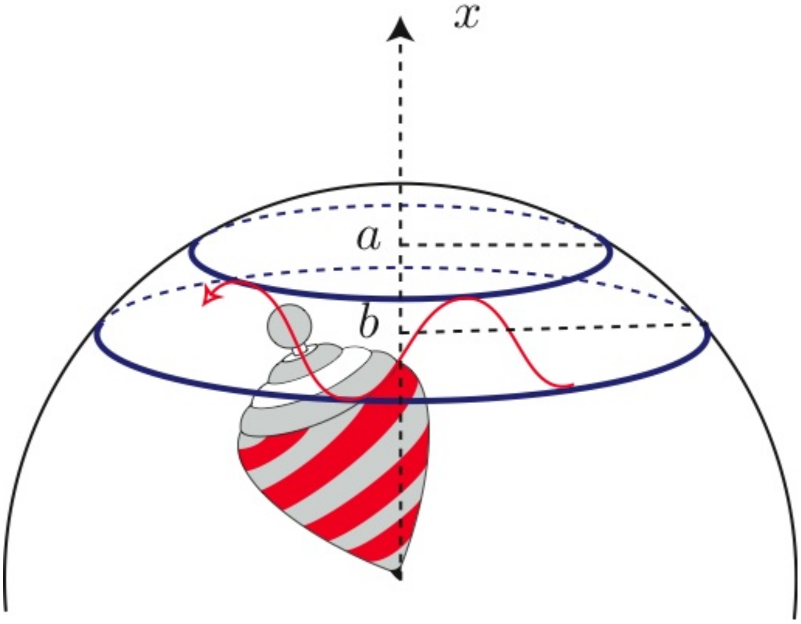
# Ab2 : Espaces euclidiens




*La matrice d'inertie d'une toupie est diagonalisable...*

$E$ est un espace vectoriel euclidien, c'est-à-dire préhilbertien réel de dimension finie. Le produit scalaire sera noté $(.|.)$ ou $\langle .,. \rangle$. La norme euclidienne associée sera notée $\|.\|$.

# I Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale : expression à l'aide du produit scalaire

**Proposition** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $B = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de $E$. Les coefficients de la matrice $A = \mathscr{M}_B(u)$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad A_{i,j} = \left(e_i \,|u(e_j)\right)$$

*Comme on le constate, ce résultat, simple, est suffisamment important pour qu'on en fasse un paragraphe.*

# II Adjoint d'un endomorphisme

*5/2 Attention : retour de l'adjoint dans le programme...*

## II.1 Formes linéaire sur un espace euclidien

Voir « Isomorphisme canonique avec l'espace dual », dans Ab1.

## II.2 Définition

Soit $u$ un endomorphisme d'un espace euclidien $E$. Il existe un unique endomorphisme $u^*$ de $E$ tel que

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \langle u(x), y \rangle \ = \ \langle x, u^*(y) \rangle$$

$u^*$ est appelé adjoint de $u$.

## II.3 Matrice dans une base orthonormale

**Proposition** Soit $\mathscr{B}$ une base **orthonormale** ; alors

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u^*) = {}^t\big(\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)\big)$$

**Lemme** Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base **orthonormale**, $u$ un endomorphisme, $A$ sa matrice dans la base $\mathscr{B}$. Alors, pour tous $i, j$ :

$$a_{i,j} =$$

## II.4 Linéarité

**Proposition** si $\lambda$ est un réel, $u$ et $v$ deux endomorphismes de $E$, alors

$$(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$$

## II.5 Composition

**Proposition** si $u$ et $v$ sont deux endomorphismes, alors

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$$

## II.6 Trace, déterminant, polynôme caractéristique

**Proposition** Un endomorphisme et son adjoint ont même trace, même déterminant, même polynôme caratéristique, mêmes valeurs propres (mais pas mêmes vecteurs propres).

## II.7 Adjoint de l'adjoint

**Proposition** $(u^*)^* = u$

## II.8 Stabilité

**Proposition** $F$ est stable par $u$ si et seulement si $F^\perp$ est stable par $u^*$.

### II.9 Noyau et image

**Exercice classique** $\mathrm{Ker}(u^*) = \big(\mathrm{Im}(u)\big)^{\perp}$ ,$\mathrm{Im}(u^*) = \big(\mathrm{Ker}(u)\big)^{\perp}$.

