad A \cap B \in \delta(C)$$

Mais alors, si $A \in \delta(C)$, on considère $\{B \in \mathcal{P}(\Omega)\ ;\ A \cap B \in \delta(C)\}$. Cet ensemble de parties de Ω contient C par la première manipulation. Et on montre assez facilement que c'est un δ-système (un peu de manipulation des opérations ensemblistes). Donc il contient $\delta(C)$.

Exercice 28 (**Quelques calculs sur les moments).** Soit U et V deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbf{Z}$. On suppose que U et V admettent des moments d'ordre 2, et que U est centrée. On définit $X = (-1)^V U$.

1. Montrer que X a une espérance, la calculer.
2. Montrer que XV a une espérance, la calculer.
3. Calculer la covariance de X et V.
4. X^2 et V^2 sont-elles indépendantes ?

On suppose dorénavant que U a une loi symétrique (U et $-U$ ont même loi) et que $\mathrm{P}(U = 0) = 0$. On note f et g deux fonctions réelles bornées sur $\mathbf{Z}$.

5. Montrer que $f(X)\ g(V)$ a une espérance.
6. Montrer que cette espérance est nulle si f est impaire, et vaut $\mathrm{E}\left(f(U)\right)\ \mathrm{E}\left(g(V)\right)$ si f est paire.
7. Montrer que
$$\mathrm{E}\left(f(X)\ g(V)\right) = \mathrm{E}\left(f(U)\right)\ \mathrm{E}\left(g(V)\right)$$
8. Peut-on en conclure que X et V sont indépendantes ?

---

1. $|X| = |U|$. Or U a un moment d'ordre 2, elle est donc d'espérance finie. Et donc X aussi. D'autre part, $(-1)^V$ et U sont indépendantes car U et V le sont. Donc

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}((-1)^V)\ \mathbf{E}(U) = 0$$

2. Comme $X^2 = U^2$, X a un moment d'ordre 2. Et V aussi, donc XV a une espérance (cours). Comme $(-1)^V V$ et U sont indépendantes,

$$\mathbf{E}(XV) = \mathbf{E}((-1)^V V\ U) = \mathbf{E}((-1)^V V)\mathbf{E}(U) = 0$$

3. Il en découle facilement que XV est de covariance nulle, d'après la formule $\mathrm{Cov}(X,V) = \mathbf{E}(XV) - \mathbf{E}(X)\ \mathbf{E}(V)$.
4. $X^2 = U^2$, donc par indépendance de U et V, X^2 et V^2 sont indépendantes.
5. $f(X)g(V)$ est une variable aléatoire bornée, donc a une espérance.
6. Si f est impaire, $f(X) = (-1)^V f(U)$. Or U a même loi que $-U$, donc $f(U)$ a même loi que $f(-U) = -f(U)$. Donc $f(U)$ et $-f(U)$ ont à la fois même espérance et des espérances opposées. Donc $\mathbf{E}(f(U)) = 0$. Et donc $\mathbf{E}(f(X)g(V)) = \mathbf{E}(f(U))\mathbf{E}((-1)^V g(V) = 0$. Pour le cas pair, c'est seulement l'indépendance de $f((-1)^V U) = f(U)$ et $g(V)$ qu'on utilise.
7. On écrit f comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire, qui sont bornées par les formules habituelles. Et on utilise la question précédente.
8. Oui, car $\mathbf{E}(f(X)) = \mathbf{E}(f(U))$ pour f paire et pour f impaire, donc dans tous les cas (écrire une fonction quelconque comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire). Puis on applique la relation

$$\mathrm{E}\left(f(X)\ g(V)\right) = \mathrm{E}\left(f(U)\right)\ \mathrm{E}\left(g(V)\right)$$

à f et g fonctions caractéristiques de parties de $\mathbf{Z}$.

Exercice 29 (Loi ζ ; un exemple d'espérance conditionnelle).
On rappelle la définition de la fonction ζ de Riemann :
Si $s > 1$, $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
On note s un réel > 1. Soit X une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ à valeurs dans $\mathbf{N}_*$ suivant une loi ζ :

$$\forall n \geq 1 \qquad \mathrm{P}(n) = \frac{1}{\zeta(s)} \frac{1}{n^s}$$

Soit Y une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$. On suppose que, pour tout $n \geq 1$, la loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

1. On note $Z = Y/X$.
   (a) Soit p, q deux entiers naturels non nuls tels que $p \wedge q = 1$. Calculer $\mathrm{P}\left(\dfrac{Y}{X} = \dfrac{p}{q}\right)$.
   (b) On note ϕ l'indicatrice d'Euler ; démontrer que

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \frac{\phi(q)}{q^{s+1}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)}$$

(c) On note F la fonction de répartition de Z :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad F(x) = \mathrm{P}(Z \leq x)$$

Montrer que F est strictement croissante sur $[0, 1]$.

