Sommabilité avec quelques corrigés

Exercice 1. L'ensemble des nombres complexes de module 1 est-il dénombrable ? l'ensemble des racines de l'unité (i.e. l'ensemble des z dans $\mathbf{C}$ tels qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $z^n = 1$) l'est-il ?

L'ensemble des nombres complexes de module 1 distincts de -1 est en bijection avec $]-\pi, \pi[$, donc avec $\mathbf{R}$, donc n'est pas dénombrable. L'ensemble des racines de l'unité, réunion dénombrable d'ensembles finis, est fini ou dénombrable, et n'est pas fini, donc est dénombrable.

Exercice 2. On dit qu'un nombre complexe est algébrique lorsqu'il est racine d'un polynôme non nul à coefficients entiers. Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
Il y a donc beaucoup de nombres transcendants.

Soit $A_{n,p}$ l'ensemble des racines des polynômes non nuls de degré $\leq n$ dont les coefficients sont des entiers compris entre $-p$ et p. $A_{n,p}$ est fini (on a un nombre fini de polynômes, chacun ayant un nombre fini de racines). Or l'ensemble des nombres complexes algébriques est

$$\bigcup_{(n,p)\in\mathbf{N}^2} A_{n,p}$$

et donc, réunion dénombrable d'ensembles finis, est fini ou dénombrable. Comme il n'est pas fini du tout...

Exercice 3. On suppose qu'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E admet une base $(e_i)_{n\in\mathbf{N}}$ dénombrable. Montrer que toute base de E est dénombrable.

Soit $(f_j)_{j\in J}$ une base de E. Pour tout $k\in\mathbf{N}$, il y a une partie finie J_k de I telle que $e_k \in \operatorname{Vect}(f_j)_{j\in J_k}$. Notons $I = \bigcup_{k=0}^{+\infty} J_k$. La famille $(f_j)_{j\in I}$ engendre E. Et donc $I = J$. Or I est dénombrable.

Exercice 4. Soit E un $\mathbf{C}$-espace vectoriel admettant une base dénombrable. On suppose que E est un corps. Montrer que $E = \mathbf{C}$.

Supposons $\alpha \in E \setminus \mathbf{C}$. Alors la famille $(\alpha^n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E est libre (sinon α serait racine d'un polynôme non nul P à coefficients complexes. Mais P a dans le corps E au plus autant de racines, comptées avec leur multiplicité, que son degré, or il en a ce nombre dans $\mathbf{C}$, il n'a donc que des racines complexes). On peut alors injecter $\mathbf{C}[X]$ dans E : $P \mapsto P(\alpha)$ est injectif. L'idée est alors que l'on peut « carrément » injecter $\mathbf{C}(X)$ dans E : si on considère F une fraction rationnelle, $F(\alpha)$ est bien défini (vu que α n'est racine d'aucun polynôme non nul à coefficients complexes), et $F(\alpha) = 0 \;\Leftrightarrow\; F = 0$ (même raison). Si on montre que $\mathbf{C}(X)$ contient une famille libre non dénombrable, on conclut en utilisant le même genre d'argument que dans l'exercice précédent. Mais le théorème d'unicité dans la décomposition en éléments simples dit que la famille

$$\left(\frac{1}{(X-\alpha)^k}\right)_{(\alpha,k)\in\mathbf{C}\times\mathbf{N}_*}$$

est libre dans $\mathbf{C}(X)$, ce qui conclut.
Remarque : le théorème de décomposition en éléments simples montre que la famille ci-dessus, si on lui adjoint la base canonique de $\mathbf{C}[X]$, forme une base de $\mathbf{C}(X)$.

Exercice 5. Les ensembles $\mathcal{P}(\mathbf{N})$, $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ sont-ils dénombrables ?