## III Isométries vectorielles

### III.1 Définition-proposition

Soit $u$ un endomorphisme de $E$. Les propriétés
(1) $\forall (x, y) \in E^2 \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ ($u$ conserve le produit scalaire)
(2) $\forall x \in E \quad \|u(x)\| = \|x\|$ ($u$ conserve la norme)
sont équivalentes ; un endomorphisme qui vérifie (1) ou (2) est un automorphisme ; on l'appelle isométrie vectorielle, ou automorphisme orthogonal (terminologie acceptée par le programme, mais on est censé plutôt utiliser « isométrie vectorielle »).
Remarquons qu'il n'y a que deux valeurs propres possibles pour une isométrie vectorielle :

### III.2 Notation ; caractérisation par l'adjoint

On notera $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles (ou « automorphismes orthogonaux », terminologie alternative) de $E$.

**Proposition** Soit $u \in L(E)$ ;

$$u \in O(E) \iff u^* \circ u = \mathrm{Id}_E \iff u \circ u^* = \mathrm{Id}_E$$

Autrement dit, les éléments de $O(E)$ sont les automorphismes dont l'inverse est l'adjoint : $u^* = u^{-1}$.

## III.3 Caractérisation à l'aide des bases orthonormales

**Proposition** Une isométrie vectorielle transforme toute base orthonormale en une base orthonormale. Réciproquement, pour qu'un endomorphisme soit un automorphisme orthogonal, il suffit qu'il transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

*On peut résumer par « un endomorphisme est une isométrie vectorielle si et seulement si il transforme base orthonormale en base orthonormale ».*

## III.4 Déterminant

**Proposition** Une isométrie vectorielle a pour déterminant $1$ ou $-1$.

**Démonstration** Avec les matrices, voir un peu plus loin.

*Mais un automorphisme qui a pour déterminant* $1$ *ou* $-1$ *n'est pas nécessairement un automorphisme orthogonal, c'est une erreur commune à éviter.*

## III.5 Groupe orthogonal, groupe spécial orthogonal

**Proposition** $O(E)$ est un sous-groupe de $\big(GL(E),\circ\big)$,

**Définition** appelé groupe orthogonal de l'espace euclidien $E$.

**Définition** On définit

$$SO(E) = \{u \in O(E)\ /\ \det(u) = 1\}$$

C'est un sous-groupe de $\big(O(E),\circ\big)$, appelé groupe spécial orthogonal de $E$. Les éléments de $SO(E)$ sont appelés rotations (ou isométries vectorielles positives, ou encore isométries vectorielles directes, cette dernière terminologie étant h.p.). Les éléments de $O(E)\setminus SO(E)$ sont les isométries vectorielles négatives voire « indirectes ».

# IV Matrices orthogonales

## IV.1 Définition

**Définition :** Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ est dite orthogonale lorsqu'elle vérifie l'une des trois conditions équivalentes suivantes :

**(i)** $A\ {}^tA\ =\ I_n$

**(ii)** ${}^tA\ A\ =\ I_n$

**(iii)** $A \in GL_n(\mathbf{R})$ et $A^{-1} = A^T$

(On évite d'utiliser les deux symboles différents pour la transposition dans une même rédaction...).

## IV.2 Notation

On note $O(n)$ ou $O_n(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles $n \times n$ orthogonales.

## IV.3 Matrices orthogonales et isométries vectorielles

**Proposition :** Soit $u$ un endomorphisme de $E$, $B$ une base **orthonormale** de $E$. Alors

$$u \in O(E) \iff \mathcal{M}_B(u) \in O(n)$$

*Ceci justifie l'appellation « automorphisme orthogonal » pour « isométrie vectorielle ».*

## IV.4 Une caractérisation

**Proposition** Une matrice est orthogonale si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes (ou : la famille de ses vecteurs lignes) est orthonormale dans $\mathbf{R}^n$ (identifiable à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$) muni de son produit scalaire canonique.

*Résultat bien pratique pour déterminer « à vue » si une matrice de petite taille est orthogonale. Par exemple, pour démontrer que les deux matrices suivantes sont orthogonales, on ne posera pas le calcul fastidieux du produit de la matrice par sa transposée :*

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+\sqrt{3} & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{2} \\ 2-\sqrt{3} & \sqrt{2} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad ; \quad \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

## IV.5 Passage entre deux bases orthonormales

**Proposition** Soit $B$ une base orthonormale. La base $B'$ est orthonormale si et seulement si $P_B^{B'} \in O(n)$.

## IV.6 Un exercice classique

Soit $A \in GL_n(\mathbf{R})$.

1. Montrer l'existence d'une matrice $Q \in O_n(\mathbf{R})$ et d'une matrice $R$ triangulaire supérieure inversible telles que $A = QR$.
   On pourra interpréter $A$ comme matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ à la base formée des vecteurs colonnes de $A$.
2. Si $(Q_0, R_0)$ est un couple qui convient pour la question précédente, trouver en fonction de $Q_0$ et $R_0$ tous les couples qui conviennent.

