

Espaces vectoriels normés, topologie (T2, T3, T4, T5) (avec quelques corrigés)

I Étude de normes

- On rencontre souvent dans un énoncé la question : « montrer que l'application $N : \dots$ définit une norme sur l'espace vectoriel E ». Avant de se précipiter sur la vérification des propriétés qui font d'une application une norme, il faut parfois commencer par justifier la définition de N (même si en général elle ne pose pas de problème).
- La vérification de l'homogénéité ne pose en général aucune difficulté. L'inégalité triangulaire peut au contraire être assez difficile (en particulier, pour certaines normes, on utilise des propriétés de convexité).
- Ne pas oublier la propriété ($N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$), parfois immédiate ou nécessitant l'utilisation de propriétés classiques, par exemple :
 - Si f est continue et positive sur un segment $[a, b]$, si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.
 - Si un polynôme s'annule en une infinité de points, alors il est nul.
 - Si un polynôme de degré au plus n s'annule en au moins $n + 1$ points, alors il est nul.
- Il est important de bien lire la définition de l'espace sur lequel on travaille.
- Une question classique est de comparer deux normes N_1 et N_2 ;
 - Si l'on veut montrer qu'elles sont équivalentes, et si l'on n'est pas dans un espace de dimension finie (auquel cas toutes les normes sont équivalentes par théorème, et il n'y a rien à faire), on revient à la définition et on essaie de trouver deux constantes α et β telles que, pour tout x :
$$N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \text{ et } N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$
 - Si on veut montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, c'est plus délicat : on a en effet le choix entre démontrer qu'il n'existe pas de constante α telle que, pour tout x , $N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$, ou démontrer qu'il n'existe pas de constante β telle que, pour tout x , $N_2(x) \leq \beta N_1(x)$, ou (plus rarement) les deux. On essaiera souvent de construire une suite (x_n) d'éléments de E telle que $(N_1(x_n))$ tende

vers $+\infty$ et telle que $(N_2(x_n))$ soit bornée (ou l'inverse). Il faut donc se poser la question : comment construire des éléments de E avec une grande N_1 et une petite N_2 (ou l'inverse) ?

Exercice 1 (Oral centrale 2010). Indiquer un exemple de couple de normes non équivalentes sur un espace normé.

Voir cours...

Exercice 2 (Normes sur un espace de polynômes). Ici, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

1. Si $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbf{K}[X]$ (rappelons que la somme est finie), on définit

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|, \quad N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2}, \quad N_\infty(P) = \sup_{n \geq 0} |a_n|$$

Montrer que l'on définit ainsi trois normes sur $\mathbf{K}[X]$, les comparer.

2. (*Oral Centrale*) On définit, pour $P \in \mathbf{K}[X]$,

$$N(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}$$

(on confond donc polynôme et fonction polynôme, ce qui est rarement gênant en analyse). Montrer que N définit une norme sur $\mathbf{K}[X]$.

3. Si $P \in \mathbf{C}[X]$, on définit

$$\|P\| = \sup_{|z|=1} (|P(z)|)$$

Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathbf{C}[X]$.

-
1. Même preuve que pour \mathbf{K}^n ; on a facilement $N_\infty \leq N_1$, mais N_∞ et N_1 ne sont pas équivalentes : l'existence d'un α tel que

$$N_1 \leq \alpha N_\infty$$

est absurde, comme on le voit en appliquant une telle inégalité à $P = 1 + \dots + X^n$ pour n'importe quel n . On compare à peu près de même N_2 et N_∞ . On a

$N_2 \leq N_1$ (comparer les carrés), et la non équivalence se montre avec les mêmes polynômes que précédemment.