L'ensemble des parties d'un ensemble ne peut pas être en bijection avec cet ensemble. Soit X un ensemble, supposons qu'il existe

$$f \;:\; X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

bijective. L'astuce habituelle est de considérer

$$A = \{x \in X \ ; \ x \notin f(x)\}$$

et de remarquer que, si $A = f(a)$, les deux hypothèses $a \in A$ et $a \notin A$ aboutissent toutes les deux à une contradiction. Ici, on peut trouver une méthode moins ésotérique, mais qui demande quelques idées et connaissances. L'application qui à une partie de $\mathbf{N}$ associe sa fonction indicatrice est une bijection de $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ sur $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ (ensemble des applications de $\mathbf{N}$ dans $\{0,1\}$), donc $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ est en bijection avec l'ensemble des suites de 0 et de 1. Or on montre que chaque élément de $[0,1[$ a un développement binaire (voir développements décimaux, compléments sur les séries). Ce développement n'est pas tout-à-fait unique (par exemple, $0,00111\overline{1}\ldots$ (tous les chiffres égaux à 1 à partir du rang 3) est égal à $0,01$). Mais qu'importe, il y a une surjection de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ sur $[0,1[$, or ce dernier est notoirement non dénombrable. On peut aussi reprendre le procédé diagonal de Cantor : si $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$ est dénombrable, on peut écrire

$$\{0,1\}^{\mathbf{N}} = \{s_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$$

Chaque s_n est une suite, mais pour plus de clarté on n'utilisera pas la notation indexée : on notera $s_n(0)$, $s_n(1)$, etc...les termes de la suite s_n. On considère alors la suite r telle que

$$r(k) = 1 - s_k(k)$$

pour tout $k \in \mathbf{N}$. La suite r est une suite de 0 et de 1, mais n'est aucun des s_n, contradiction.
Pour $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$, c'est encore pire. Et on peut là aussi reprendre le procédé de Cantor : on suppose que

$$\mathbf{N}^{\mathbf{N}} = \{s_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$$

et on définit $r(k) = 0$ (par exemple) si $s_k(k) \neq 0$, $r(k) = 1$ (par exemple) si $s_k(k) = 0$ (le procédé de Cantor est plus « rigide », donc en quelque sorte plus simple, dans le cas de $\{0,1\}^{\mathbf{N}}$).

Exercice 6. L'ensemble des suites d'entiers naturels nulles à partir d'un certain rang est-il dénombrable ?

L'ensemble des suites d'entiers naturels nulles à partir du rang n est dénombrable, car en bijection avec $\mathbf{N}^n$. Et une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables l'est. Donc oui.

Exercice 7 (Ulm 2016)**.** L'ensemble des bijections de $\mathbf{N}$ dans lui-même est-il dénombrable ?

Ce n'est pas complètement évident, mais l'oral Ulm l'est rarement. On abandonne me semble-t-il assez vite l'idée d'indexer les bijections de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, on cherche plutôt à montrer que l'ensemble des bijections de $\mathbf{N}$ dans lui-même n'est pas dénombrable. Et on va encore essayer de s'inspirer du procédé diagonal de Cantor. On suppose que l'ensemble des bijections de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ est $\{f_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$. On peut alors essayer de créer une bijection ϕ de $\mathbf{N}$ dans lui-même qui ne soit aucune des f_n. Utilisons un procédé du type diagonal de Cantor : on peut définir $\phi(0) \in \mathbf{N} \setminus \{f_0(0)\}$, $\phi(1) \in \mathbf{N} \setminus \{f_1(1), \phi(0)\}$, $\phi(2) \in \mathbf{N} \setminus \{f_2(2), \phi(0), \phi(1)\}$, etc...Mais, même si n'importe quelle construction comme celle-ci assure facilement l'injectivité de ϕ et le fait qu'elle soit différente de toutes les f_n, il n'est pas aisé de l'affiner pour assurer qu'elle soit surjective. On peut alors utiliser l'astuce suivante : construire ϕ sur les nombres pairs de façon à ce qu'elle soit injective et différente de toutes les f_n, en imposant de plus qu'elle soit à valeurs dans l'ensemble des nombres pairs. Il sera alors très facile de définir ϕ sur les impairs, pour qu'elle soit finalement bijective.
Pour cela, définissons $\mathbf{P}$ l'ensemble des nombres naturels pairs. On définit $\phi(0) \in \mathbf{P} \setminus \{f_0(0)\}$, puis $\phi(2) \in \mathbf{P} \setminus \{\phi(0), f_1(2)\}$, puis $\phi(4) \in \mathbf{P} \setminus \{\phi(0), \phi(2), f_2(4)\}$, etc...la construction rigoureuse étant assurée par récurrence :