## IV.7 Topologie

Il faut savoir montrer que $O(n) = O_n(\mathbf{R})$ est compact. Le résultat n'est pas au programme, mais est souvent demandé dans les problèmes d'écrit.

## IV.8 Déterminant, groupe spécial orthogonal

### a Déterminant d'une matrice orthogonale

**Proposition :** Une matrice orthogonale a pour déterminant 1 ou $-1$.

*Une erreur classique est de considérer que la réciproque est vraie*

### b Groupes

**Proposition** $O(n)$ est un sous-groupe de $\left(GL_n(\mathbf{R}), \times\right)$, appelé groupe orthogonal d'ordre $n$.

$SO_n(\mathbf{R}) = SO(n) = \{A \in O(n)\ /\ \det(A) = 1\}$ est un sous-groupe de $\left(\mathscr{O}(n), \times\right)$, appelé groupe spécial orthogonal d'ordre $n$.

Les éléments de $SO(n)$ sont les matrices orthogonales positives, les éléments de $O(n) \setminus SO(n)$ sont les matrices orthogonales négatives.

*Remarque : les matrices* $3\times 3$ *écrites plus haut sont-elles positives ou négatives ? calculer leur déterminant n'est pas très amusant. On peut faire beaucoup plus simple en utilisant le produit vectoriel ; en effet, si on sait qu'une matrice* $3 \times 3$ *est orthogonale, si on note* $c_1, c_2, c_3$ *ses trois vecteurs colonnes (dans l'ordre), on a* $c_1 \wedge c_2 = c_3$ *ou* $c_1 \wedge c_2 = -c_3$ *(suivant si la base* $(c_1, c_2, c_3)$ *est ou non directe dans* $\mathbf{R}^3$ *orienté canoniquement). Dans le premier cas la matrice est orthogonale directe, dans le deuxième cas non. Il suffit donc de tester sur une composante non nulle de* $c_3$*. Mais le produit vectoriel n'est pas au programme de mathématiques...mais il est au programme de physique...*

# V Symétries orthogonales, réflexions

*On étudie ici des isométries vectorielles particulièrement simples.*

## V.1 Hyperplans et réflexions

### a Hyperplans d'un espace euclidien

Soit $H$ un hyperplan de l'espace euclidien $E$. Par définition, $H^{\perp}$ est une droite. Soit $a$ un vecteur non nul de $H^{\perp}$. On dit que $a$ est un vecteur normal à $H$. On a alors

$$(x \in H) \quad \Longleftrightarrow \quad (a|x) = 0$$

Et on dit que $(a|x) = 0$ est une équation de $H$. Comme tous les vecteurs normaux à $H$ sont les $\lambda a$, $\lambda \neq 0$, les équations de $H$ sont toute proportionnelles entre elles. Et s'écrivent, dans une base orthonormale :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = 0$$

où $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$. On les connaît bien en dimension 2 et 3. Réciproquement, toute équation de cette forme est l'équation d'un hyperplan vectoriel (pour les hyperplans affines, on rajoute une constante).

### b Projection orthogonale sur un hyperplan

Si $x$ est un vecteur de $E$, si $H$ est un hyperplan de $E$, si $a$ est un vecteur normal à $H$, le projeté orthogonal de $x$ sur $H^{\perp}$ est :

et donc le projeté orthogonal de $x$ sur $H$ est :

### c Exercice : expression analytique d'une réflexion

Rappelons qu'on appelle **réflexion** (dans un espace euclidien) toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Soit $H$ un hyperplan de l'espace euclidien $E$. Soit $a$ un vecteur unitaire de $H^{\perp}$. Alors, si $x$ est un vecteur de $E$, l'image de $x$ par la réflexion d'hyperplan $H$ est (formule h.p.) :

### d Exercice : réflexion échangeant deux vecteurs

**Exercice :** Soit $(a, b)$ un couple de vecteurs non nuls d'un espace euclidien $E$, tels que $a \neq b$ et $\|a\| = \|b\|$. Montrer qu'il existe alors une unique réflexion qui échange $a$ et $b$.

## V.2 Symétries orthogonales

**Proposition :** Soit $F$ un sous-espace d'un espace vectoriel euclidien $E$. La symétrie orthogonale par rapport à $F$ est une isométrie vectorielle diagonalisable. Elle est positive si et seulement si

En particulier, une réflexion est une isométrie négative.