Exercice 3 (Une norme simple, oral CCP). Soit λ une suite de réels, et

$$N_\lambda(P) = \sum_{k=0}^N |a_k \lambda_k| \text{ si } P = \sum_{k=0}^N a_k X^k.$$

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que N_λ soit une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
 2. Trouver une cns sur λ et μ pour que N_λ et N_μ soient équivalentes.
-

Une condition nécessaire et suffisante est $\forall k \quad \lambda_k \neq 0$. Supposons-la vérifiée. Une condition nécessaire et suffisante d'équivalence est l'existence de α et β strictement positifs tels que

$$\forall k \quad \left[\lambda_k \leq \alpha \mu_k \quad \text{et} \quad \mu_k \leq \beta \lambda_k \right]$$

Exercice 4 (Norme intégrale « avec poids »). Soit E l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ de \mathbf{R} , à valeurs dans \mathbf{R} ou \mathbf{C} . Soit w un élément de E . On définit, pour tout élément f de E ,

$$N(f) = \int_{[a,b]} |wf|.$$

1. Démontrer qu'il suffit que w ne s'annule pas sur $[a, b]$ pour que N soit une norme. Cette condition est-elle nécessaire ?
 2. Démontrer qu'il suffit que w ne s'annule pas sur $[a, b]$ pour que N soit équivalente à la norme N_1 usuelle. Cette condition est-elle nécessaire ?
-

Les propriétés de norme sont faciles à vérifier pour N , si w ne s'annule pas. Mais si w ne s'annule qu'en un point t_0 , on a, par le théorème qui dit qu'une fonction continue positive sur un segment a une intégrale nulle si et seulement si elle est constamment nulle :

$$N(f) = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b] \quad w(t)f(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b] \setminus \{t_0\} \quad f(t) = 0$$

Mais par continuité de f en t_0 ,

$$\forall t \in [a, b] \setminus \{t_0\} \quad f(t) = 0 \Rightarrow \forall t \in [a, b] \quad f(t) = 0$$

Donc il n'est pas nécessaire que w ne s'annule pas pour que N soit une norme. En fait, une condition nécessaire et suffisante est que l'ensemble des points d'annulation de w soit d'intérieur vide, i.e. que son complémentaire soit dense dans $[a, b]$.

On a déjà

$$\forall f \in E \quad N(f) \leq \|w\|_\infty N_1(f)$$

Si w ne s'annule pas, $|w|$, continue, atteint un minimum m sur $[a, b]$. Et on a

$$\forall f \in E \quad N(f) \geq mN_1(f)$$

ce qui donne, comme $m > 0$,

$$N_1 \leq \frac{1}{m}N$$

donc N et N_1 sont équivalentes.

Supposons maintenant que w s'annule en $t_0 \in [a, b]$. Supposons aussi $t_0 \in]a, b[$; on considère pour $n \in \mathbf{N}_*$ la fonction f_n nulle en-dehors de $[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]$, valant n en t_0 , affine sur chacun des segments $[t_0 - \frac{1}{n}, t_0]$ et $[t_0, t_0 + \frac{1}{n}]$, continue (son graphe est un triangle, à tracer). Alors $N_1(f_n) = 1$ (calcul d'aire d'un triangle isocèle), et

$$N(f_n) \leq \sup_{[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]} (|w|) \times N_1(f_n) = \sup_{[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]} (|w|)$$

La continuité de w en t_0 montre que

$$\sup_{[t_0 - \frac{1}{n}, t_0 + \frac{1}{n}]} (|w|) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Et ainsi les deux normes N_1 et N ne sont pas équivalentes. La condition est donc nécessaire.

Exercice 5. On définit, sur $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$,

$$\|f\| = |f(a)| + N_\infty(f')$$

où N_∞ désigne la norme de la convergence uniforme. Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme, la comparer à N_∞ .

On peut sans dommage supposer $a < b$.