$$\phi(2(k+1)) \in \mathbf{P} \setminus \{\phi(0), \ldots, \phi(2k), f_{k+1}(2(k+1)\}$$

On définit ainsi une application injective sur $\mathbf{P}$, et différente de toutes les restrictions des f_n à P. L'ensemble $\mathbf{N} \setminus \phi(\mathbf{P})$ est dénombrable (non fini) on peut définir une bijection de l'ensemble des nombres impairs sur $\mathbf{N} \setminus \phi(\mathbf{P})$, complétant ainsi ϕ en une bijection de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ qui n'est aucune des f_n.

Il y a beaucoup d'autres manières de faire cet exercice...

Exercice 8. Montrer qu'un ensemble X est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une suite $(J_p)_{p\in\mathbf{N}}$ de parties finies de X, croissante pour l'inclusion, telle que

$$X = \bigcup_{p=0}^{+\infty} J_p$$

Si X est dénombrable, soit h une bijection de $\mathbf{N}$ sur X, on définit

$$J_p = h(\llbracket 0, p \rrbracket)$$

Réciproquement, une réunion finie ou dénombrables de parties finies est finie ou dénombrable.

Exercice 9. Montrer que la famille $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable si et seulement si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum u_{-n}$ sont absolument convergentes.

Si la famille $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ est sommable, pour tout N de $\mathbf{N}$ l'ensemble $\llbracket 0, N \rrbracket$ est une partie finie de $\mathbf{Z}$, donc l'ensemble des $\displaystyle\sum_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket} |u_n|$, $N \in \mathbf{N}$, est majoré, donc $\displaystyle\sum_n |u_n|$ converge. En considérant les parties finies $\llbracket -N, 0 \rrbracket$ on obtient de même que $\displaystyle\sum_n |u_{-n}|$ converge. Réciproquement, si $\displaystyle\sum_n |u_n|$ et $\displaystyle\sum_n |u_{-n}|$ convergent, si s_1 et s_2 désignent leurs sommes repsectives, pour toute partie finie J de $\mathbf{Z}$ on a $\displaystyle\sum_{j \in J} |u_j| \leq s_1 + s_2$, ce qui implique la sommabilité de $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$.

Exercice 10. Pour quelles valeurs des nombres complexes a et b la famille $(a^m b^n)_{(m,n) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}}$ est-elle sommable ? Calculer alors sa somme.

Exercice 11. En utilisant la famille $\left(x^{n+p}\right)_{(n,p) \in \mathbf{N}^2}$, montrer que, si $|x| < 1$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) x^n$$

Résultat qui s'obtient plus naturellement par utilisation des séries entières.