*On verra que les automorphismes orthogonaux diagonalisables sont les symétries orthogonales. Mais il y a beaucoup d'automorphismes orthogonaux non diagonalisables.*

# VI Etude en dimension 2

## VI.1 Un paramétrage

Deux réels $x$ et $y$ vérifient

$$x^2 + y^2 = 1$$

si et seulement si il existe $\theta \in \mathbf{R}$ tel que

$$x = \cos\theta \qquad , \qquad y = \sin\theta$$

On passe ainsi de l'équation d'un cercle à un paramétrage de ce cercle.

Remarquons (digression...) que l'on ne fait pas autre chose quand on passe de l'écriture

$$t \mapsto a\cos(\omega t) \ + \ b\sin(\omega t)$$

à l'écriture

$$t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$$

des solutions d'un équation différentielle

$$y'' + \omega^2 y = 0 \qquad .$$

## VI.2 Matrices $2 \times 2$ orthogonales

On voit assez facilement, en utilisant le paramétrage précédent, qu'il y a deux types de matrices orthogonales carrées d'ordre 2 : les matrices du type

$$\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

et les matrices du type

$$\mathrm{S}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

Donc (après calcul de leurs déterminants)

$$SO(2) = SO_2(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbf{R} \right\}$$

$$O(2) \setminus SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} ; \theta \in \mathbf{R} \right\}$$

**Quelques multiplications** Avec les notations précéentes, calculer $R(\theta)R(\phi)$, $S(\theta)S(\phi)$, $R(\theta)S(\phi)$, $S(\phi)R(\theta)$.

**Proposition** $(SO(2), \times)$ est un groupe commutatif, isomorphe à $(\mathbf{U}, \times)$.

*En dimension $n \geq 3$, $(SO(n), \times)$ n'est plus commutatif.*

**Proposition** Les éléments de $O(2) \setminus SO(2)$ sont des réflexions.

*Ceci non plus n'est pas vrai en dimension $\geq 3$ : la dimension 2 est particulièrement simple.*

# VII Endomorphismes autoadjoints (symétriques)

## VII.1 Définition

### a Définition

Soit $(E,(.|.))$ un espace euclidien. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est autoadjoint (vocabulaire à privilégier) ou symétrique lorsque

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad (u(x)|y) = (x|u(y))$$

L'ensemble des endomorphismes autoadjoints symétriques est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}(E)$, noté $\mathscr{S}(E)$.

### b Caractérisation par l'adjoint

**Proposition :** $u \in S(E) \iff u^* = u$

### c Exemple à connaître

**Proposition** Soit $p$ un projecteur ($p \circ p = p$). Alors $p$ est un projecteur orthogonal (i.e. $\mathrm{Ker} p \perp \mathrm{Im} p$) si et seulement si $p$ est autoadjoint.

### d Exercice

Montrer que si $u$ est un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien alors $\mathrm{Ker}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u) = E$.

### e Caractérisation matricielle en base orthonormale

**Proposition** Soit $B$ une base **orthonormale** de l'espace euclidien $E$, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

$$u \in \mathscr{S}(E) \qquad \iff \qquad \mathscr{M}_B(u) \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$$

*C'est pour cela qu'on appelle « symétriques » les endomorphismes autoadjoints.*

## VII.2 Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques : théorème spectral

Soit $E$ un espace euclidien.

**Théorème** Si $u \in \mathscr{S}(E)$, alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$$

où $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda Id_E) = \mathrm{Ker}(\lambda Id_E - u)$

**Théorème** Tout endomorphisme symétrique est « diagonalisable en base orthonormale » : si $u \in \mathscr{S}(E)$, alors il existe une base orthonormale de $E$ composée de vecteurs propres de $u$.

**Théorème** Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$. Il existe $P \in O(n)$ et $D \in D_n(\mathbf{R})$ telles que

$$A = PD\,{}^tP = PDP^T = PDP^{-1}$$

(Dans cette écriture, $P$ est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^n$ à une base orthonormale de $\mathbf{R}^n$ formée de vecteurs propres pour l'endomorphisme canoniquement associé à $A$).

**Remarque** Le théorème spectral est en fait une équivalence : un endomorphisme est autoadjoint si et seulement si il est diagonalisable dans une base orthonormale, une matrice est symétrique si et seulement si elle est « orthgonalement semblable » (terminologie au programme) à une matrice diagonale.

**Démonstration** Elle est plutôt facile pour $n = 2\ldots$mais c'est tout! après, il faut surtout montrer le lemme crucial :

**Lemme 1** Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ ; alors $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$

Une fois le lemme 1 montré, la suite est nettement plus simple.