De $|f(x)| \leq |f(a)| + \int_a^x |f'(t)|dt$ (vrai pour tout $x \in [a, b]$) on déduit

$$\|f\|_\infty \leq |f(a)| + (b-a)N_\infty(f')$$

et donc

$$\|f\|_\infty \leq k\|f\|$$

où, par exemple, $k = \max(1, |b-a|)$. Une inégalité dans l'autre sens supposerait qu'on puisse « contrôler » $N_\infty(f')$ avec $N_\infty(f)$, ce qui semble difficile... prendre, qi $a = 0$ et $b = 1$, par exemple, $f_n(t) = \sin(nt)$...

Exercice 6 (Une norme rencontrée dans un problème de l'X). On note E l'espace des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$, à valeurs réelles; pour tout élément f de E on définit

$$\nu(f) = \sup_{0 \leq x < y \leq 1} \left(\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \right).$$

N_∞ désigne comme d'habitude la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

1. Dire pourquoi ν n'est pas une norme sur E .
2. On définit

$$N = \nu + N_\infty.$$

Démontrer que N est une norme sur E , et la comparer avec N_∞ .

Les deux normes ne sont pas équivalentes, prendre pour le voir la suite (f_n) où

$$f_n : x \mapsto \sin(nx)$$

Comme $f'_n(0) = n$,

$$\frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} n$$

et donc $\nu(f_n) \geq n$ (en fait c'est une égalité). Or $N_\infty(f_n) = 1$...

Exercice 7 (Un classique de l'oral). On note E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} telles que $f(0) = 0$. On désigne par $\|\cdot\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles.

2. Montrer que les fonctions données par

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

sont deux normes.

3. Montrer qu'elles sont équivalentes.

1. C'est un sous-espace vectoriel de $(C^1([0, 1], \mathbf{R}), +, \cdot)$.

2. Comme on ne redemande pas de montrer que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme, il faut surtout montrer que si $f + f' = 0$ alors $f = 0$, ce qui se fait en écrivant que $f' + f = 0$ donne $f(t) = ae^{-t}$, la condition $f(0) = 0$ donnant $a = 0$. Toutes les autres propriétés sont simples.

3. $N_1 \leq N_2$ est aisé. Trouver une inégalité $N_2 \leq aN_1$ l'est moins, et on met en œuvre une technique assez astucieuse et utile dans quelques exercices d'oral. Posons $g = f' + f$, et écrivons que f est solution de l'équation différentielle

$$y' + y = g$$

que l'on résout par variation de la constante, ou en directement multipliant par e^t , pour obtenir

$$e^t y(t) - e^0 y(0) = \int_0^t e^u g(u) du$$

et compte tenu du fait qu'on est dans E , on en tire

$$f(t) = e^{-t} \int_0^t e^u g(u) du$$

qui permet la majoration

$$|f(t)| \leq e \|g\|_\infty$$

d'où l'on tire $\|f\|_\infty \leq e \|f + f'\|_\infty$. Et donc (en utilisant aussi l'inégalité triangulaire)

$$N_2(f) \leq \|f + f'\|_\infty + 2\|f\|_\infty \leq (2e + 1)N_1(f)$$

Exercice 8 (Oral Centrale, un peu plus difficile que le précédent). On note E l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles.

2. Montrer que les fonctions données par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \quad , \quad N_2(f) = \|f + f''\|_\infty \quad \text{et} \quad N_3(f) = \|f\|_\infty + \|f''\|_\infty$$

sont trois normes.

3. Comparer N_1 et N_3 .
4. Soit g une fonction continue ; montrer que l'application

$$x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$$

est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$. Résoudre alors cette équation différentielle.