Exercice 12 (Oral Mines). Discuter, suivant les valeurs du réel α, la sommabilité de $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}_*^2}$ puis celle de $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}_*^2}$

Pour la première, l'introduction de la partition définie par les

$$J_p = \{(m,n)\ ;\ m+n=p\}$$

est judicieuse, et mène assez rapidement au résultat : la famille est sommable si et seulement si $\alpha > 2$. Pour la deuxième, la même idée (considérer les

$$I_p = \{(m,n)\ ;\ m^2+n^2=p\}$$

n'est pas efficace (quand $I_p \neq \emptyset$, on ne sait pas trop bien évaluer son cardinal, ce n'est pas qu'il n'y ait pas de résultats mais ils ne sont pas facilement à notre portée). On reprend donc les démarches classiques : pour tout $m \geq 1$, $\displaystyle\sum_n \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$ (comparaison à une série de Riemann). Supposons dorénavant que ce soit le cas. On peut encadrer alors

$$s_m = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}$$

par deux intégrales, on en déduit que $\sum s_m$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 13 (Oral Mines). Démontrer que les deux séries $\displaystyle\sum_{k\geq 2}\big(\zeta(k)-1\big)$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 2}(-1)^k\big(\zeta(k)-1\big)$ convergent, et calculer leurs sommes.

Exercice 14. Démontrer que, si z est un nombre complexe de module strictement inférieur à 1,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(1-z^n)^2}$$

Exercice 15 (Oral Centrale). Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{pq(p+q-1)}\right)_{(p,q)\in\mathbf{N}_*^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Remarquons qu'il s'agit d'une famille de réels positifs, ce qui simplifie les choses (on va sans doute faire de la sommabilité-sommation par paquets, le tout en même temps, alors que pour une famille quelconque de réels ou de complexes il faudrait traiter la sommabilité d'abord, s'occuper de la sommation ensuite.
Définissons, si $(p,q)\in\mathbf{N}_*^2$,

$$u_{p,q}=\frac{1}{pq(p+q-1)}$$

et remarquons que pour tout $p\geq 1$, $\displaystyle\sum_q u_{p,q}$ converge (comparaison à une série de Riemann). Par ailleurs, si $p\geq 2$, une décomposition en éléments simples donne

$$\frac{1}{q(p+q-1)}=\frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{q+p-1}\right)$$

Donc, si $N>p-1$, en « télescopant » les termes :

$$\sum_{q=1}^{N}\frac{1}{q(p+q-1)}=\frac{1}{p-1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{p-1}-\frac{1}{N+1}-\cdots-\frac{1}{N+p-1}\right)$$

D'où l'on tire

$$\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}=\frac{1}{p(p-1)}H_{p-1}$$

si $p\geq 2$ (H_n désignant la somme partielle de rang n de la série harmonique).
Or la série de terme général $\dfrac{1}{p(p-1)}H_{p-1}$ converge (il suffit pour cela d'avoir une majoration de H_n par quelque chose de l'ordre de $\ln n$, par comparaison série-intégrale, puis d'utiliser les croissances comparées pour voir par exemple que $\dfrac{1}{p(p-1)}H_{p-1}\underset{p\to+\infty}{=}o\left(\dfrac{1}{p^{3/2}}\right)$). On a déjà la sommabilité. Maintenant, si $N\geq 2$,

$$\sum_{p=2}^{N}\frac{1}{p(p-1)}H_{p-1}=\sum_{p=2}^{N}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)H_{p-1}$$

ce qui donne l'idée d'une sommation « abélienne » :

$$\begin{aligned}\sum_{p=2}^{N}\frac{1}{p(p-1)}H_{p-1}&=\sum_{p=2}^{N}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right)H_{p-1}\\&=\sum_{p=2}^{N}\frac{H_{p-1}}{p-1}-\sum_{p=2}^{N}\frac{H_{p-1}}{p}\\&=\sum_{p=1}^{N-1}\frac{H_p}{p}-\sum_{p=2}^{N}\frac{H_{p-1}}{p}\\&=1-\frac{H_{N-1}}{N}+\sum_{p=2}^{N-1}\frac{1}{p^2}\end{aligned}$$

D'où l'on tire

$$\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\sum_{q=1}^{+\infty}u_{p,q}\right)=\frac{\pi^2}{6}$$

et donc la somme de la famille : $\dfrac{\pi^2}{3}$.