**Lemme 2** Si $u \in \mathscr{S}(E)$, des sous-espaces propres de $u$ associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

**Lemme 3** Si $u \in \mathscr{S}(E)$, si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$,

$$F \text{ stable par } u \iff F^{\perp} \text{ stable par } u$$

…puis on termine la démonstration par récurrence sur la dimension de l'espace.

**Exemple** On considère la matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Montrer que $J$ est diagonalisable.
2. Déterminer $\mathrm{rg}(J)$.
3. En déduire une matrice $P$ inversible et une matrice $D$ diagonale telles que $J = PDP^{-1}$.

## VII.3 Endomorphismes autoadjoints positifs, définis positifs

### a Définitions

On dit que $u \in \mathscr{S}(E)$ est un endomorphisme autoadjoint positif lorsqu'il est autoadjoint et vérifie

$$\forall x \in E \quad \big(x|u(x)\big) \geq 0$$

On dit que $u \in \mathscr{S}(E)$ est un endomorphisme autoadjoint défini positif lorsqu'il est autoadjoint et vérifie

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \quad \big(x|u(x)\big) > 0$$

On notera $\mathscr{S}^+(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints positifs, $\mathscr{S}^{++}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints définis positifs. Ils sont stables par $+$, mais ce ne sont pas des espaces vectoriels !
On dit que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique positive lorsque $A$ est symétrique et vérifie

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad {}^tXAX \geq 0$$

On dit que $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ est une matrice symétrique définie positive lorsque $A$ est symétrique et vérifie

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \setminus \{(0)\} \quad {}^tXAX > 0$$

On notera $\mathscr{S}_n^+(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives, $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbf{R})$ l'ensemble des matrices définies positives.

### b Caractérisation par le spectre

**Proposition** Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ ;

$u \in \mathscr{S}^+(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+$.

$u \in \mathscr{S}^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbf{R}^+_*$

Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbf{R})$ ;

$A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbf{R}) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}^+$.

$$A \in \mathscr{S}_n^{++}(E) \iff \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbf{R}_*^+$$

# VIII Réduction des isométries vectorielles, des matrices orthogonales

## VIII.1 Les lemmes

On part des trois lemmes suivants :

**Lemme 1** Si $u \in O(E)$, $F$ est stable par $u$ si et seulement si $F^{\perp}$ est stable par $u$.

**Lemme 2** Si $u \in O(E)$, il y a au moins un plan ou une droite vectorielle stable par $u$.

**Lemme 3** Les seules valeurs propres possibles pour une isométrie vectorielle sont et

## VIII.2 Le théorème

**Théorème de réduction** Soit $E$ un espace euclidien, $u \in O(E)$. Il existe une base orthonormale $B$ de $E$, des entiers naturels $m, p, q$, des réels $\theta_1, \dots, \theta_m$ tels que

$$M_B(u) = \begin{pmatrix} R_{\theta_1} & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & R_{\theta_m} & & \\ & & & -I_p & \\ & & & & I_q \end{pmatrix}$$

où, pour tout réel $\theta$,

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Avec ces notations, $u$ est une rotation si et seulement si $p$

Remarque : en remarquant que

$$R_\pi =$$

on voit qu'on peut supposer $p \in \{0, 1\}$.

**Version matricielle** Soit $M$ une matrice orthogonale ($M \in O(n)$). Alors il existe une matrice $P \in O(n)$ et une matrice $Q$ de la forme ci-dessus telles que $M = PQP^{-1} = PQP^T$.

**Remarque** On retrouve ainsi le fait que les isométries vectorielles qui sont diagonalisables sont les symétries orthogonales (symétrie par rapport à un sous-espace $F$ parallèlement à $F^\perp$).

# IX Orientation d'un espace euclidien. Produit mixte

## IX.1 Orientation d'un espace vectoriel réel

Soit $E$ un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Si $B$ et $B'$ sont deux bases de $E$, on sait que $\det_B(B')$ est un réel non nul.

**Définition** On dit que $B$ a même orientation que $B'$ lorsque $\det_B(B') > 0$

Les égalités $\det_B B' = (\det'_B B)^{-1}$ et $\det_B(B'') = \det_B B' \ \det'_B(B'')$ (ainsi que $\det_B(B) = 1$) montrent que la relation « a même orientation que » est une relation d'équivalence (réflexive, symétrique, transitive) sur l'ensemble des bases de $E$.