5. Comparer entre elles les trois normes N_1 , N_2 , N_3 .

Exercice 9 (Normes sur \mathbf{R}^n , écrit ens 2002). *Les normes étudiées ci-dessous englobent les normes N_1 et N_2 usuelles ; l'inégalité triangulaire demande une étude peu évidente, mais bien découpée dans cet énoncé ens assez accessible.*

1. Soit $0 \leq \alpha \leq 1$ et $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} t_i^\alpha \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k} \right)^\alpha$$

2. Soit $\alpha \geq 1$ et $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} t_i^\alpha \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k} \right)^\alpha$$

3. On se donne $p \in [1, +\infty]$ et on définit $p^* \in [1, +\infty]$ par la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1 \text{ (de sorte que } 1^* = +\infty \text{ et } (+\infty)^* = 1).$$

- (a) Soit $p \in]1, +\infty[$. Si $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, montrer que

$$\exp\left(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^*}\right) \leq \frac{1}{p} \exp(\alpha) + \frac{1}{p^*} \exp(\beta)$$

- (b) Soit $p \in]1, +\infty[$ et $x, y \in \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{p^*} y^{p^*}$$

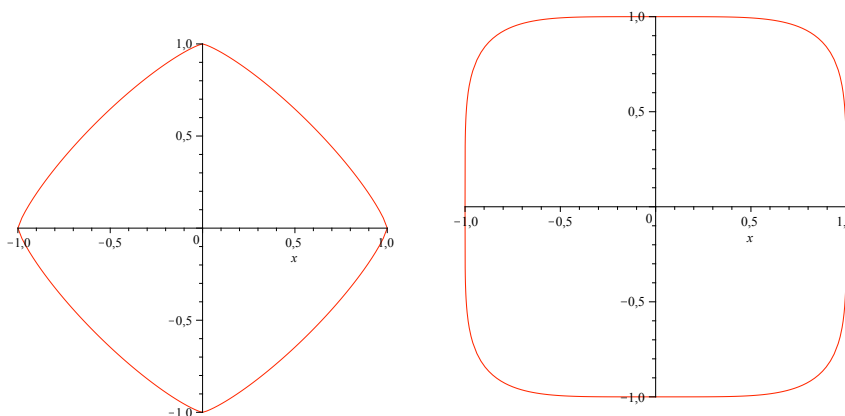
4. Dans la suite, on note, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, et $p \in [1, +\infty[$,

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$. On rappelle que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. On veut montrer l'inégalité de Hölder : pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$,

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_{p^*}$$

où $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

- (a) Traiter directement la cas $\{p, p^*\} = \{1, +\infty\}$.
- (b) Si $p \in]1, +\infty[$, montrer que l'on peut supposer $\|x\|_p = \|y\|_{p^*} = 1$ et que les x_i et les y_i sont tous positifs ou nuls. Dédurre de 3.b. que $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$, et conclure.
5. On veut montrer l'inégalité de Minkowski : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.
- (a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où tous les x_i et les y_i sont positifs.
- (b) Si $z \in \mathbf{R}^n$ est défini par $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$, que vaut $\|z\|_{p^*}$?
- (c) Montrer que $\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p^p + \|y\|_p^p$.
- (d) Montrer l'inégalité de Minkowski.
6. Montrer que $\| \cdot \|_p$ est une norme sur \mathbf{R}^n .



(Représentation de la sphère unité de \mathbf{R}^2 pour $\| \cdot \|_{5/4}$ et pour $\| \cdot \|_5$)

-
1. La fonction $f_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ est de classe C^2 sur \mathbf{R}_*^+ , sa dérivée seconde est négative, elle est donc concave. Mais cette concavité est encore vraie sur \mathbf{R}^+ , par exemple en disant que la propriété, si $y > 0$:

$$\forall t \in [0, 1] \quad f_\alpha(t \times 0 + (1-t)y) \geq t f_\alpha(0) + (1-t) f_\alpha(y)$$

s'écrit

$$\forall t \in [0, 1] \quad (1-t)^\alpha \geq (1-t)$$

ou encore, si $t \in]0, 1[$, $(1-t)^{1-\alpha} \leq 1$ qui est vrai.

L'inégalité proposée est alors une « inégalité de concavité ».