On aurait pu aussi essayer la partition de $\mathbf{N}_*^2$ par les

$$J_m=\{(p,q)\ ;\ p+q=m\}$$

mais ce n'est sans doute pas mieux.

Exercice 16. Démontrer que, si x est élément de $[0,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p x^{p+1}}{1-x^{p+1}}$$

Comme $x\in[0,1[$, pour tout $n\in\mathbf{N}$ on a $x^n\in[0,1[$, ce qui autorise l'écriture

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p x^{n(p+1)}\right)$$

On pose alors, pour tout $(n,p)\in\mathbf{N}_*\times\mathbf{N}$,

$$u_{n,p}=(-1)^p x^{n(p+1)}$$

et on montre la sommabilité de cette famille (en n'oubliant pas les valeurs absolues !), ce qui permet d'intervertir et d'obtenir le résultat.

Exercice 17 (Mines). On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}_*^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Posons $u_{m,n} = \dfrac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}$ et montrons la sommabilité de la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}_*^2}$. On note que, pour tout $n \geq 1$, $\sum_m |u_{m,n}|$ converge, et

$$s_n = \sum_{m=1}^{+\infty} |u_{m,n}| = \frac{\pi^2}{6n^2}$$

Donc $\sum_n s_n$ converge, ce qui assure la sommabilité de $(u_{m,n})$, et permet de dire que sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2}\right)$$

Déjà, si n est pair :

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2} = \frac{\pi^2}{6n^2}$$

Ensuite, si n est impair,

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{mn}}{m^2n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}$$

Mais, d'une part, (toutes les séries écrites ci-dessous convergent par comparaison à l'exemple de Riemann, on a donc le droit d'écrire ce qu'on écrit)

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2} - \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

et d'autre part

$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{1}{m^2} = \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$

Donc
$$\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{(-1)^m}{m^2}=\frac{\pi^2}{24}\ -\ \left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{24}\right)=-\frac{\pi^2}{12}$$
La somme cherchée vaut donc (toujours en séparant les termes d'indices pairs et ceux d'indices impairs, les séries convergeant toutes par référence à Riemann)
$$\frac{\pi^2}{6}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2}\ -\frac{\pi^2}{12}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$$
Remarquons alors que plus haut on a obtenu sans le mentionner au passage que
$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$
Et finalement la somme cherchée vaut
$$\pi^4\left(\frac{1}{6\times 4\times 6}-\frac{1}{12\times 8}\right)$$
et donc peut-être $-\dfrac{\pi^4}{288}$?

On aurait pu envisager de partitionner $\mathbf{N}_*^2$ avec les
$$J_p=\{(m,n)\ ;\ mn=p\}$$
mais le calcul n'aboutit pas, faute de pouvoir écrire simplement le cardinal de J_p.

Exercice 18 (Analyticité d'une somme de série entière). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. On note f sa somme, définie sur $D(0,R)$. Soit a un point de ce disque ouvert. En utilisant une suite double sommable, démontrer qu'il existe une suite (b_n) telle que, pour tout nombre complexe h tel que $|h|<R-|a|$,
$$f(a+h)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n h^n$$
(on développera les $(a+h)^k$ dans l'écriture de $f(a+h)$ par la formule du binôme)

Si $|h| < R - |a|$, alors $|a+h| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (a+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k \right)$$

Ici, inutile de rajouter des coefficients nuls dans la suite double qu'on va considérer : on peut en effet écrire directement

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (a+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k \right)$$

Peut-on intervertir ? posons, si $(n,k) \in \mathbf{N}^2$,

$$u_{n,k} = \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k$$

On pourra intervertir dès lors qu'on aura montré la sommabilité de la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$. C'est-à-dire la sommabilité de la famille $(|u_{n,k}|)_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$. Pour laquelle on fait évidemment le chemin inverse de celui suivi pour arriver à cette famille :
Pour tout n, la série $\sum_{k\geq 0} |u_{n,k}|$ converge, et

$$s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} |u_{n,k}| = |a_n| \ (|a| + |h|)^n$$