Il y a deux classes d'équivalence. En effet, soit $B$ une base et $B'$ une base d'orientation inverse (on en obtient par exemple une à partir de $B = (e_1, \ldots, e_n)$ en considérant $B' = (-e_1, \ldots, e_n)$ ou $B' = (e_2, e_1, e_3, \ldots, e_n)$. Toute base a alors soit même orientation que $B$, soit même orientation que $B'$.

**Définition** Orienter l'espace $E$, c'est faire le choix d'une des deux classes d'équivalence pour la relation « a même orientation que » On fait en général ce choix à travers le choix d'une base particulière, c'est-à-dire d'un représentant de la classe que l'on choisit ; les bases de cette classe sont dites directes, les autres indirectes ou inverses.

**En pratique**, on dira donc souvent : « soit $E$ orienté de telle manière que la base $B$ soit directe », ou « soit $E$ orienté, soit $B$ une base directe ». Les bases directes sont alors celles qui ont même orientation que $B$.

Lorsque l'espace est $\mathbf{R}^n$, on oriente en général canoniquement, c'est-à-dire de manière à ce que la base canonique soit directe.

Par exemple, si $E$ est orienté et si $(e_1, e_2, e_3)$ est directe, alors $(-e_1, e_3, e_2)$ est , $(e_3, e_2, e_1)$ est , $(-e_1, -e_2, -e_3)$ est .

**Remarque :** Cette notion d'orientation, liée à l'ordre, est typiquement réelle, et ne se généralise pas au cas d'un **C**-espace vectoriel.

## IX.2 Espace vectoriel euclidien orienté; produit mixte

### a Définition

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté, et soit $B$ une base orthonormale directe de $E$.
Pour toute base orthonormale $B'$, $\det_B B' = 1$ ou $\det_B B' = -1$ (car $P_B^{B'} \in O(n)$).
La base orthonormale $B'$ est directe si et seulement si $\det_B B' = 1$.

**Proposition**

Soit $E$ un espace vectoriel euclidien orienté, de dimension $n$.
Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille de $n$ vecteurs de $E$, le déterminant de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est le même dans toutes les bases orthonormales directes de $E$. Ce déterminant est souvent noté

$$[x_1, \ldots, x_n]$$

et est appelé **produit mixte** (*Dénomination désormais hors-programme*) des $n$ vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ (pris dans cet ordre).

**En bref** Si $B$ est une base orthonormale directe,

$$[x_1, \ldots, x_n] = \det_B (x_1, \ldots, x_n)$$

**Remarque** Si on change l'orientation, le produit mixte est changé en son opposé.

### b Interprétation géométrique du produit mixte

Dans le plan, $\big|[a, b]\big|$ est l'aire géométrique du parallélogramme construit sur les vecteurs $a$ et $b$. $[a, b]$ est une aire orientée, parfois dite algébrique.

D'une manière générale, dans un espace vectoriel euclidien de dimension $n$, $[x_1,\dots,x_n]$ est le volume orienté du « polytope » (parallélogramme en dimension 2, parallélépipède en dimension 3)

$$\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ ; \ (t_i)_{1\leq i\leq n} \in [0,1]^n\right\}$$

#### c Effet d'une application linéaire sur un produit mixte

Si $u \in L(E)$, $(x_1,\dots,x_n) \in E^n$, alors

$$[u(x_1),u(x_2),\dots,u(x_n)] = \qquad\qquad \times [x_1,x_2,\dots,x_n]$$

# X Isométries vectorielles en dimension 2

## X.1 Classification

Il y a exactement deux sortes d'isométries vectorielles (ou automorphismes orthogonaux) du plan euclidien :

- Les isométries négatives qui sont toutes des **réflexions**
- Les **rotations** (isométries positives).

Le groupe $(SO(E),\circ)$ des rotations est commutatif.

Notons que le cas de la dimension 2 est très particulier : en dimension $> 2$, le groupe $SO(E)$ des rotations n'est pas commutatif, et les isométries négatives ne sont pas toutes des réflexions.

## X.2 Angle d'une rotation

Supposons ici le plan vectoriel $E$ orienté.

Soit $r$ un élément de $SO(E)$.

On commence par remarquer que la matrice de $r$ est la même dans toutes les bases orthonormales directes. En effet, si $B$ et $B'$ sont deux telles bases, on sait que

$$M_B(r) = R_\theta$$

pour un certain $\theta$ réel. Donc

$$M_{B'}(r) = P^{-1} R_\theta P$$

où $P = P_B^{B'}$. Mais comme $B$ et $B'$ ont même orientation, il existe $\phi$ tel que $P_B^{B'} = R_\phi$. Et comme $(SO(2), \times)$ est commutatif...