(d) Z a-t-elle une espérance ? un moment d'ordre k ($k > 1$) ?

(e) Pour tout $n \geq 1$, on note $\mathrm{E}(Z\,|X = n)$ l'espérance conditionnelle de Z sachant $X = n$, c'est-à-dire l'espérance de Z pour $P_{(X=n)}$. Calculer, pour tout $n \geq 1$, $\mathrm{E}(Z\,|X = n)$

(f) On définit l'espérance conditionnelle de Z sachant X :

$$\mathrm{E}_X(Z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{E}(Z\,|X = n)\mathbf{1}_{(X=n)}$$

On remarquera que c'est une variable aléatoire ! Montrer que

$$\mathrm{E}\left(\mathrm{E}_X(Z)\right) = \mathrm{E}(Z)$$

et calculer $\mathrm{E}(Z)$.

2. On note ν_p la valuation p-adique (si p est un nombre premier). Identifier la loi de la variable aléatoire $1 + \nu_p(X)$ (question indépendante des précédentes). Montrer que les $1 + \nu_p(X)$ ($p \in \mathcal{P}$, $\mathcal{P}$ étant l'ensemble des nombres premiers) sont indépendantes.

3. Montrer que si X et X' sont deux variables indépendantes de lois ζ de paramètres respectifs s et t. Montrer que $X \wedge X'$ suit une loi ζ de paramètre $s + t$.

Exercice 30 (Une urne de Polya (un exemple de martingale)). Une urne (opaque) contient une boule blanche et une boule noire. On répète l'opération suivante : on tire une boule dans l'urne. Si elle est blanche (resp. noire), on la remet dans l'urne et on rajoute une boule blanche (resp. noire). Les énoncés classiques disent que l'on dispose d'une réserve inépuisable de boules blanches et noires. Ils oublient de dire que l'on a tout son temps, et que l'urne est très, très grande. On note X_n ($n \geq 1$) la proportion de boules blanches après $n - 1$ tirages. X_1 est donc la variable aléatoire constante $1/2$. X_n est à valeurs dans $\left\{\dfrac{1}{n+1}, \ldots, \dfrac{n}{n+1}\right\}$, car après $n - 1$ tirages il y a $2 + (n - 1) = n + 1$ boules dans l'urne, dont au moins une boule noire et une boule blanche.

1. Décrire la loi de X_2 et la loi de X_3.
2. Décrire la loi de X_n ($n \geq 2$).
3. Décrire la loi de X_{n+1} sachant ($X_n = \dfrac{k}{n+1}$) ($n \geq 2$, $1 \leq k \leq n - 1$).

4. Si X et Y sont deux variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, qui admettent un moment d'ordre 2, on pose $X(\Omega) = \{x_k\}_{k\in\mathbf{N}}$. Si $\mathrm{P}(x_k) \neq 0$, on définit $\mathrm{E}_{X=x_k}(Y)$ l'espérance de Y considérée comme variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P}_{(X=x_k)})$. Si $\mathrm{P}(x_k) = 0$, on définit $\mathrm{E}_{X=x_k}(Y) = 0$. On définit enfin l'espérance conditionnelle de Y sachant X :

$$\mathrm{E}_X(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{E}_{X=x_k}(Y)\ \mathbf{1}_{X=x_k}$$

Montrer que

$$\mathrm{E}\left(X\ \mathrm{E}_X(Y)\right) = \mathrm{E}(XY)$$

5. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathrm{E}_{X_n}(X_{n+1}) = X_n$$

6. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, pour tout $m > n$,

$$\mathrm{E}\left[(X_m - X_n)^2\right] = \mathrm{E}(X_m^2) - \mathrm{E}(X_n^2)$$

7. En déduire que la suite $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge presque sûrement.

Vers quoi ? vers une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, *donc une v.a. non discrète. . .*