2. Cette fois, f_α est C^1 (et donc dérivable) sur \mathbf{R}^+ , et sa dérivée est croissante, elle est donc convexe.

3. (a) La fonction \exp est convexe sur \mathbf{R} .
- (b) Si $x = 0$ ou $y = 0$, le membre de gauche est nul, le membre de droite est positif, l'inégalité est donc vérifiée.
- Si $x > 0$ et $y > 0$, on applique l'inégalité précédente à $\alpha = p \ln x$ et $\beta = p^* \ln y$.
4. (a) Par symétrie, on peut supposer $p = 1$, $p^* = +\infty$. On a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \|y\|_\infty = \|y\|_\infty \|x\|_1$$

- (b) Notons provisoirement $x^+ = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ et $y^+ = (|y_1|, \dots, |y_n|)$; on a

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x^+, y^+ \rangle$$

et $\|x\|_p = \|x^+\|_p$, $\|y\|_{p^*} = \|y^+\|_{p^*}$. Donc si on montre l'inégalité de Hölder pour x^+ et y^+ , elle sera a fortiori vraie pour x et y . On peut donc supposer les x_i et les y_i tous positifs ou nuls, ce qu'on fera désormais.

On suppose aussi, désormais, x et y non nuls, sinon l'inégalité de Hölder est très claire.

Remarquons enfin que l'inégalité de Hölder équivaut à

$$\left| \left\langle \frac{1}{\|x\|_p} x, \frac{1}{\|y\|_{p^*}} y \right\rangle \right| \leq 1$$

ou encore à

$$|\langle x', y' \rangle| \leq 1$$

où $x' = \frac{1}{\|x\|_p} x$ et $y' = \frac{1}{\|y\|_{p^*}} y$. Mais on remarque que $\|x'\|_p = \|y'\|_{p^*} = 1$. On s'est donc bien ramené au cas suggéré, dans les hypothèses duquel on suppose se trouver dorénavant (i.e. on note x au lieu de x'^+ , y au lieu de y'^+). En ajoutant les inégalités

$$x_i y_i \leq \frac{1}{p} x_i^p + \frac{1}{p^*} y_i^{p^*}$$

pour $i = 1, \dots, n$ on obtient

$$\langle x, y \rangle \leq \frac{1}{p} \|x\|_p^p + \frac{1}{p^*} \|y\|_{p^*}^{p^*} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$$

ce qui conclut.

5. (a) Reprenant les notations de la question précédente, on a assez facilement $\|x + y\|_p \leq \|x^+ + y^+\|_p$, $\|x\|_p = \|x^+\|_p$ et $\|y\|_p = \|y^+\|_p$, si on montre l'inégalité pour x^+ et y^+ elle sera donc valable pour x et y .

(b) On a $z_i^{p^*} = (x_i + y_i)^{(p-1)p^*}$. Reste à calculer :

$$(p-1)p^* = (p-1) \frac{1}{1-1/p} = p$$

ce qui permet de conclure

$$\|z\|_{p^*} = \|x + y\|_p^{p/p^*}$$

(c) Remarquons que

$$\|x + y\|_p^p = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p = \sum_{i=1}^n (x_i + y_i) z_i = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

On applique alors l'inégalité de Hölder.

(d) Il n'y a plus qu'à diviser l'inégalité du (c) par $\|z\|_{p^*}$ puis utiliser la formule du (c) et le fait que $p - p/p^* = 1$.

Exercice 10 (Normes intégrales sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbf{C})$). *Exercice analogue au précédent, mais dans le cadre d'un espace fonctionnel*

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de \mathbf{R} , à valeurs dans \mathbf{C} . On suppose $a < b$. On désigne par p et q deux réels strictement positifs qui vérifient la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

1. Démontrer que, pour tous nombres réels x et y ,

$$\exp\left(\frac{x}{p} + \frac{y}{q}\right) \leq \frac{1}{p} \exp(x) + \frac{1}{q} \exp(y)$$

puis en déduire que, pour tous nombres réels positifs α et β :

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$$

Convexité de \exp sur \mathbf{R} . On applique ensuite la première inégalité avec $x = p \ln(\alpha)$ et $y = q \ln(\beta)$, ce qui nécessite l'examen du cas particulier $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$, mais dans ce cas l'inégalité est simple.