Il existe alors un unique réel $\theta$ modulo $2\pi$ tel que cette matrice soit égale à

$$\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On dit que $\theta$ est une mesure de l'angle de la rotation $r$.

L'application $\theta \mapsto \mathrm{R}(\theta)$ est un morphisme de $(\mathbf{R}, +)$ sur $(SO(2), \times)$ (surjectif mais non injectif : le noyau est $2\pi\mathbf{Z}$).

Pour tout vecteur unitaire $a$, la relation

$$r(a) = (\cos\theta)a \ + \ (\sin\theta)b$$

où $(a, b)$ est orthonormale directe donne

$$\cos\theta = \big(a | r(a)\big) \qquad \sin\theta = \big[a, r(a)\big]$$

Etant donné deux vecteurs non nuls $a$ et $b$, il existe une unique rotation qui transforme le vecteur unitaire associé à $a$ en le vecteur unitaire associé à $b$. Si $\theta$ est une mesure de l'angle de cette rotation, on dit que $\theta$ est une **mesure de**

**l'angle orienté des deux vecteurs** $a$ et $b$ (les autres mesures s'obtiennent par addition d'un multiple entier de $2\pi$). Alors

$$(a|b) = ||a||\,||b||\cos\theta \qquad [a,b] = ||a||\,||b||\sin\theta$$

*Attention à une confusion possible : le fait d'être une isométrie négative ou positive ne dépend pas de l'orientation de l'espace. Donc ici, si on change l'orientation du plan, une rotation $r$ reste une rotation, son angle est seulement changé en son opposé.*

# XI Rotations en dimension 3

## XI.1 Stabilité

**Rappel** Si $u \in O(E)$, si $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ stable par $u$, alors $F^{\perp}$ est stable par $u$.

*Rappel inutile ici : c'est vrai aussi pour $u \in \mathscr{S}(E)$.*

## XI.2 Orientation d'un hyperplan

Si $H$ est un hyperplan d'un espace vectoriel euclidien orienté $E$, on peut orienter $H$ par le choix d'un vecteur normal $a$ : on dira qu'une base orthonormale $(e_1, \ldots, e_{n-1})$ est une base directe de $H$ lorsque $\left(e_1, \ldots, e_{n-1}, \frac{1}{\|a\|} a\right)$ est une base directe de $E$.

*Faire un dessin...*

## XI.3 Réduction d'une rotation en dimension 3

*On pourrait utiliser* **VII.**, *on va essayer autrement. Rien n'est à approfondir techniquement, dans ce paragraphe.*

Soit $r$ une rotation, i.e. une isométrie vectorielle positive (ou directe) d'un espace euclidien de dimension 3.

**Q1.** Montrer que $r$ a au moins une valeur propre.

**Q2.** Montrer qu'une telle valeur propre est égale à $\pm 1$.

Soit $w$ un vecteur propre unitaire associé à une telle valeur propre $\epsilon$.

D'après le rappel, $F = \text{Vect}(w)^{\perp}$ est stable par $r$, l'endomorphisme induit $r_F$ est une isométrie vectorielle. Dans une base orthonormale $(u, v, w)$, la matrice de $r$ sera donc la forme

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon \end{pmatrix}$$

**Q3.** Montrer alors que $1 \in \text{Sp}(r)$.

On choisit alors un vecteur unitaire $a$ tel que $r(a) = a$ ; et on suppose dorénavant que l'espace est orienté.

Soit $P$ l'orthogonal de $\text{Vect}(a)$. C'est un plan vectoriel, que l'on oriente de la manière suivante : la base $(e_1, e_2)$ de $P$ est dite directe lorsque la base $(e_1, e_2, a)$ est directe.

**Q4.** Justifier que l'endomorphisme $r_P$ induit par $r$ sur $P$ est une rotation.

$r_P$ est donc une une rotation, d'angle de mesure $\theta$ (définie modulo $2\pi$) pour cette orientation. La matrice de $r$ dans toute base orthonormale directe $(e_1, e_2, a)$

est du type suivant :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On voit donc que, si $r \neq Id$, le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est réduit à $\mathrm{Vect}(a)$. On l'appelle l'axe de $r$.

**Définition :** On dit que $r$ est la **rotation d'axe orienté par $a$, d'angle de mesure $\theta$ (modulo $2\pi$)**.

**Remarque :** $r$ est aussi la **rotation d'axe orienté par $-a$, d'angle de mesure $-\theta$ (modulo $2\pi$)**.

**Remarque :** Si on change l'orientation...

**Recettes** Si on doit étudier une rotation en dimension 3,

• On commence par déterminer son axe en cherchant les vecteurs invariants.