Or $|a_n| \ (|a| + |h|)^n \leq |a_n| R^n$ donc, par comparaison, $\sum_n |a_n| R^n$ converge. On a donc la sommabilité voulue, on peut donc intervertir et obtenir

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} \right) h^k$$

Exercice 19 (Première question d'un problème des Mines !). Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

On peut écrire, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned}\exp(\exp x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} e^{nx} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{n^p x^p}{n! p!} \right)\end{aligned}$$

On montre la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{n^p x^p}{n! p!} \right)_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$ *(en n'oubliant pas de mettre les valeurs absolues !), ce qui permet d'intervertir et d'obtenir le résultat.*

Autre méthode : la fonction $x \mapsto \exp(\exp x)$ est la solution de l'équation différentielle

$$y' = e^x \; y$$

qui prend en 0 la valeur e. On cherche (avec un produit de Cauchy) les solutions dse de cette équation différentielle, on trouve une relation de récurrence entre les coefficients de la série entière, on montre que ce à quoi on aboutit a bien un rayon de convergence infini. C'est beaucoup plus long, quoique non inintéressant.

Exercice 20 (Mines). Soit q un réel, $|q| < 1$. Montrer que la fonction

$$x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x)$$

est bien définie sur $\mathbf{R}$. Montrer qu'elle est développable en série entière, préciser le rayon de convergence.

On étudie d'abord la convergence de la série. On constate, commme $|q| < 1$, que pour tout $x \in \mathbf{R}$:

$$\sin(q^n x) \underset{n \to +\infty}{\sim} q^n x$$

Mais attention ! si $u_n \sim v_n$, on ne peut pas forcément conclure que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature. On peut le dire lorsque l'une des deux suites, donc *les deux, sont positives (au moins à partir d'un certain rang). Qu'à cela ne tienne, il suffit d'écrire :*

$$|\sin(q^n x)| \underset{n\to+\infty}{\sim} |q^n x| = |q|^n\ |x|$$

Or $\sum_{n\geq 0} |q|^n\ |x|$ *converge (série géométrique, avec une raison dans* $[0,1[$*), donc* $\sum_{n\geq 0} \sin(q^n x)$ *converge absolument, donc converge. On a donc bien la définition sur* $\mathbf{R}$*. D'ailleurs, sur* $\mathbf{R}$*, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} q^{n(2k+1)} x^{2k+1} \right)$$

(développement en série entière du sinus). On voit que si on a le droit d'intervertir, on peut conclure. Définissons donc, si $(n,k) \in \mathbf{N}^2$

$$u_{k,n} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} q^{n(2k+1)} x^{2k+1}$$

et montrons que cette famille est sommable...en prenant le chemin inverse de celui qui nous y a amenés :

- *Pour tout* n*,* $\sum_n |u_{k,n}|$ *converge (surtout ne pas oublier les* $|.|$*, dès qu'on parle de sommabilité !) et*

$$s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{k,n}| \ = \ sh\left(|q|^n |x|\right)$$

- $\sum_n s_n$ *converge : exactement la même chose que ce qui a été vu plus haut, en remplaçant sin par sh, on a en effet aussi bien sh* $u \underset{u\to 0}{\sim} u$ *que sin* $u \underset{u\to 0}{\sim} u$*.*

Donc la famille $(u_{k,n})_{(k,n)\in\mathbf{N}^2}$ *est sommable ; on a le droit d'intervertir et d'écrire*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} q^{n(2k+1)} x^{2k+1} \right)$$

ce qui se simplifie en

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sin(q^n x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)! \times (1-q^{2n+1})} x^{2k+1}$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in \mathbf{R}$, le rayon de convergence est $+\infty$, ce qu'on peut d'ailleurs vérifier.