• Pour déterminer $\theta$, on peut remarquer (il faut donc connaître la forme réduite ci-dessus) que

$$\mathrm{Tr}(r) = 2\cos\theta + 1$$

ce qui permet de déterminer $\cos\theta$.

• Il ne reste plus qu'à déterminer le signe de $\sin\theta$. Pour cela, soit $u$ un vecteur n'appartenant pas à l'axe de la rotation (on le prend en pratique dans la base canonique, le premier vecteur si c'est possible, le deuxième sinon, pour avoir beaucoup de zéros). Alors

**Q5.** Si $(u|a) = 0$, calculer $[u, r(u), a]$ à l'aide de $\sin\theta$ et de $\|u\|$. Dans le cas général ($u$ on colinéaire à $a$, mais pas nécessarement orthogonal à $a$) dire en quoi le calcul de $[u, r(u), a]$ permet de déterminer $\theta$.

# XII Normes subordonnées et rayons spectraux

$E$ est un espace euclidien ; on note $(.|.)$ le produit scalaire, $\|.\|$ la norme euclidienne associée, et $|||.|||$ désigne la norme sur $\mathscr{L}(E)$ subordonnée à $\|.\|$.

## XII.1 Un lemme

**Lemme** Pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} (x|y)$$

## XII.2 Annexe 1 : Normes subordonnées d'un endomorphisme, de son adjoint

**Proposition** pour tout $u \in \mathscr{L}(E)$,

$$|||u||| = |||u^*|||$$

## XII.3 Norme subordonnée et rayon spectral

### a Définition

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ ; on définit son rayon spectral :

$$\rho(u) = \max\{|\lambda| \ ; \ \lambda \in \mathrm{Sp}(u)\}$$

### b Cas des endomorphismes autoadjoints positifs

**Proposition** Soit $u \in \mathscr{S}(E)$ ; alors

$$\max\big(\mathrm{Sp}(u)\big) = \sup_{x \neq 0_E} \frac{\big(x|u(x)\big)}{\|x\|^2}$$

(formule variationnelle pour la plus grande valeur propre).

Si, de plus, $u \in \mathscr{S}^+(E)$, alors

$$\max\big(\mathrm{Sp}(u)\big) = \rho(u) = |||u|||$$

### c Cas des endomorphismes quelconques

**Proposition** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ ;

$$|||u|||^2 = |||u^* \circ u||| = \rho(u^* \circ u)$$

# XIII Annexe 2 : démonstrations du lemme 1 (théorème spectral)

Rappelons l'énoncé :

**Lemme** Soit $E$ euclidien, $u \in \mathscr{S}(E)$. Alors $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$

**Démonstration 1**

1. Montrer que l'application
$$\phi \,:\, x \mapsto \big(x|u(x)\big)$$
est bornée sur la sphère unité $S(0_E, 1)$ et atteint son maximum. On note dorénavant $x_0$ un élément de $S(0_E, 1)$ tel que
$$\forall x \in S(0_E, 1) \qquad \phi(x) \leq \phi(x_0)$$

2. Soit $y \in S(0_E, 1)$ tel que $x_0 \perp y = 0$. Montrer que la fonction
$$\psi \,:\, t \mapsto \phi\big((\cos t)x_0 + (\sin t)y\big)$$
(définie sur $\mathbf{R}$) atteint un maximum en $t = 0$.

3. En déduire que $\big(y \mid u(x_0)\big) = 0$.

4. Conclure que $x_0$ est vecteur propre de $u$.

**Démonstration 2** (**Plus sophistiquée**) (mais suivant le même principe) : on remarque, comme précédemment, que l'application
$$x \longmapsto \frac{1}{\|x\|^2}\,(x|u(x))$$
atteint un maximum sur $E \setminus \{0_E\}$ (ce dernier n'est pas compact, mais en fait il suffit de « rentrer » la norme dans le produit scalaire pour se ramener à $S(0_E, 1)$). Il est alors intéressant de calculer la différentielle de cette application ; et de vérifier que si elle est nulle en $x_0$, alors $x_0$ est vecteur propre. Ceci n'est faisable qu'en sachant des choses sur la différentielle (chapitre Cn, n grand).

**Démonstration 3 (immorale)**

Soit $A \in S_n(\mathbf{R})$, $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(A)$. $X \in M_{n,1}(\mathbf{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AX = \lambda X$. Montrer que $\overline{X}^T\ A\ X$ est réel, et conclure que $\lambda \in \mathbf{R}$. On note bien sûr $\overline{M}$ la matrice dont les coefficients sont les conjugués de ceux de $M$.

# Table des matières