Exercice 21 (Oral X). Etant donné une suite de carré sommable (a_n), on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ où la variable t est réelle.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
3. Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$, la suite (a_n) l'est.

---

1. *L'inégalité*
$$\left|\frac{a_n}{n-t}\right| \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2 + \frac{1}{(n-t)^2}\right)$$
(je fais l'hypothèse que les a_n sont réels. S'ils sont complexes, il suffit de mettre un $|a_n|^2$ à la place de a_n^2 dans le majorant). On en déduit que, pour tout $t \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{N}_*$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{n-t}$ est absolument convergente.

2. *L'idée est de remarquer que*
$$\frac{1}{n-t} = \frac{1}{n} \times \frac{1}{1 - \frac{t}{n}}$$
Supposons dorénavant $|t| < 1$. Alors
$$\frac{1}{n-t} = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{n^{p+1}}$$
Donc, si $|t| < 1$,
$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} a_n \frac{t^p}{n^{p+1}}\right)$$
Notons alors, pour $(n, p) \in \mathbf{N}_* \times \mathbf{N}$,
$$u_{n,p} = a_n \frac{t^p}{n^{p+1}}$$

Pour tout n, $\sum_p |u_{n,p}|$ converge, et, notant s_n sa somme,

$$s_n = \sum_{p=0}^{+\infty} |a_n| \frac{|t|^p}{n^{p+1}} = \frac{|a_n|}{n - |t|}$$

On a vu plus haut que $\sum s_n$ convergeait. Donc la famille $(u_{n,p})$ est sommable, ce qui autorise à intervertir :

$$f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{p+1}} \right) t^p$$

ce qui donne bien la développabilité en série entière « autour de 0 », plus précisément sur $]-1,1[$.

3. *On aurait alors (unicité du dse), pour tout $p \geq 0$,*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{p+1}} = 0$$

Or la série $\sum_{n\geq 1} \left(x \longmapsto \frac{a_n}{n^{x+1}} \right)$ converge normalement, par exemple, sur $[1,+\infty[$ (en fait, même sur $[0,+\infty[$, mais c'est un tout petit peu plus long à justifier), ce qui autorise l'utilisation du théorème de la double limite pour dire que sa somme a en $+\infty$ pour limite a_1. Mais cette somme est nulle en tout entier naturel p, donc $a_1 = 0$. Il n'y a qu'à continuer : la série $\sum_{n\geq 2} \left(x \longmapsto a_n \left(\frac{2}{n}\right)^{x+1} \right)$ converge normalement sur $[1,+\infty[$, est nulle en tout $p \geq 0$, et a pour limite (par théorème de la double limite) a_2 en $+\infty$, etc...

Exercice 22. Pour tout élément p de $\mathbf{N}^*$, on définit

$$J_p = \{(m,n) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^* \ / \ mn = p\}$$

Utiliser la famille (J_p) pour démontrer

$$\big(\zeta(s)\big)^2 = \sum_{p\geq 1} \frac{n_p}{p^s}$$

où s est un réel strictement supérieur à 1, n_p désignant pour tout p le nombre de diviseurs de p.
On rappelle la définition de la fonction ζ, classique mais hors programme :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

On considère la famille

$$\left(\frac{1}{m^s n^s}\right)$$

qui est, si $s > 1$, facilement sommable, de somme $\zeta(s)^2$ (c'est une « famille produit »). Mais d'autre part, $\{J_p\ ;\ p \geq 1\}$ forme une partition de $(\mathbf{N}^*)^2$, qu'on peut utiliser pour sommer la famille. Le résultat se trouve alors sans difficulté à condition de noter que n_p est le cardinal de J_p.

Exercice 23. Montrer que, si $s > 1$, si $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers,

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

On pourra, si $p_1, \ldots, p_N$ sont les N premiers nombres premiers, écrire

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1 - p_i^{-s}} = \prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{n_i=0}^{+\infty} p_i^{-sn_i} \right)$$