2. Démontrer que, pour tous éléments f, g de E ,

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \frac{1}{p} \int_{[a,b]} |f|^p + \frac{1}{q} \int_{[a,b]} |g|^q$$

On applique ce qui précède à $\alpha = |f(t)|$ et $\beta = |g(t)|$ et on intègre entre a et b (on a bien vérifié que l'énoncé disait $a < b$).

3. En utilisant la question précédente, on se propose de démontrer l'inégalité de Hölder, valable pour n'importe quels éléments f et g de E :

$$\left| \int_{[a,b]} fg \right| \leq \left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_{[a,b]} |g|^q \right)^{1/q}$$

- (a) Examiner le cas où l'une des deux fonctions est nulle.
-

L'inégalité revient alors à $0 \leq 0$.

- (b) Examiner le cas où $\int_{[a,b]} |f|^p = \int_{[a,b]} |g|^q = 1$.
-

On utilise 2.

- (c) On se place dans le cas général, on suppose néanmoins que ni f ni g n'est la fonction nulle. Montrer qu'il existe deux réels positifs λ et μ tels que les fonctions $f_1 = \lambda f$ et $g_1 = \mu g$ vérifient

$\int_{[a,b]} |f_1|^p = \int_{[a,b]} |g_1|^q = 1$; exprimer λ et μ à l'aide d'intégrales faisant intervenir f , g , p et q . Conclure alors en utilisant la question précédente.

Les conditions données équivalent à $\lambda = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{-1/p}$ et

$\mu = \left(\int_a^b |g(t)|^q dt \right)^{-1/q}$. Il n'y a plus qu'à appliquer ce qui précède à f_1 et g_1 , on obtient bien ce qu'on cherchait.

4. Vérifier que :

$$\left(|f| + |g| \right)^p = |f| \left(|f| + |g| \right)^{p-1} + |g| \left(|f| + |g| \right)^{p-1}$$

En appliquant (adroitement !) l'inégalité de Hölder à chacun des produits du second membre, en déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\int_{[a,b]} |f + g|^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_{[a,b]} |g|^p \right)^{1/p}$$

L'égalité proposée est élémentaire. Ensuite, il faut se laisser guider par l'indication et par le but recherché. L'inégalité de Hölder donne

$$\int_a^b (|f| (|f| + |g|)^{p-1}) \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b (|f| + |g|)^{p-1} \right)^{1/q}$$

Il importe de noter que $(p-1)q = p$. Donc on peut réécrire

$$\int_a^b (|f| (|f| + |g|)^{p-1}) \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b (|f| + |g|)^p \right)^{1/q}$$

De la même manière,

$$\int_a^b (|g| (|f| + |g|)^{p-1}) \leq \left(\int_a^b |g|^p \right)^{1/p} \left(\int_a^b (|f| + |g|)^p \right)^{1/q}$$

On peut ajouter ces deux inégalités et on obtient, compte tenu de l'égalité de départ :

$$\int_a^b (|f| + |g|)^p \leq \left(\left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p \right)^{1/p} \right) \left(\int_a^b (|f| + |g|)^p \right)^{1/q}$$

C'est-à-dire, comme $1/p + 1/q = 1$,

$$\left(\int_a^b (|f| + |g|)^p \right)^{1/p} \leq \left(\int_a^b |f|^p \right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g|^p \right)^{1/p}$$

ce qui permet de conclure avec $|f + g| \leq |f| + |g|$.

5. Démontrer que l'application

$$\begin{aligned} \phi_p : E &\longrightarrow \mathbf{R} \\ f &\longmapsto \left(\int_{[a,b]} |f|^p \right)^{1/p} \end{aligned}$$

est une norme sur E .

Il n'y a que l'inégalité triangulaire qui soit problématique, et on vient de la montrer.

6. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer que, si $1 < p < p'$ et si $f \in E$,

$$\phi_p(f) \leq (b-a)^{1/p-1/p'} \phi_{p'}(f)$$

Utiliser ce résultat pour comparer les normes ϕ_p entre elles ; les comparer à la norme N_∞ de la convergence uniforme sur $[a, b]$.

On pourra utilement s'inspirer des comparaisons des normes intégrales usuelles vues en cours

Encore un peu astucieux : on écrit l'inégalité de Hölder avec le produit $|f|^p \times 1$, et les exposants $p'' = p'/p$ et q'' tel que $1/p'' + 1/q'' = 1$. On obtient donc

$$\int_a^b (|f|^p \times 1) \leq \left(\int_a^b (|f|^p)^{p'/p} \right)^{p/p'} \times \left(\int_a^b 1^{1/(1-p/p')} \right)^{1-p/p'}$$

Il n'y a plus qu'à tout élever à la puissance $1/p$. Cette inégalité « classe » les normes ϕ_p , il n'y a plus qu'à calculer les normes p d'une suite de fonctions très simples (par exemple $x \mapsto x^n$, car supposer $[a, b] = [0, 1]$ ne change rien) pour conclure qu'elles ne sont pas deux à deux équivalentes. *On peut démontrer (exercice d'intégration) que, pour tout élément f de E ,*

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \phi_p(f) = N_\infty(f)$$

ce qui justifie l'appellation N_∞

Exercice 11 (Oral Centrale). Soit E un espace normé, x et x' dans E , r et r' dans \mathbf{R}^+ , B (resp. B') la boule fermée de centre x et de rayon r (resp. de centre x' et de rayon r'). Caractériser à l'aide de x, x', r, r' l'inclusion $B \subset B'$.

II Topologie, continuité

- Les caractérisations par les suites (autrement dit : séquentielles) de l'adhérence, d'une partie fermée, de la continuité, des limites, de la borne supérieure, de la densité. . .) sont souvent utiles.
- Pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée, on peut, parfois, revenir à la définition, à l'utilisation des suites. . . on utilise très fréquemment les résultats sur l'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue ; en général, une partie dont la définition s'écrit avec des inégalités strictes est ouverte, une partie dont la définition s'écrit avec des inégalités larges ou des égalités est fermée.

Exercice 12 (exercice classique, étude topologique des sous-groupes additifs de \mathbf{R}). Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ (exemple : $G = \mathbf{Z}$, $G = \mathbf{Q}$). On suppose $G \neq \{0\}$. On note α la borne inférieure de $G \cap \mathbf{R}_*^+$ (on justifiera son existence).

Si g est un élément non nul de G , $-g$ aussi, et l'un des deux est dans \mathbf{R}_*^+ . Donc $G \cap \mathbf{R}_*^+ \neq \emptyset$. Et minoré par 0, il a une borne inférieure.

1. Montrer que $\forall g \in G \forall n \in \mathbf{Z} \quad ng \in G$.

On fixe g , on fait une récurrence sur n pour obtenir

$$\forall g \in G \forall n \in \mathbf{N} \quad ng \in G$$

puis on utilise le fait que $h \in G \Rightarrow -h \in G$.

2. Si $\alpha = 0$, démontrer que G est dense dans \mathbf{R} (exemple : $G = \mathbf{Q}$).

On va montrer que si $a < b$, $]a, b[\cap G \neq \emptyset$, ce qui montrera la densité (on suppose $a < b$). Pour cela, on note que $b - a$ ne minore pas $G \cap \mathbf{R}_*^+$ (sinon α ne serait pas nul). Soit $g_0 \in G \cap \mathbf{R}_*^+$ tel que $g_0 < b - a$. On voit bien qu'il existe $n \in \mathbf{Z}$ tel que $ng_0 \in]a, b[$. Et on peut le montrer de la manière suivante : soit p le plus grand entier tel que $pg_0 \leq a$ ($p = \lfloor \frac{a}{g_0} \rfloor$). Alors $(p + 1)g_0 > a$ d'une part, et $(p + 1)g_0 \leq a + g_0 < a + (b - a) = b$.

3. Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in G$ (on procèdera par l'absurde, et on montrera que si $\alpha \notin G$ alors il y a au moins deux éléments de G dans $] \alpha, 2\alpha[$) puis que $G = \alpha\mathbf{Z}$.
-

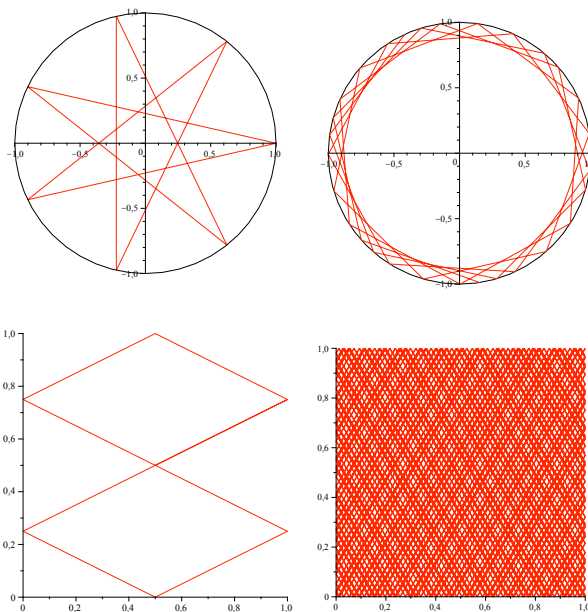
2α ne minore pas $G \cap \mathbf{R}_*^+$ car $2\alpha > \alpha$. Il existe donc $g_1 \in G \cap [\alpha, 2\alpha[$. Mais si $\alpha \notin G$, alors $g_1 \in]\alpha, 2\alpha[$. Et g_1 ne minore pas $G \cap \mathbf{R}_*^+$. Donc il existe $g_2 \in]\alpha, g_1[$. Mais alors $g_1 - g_2$ est un élément de $G \cap \mathbf{R}_*^+$ qui est dans $]0, \alpha[$. Contradiction.

Donc $\alpha \in G$. Comme $(G, +)$ est un groupe, $\alpha\mathbf{Z} \subset G$. Réciproquement, supposons $g \in G$, soit $n \in \mathbf{N}$ tel que

$$n\alpha \leq g < (n+1)\alpha$$

alors $0 \leq g - n\alpha < \alpha$ et $g - n\alpha \in G$, donc $g - n\alpha = 0$, ce qui conclut : $G = \alpha\mathbf{Z}$.

On a ainsi montré qu'un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ est soit discret soit dense dans \mathbf{R} . Ce résultat a des applications à des domaines divers : billards, gammes musicales...



4. Que dire des sous-groupes de (\mathbf{R}_*^+, \times) ?
5. Démontrer que si G contient deux réels non nuls x et y tels que x/y ne soit pas rationnel, alors on est dans le cas **1**.
6. Soit θ un réel tel que θ/π soit irrationnel. Démontrer que $\{\cos n\theta ; n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

La densité de $\{\cos n\theta ; n \in \mathbf{N}\}$ est un résultat que l'on peut placer entre deux autres résultats :

- La suite $(\cos n\theta)_n$ diverge (résultat plus faible, que l'on peut montrer avec des formules de trigonométrie).

- La suite $(\cos n\theta)_n$ est équirépartie (résultat plus fort). Cette équirépartition correspond au fait que les termes de cette suite semblent tirés au hasard dans $[-1, 1]$.

Exercice 13 (Utilisation des caractérisations séquentielles). Soit A et B deux parties de \mathbf{R} non vides majorées. En utilisant la caractérisation par les suites de la borne supérieure, démontrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 14 (Résolution typique d'une équation fonctionnelle, programme mpsi). On cherche les applications continues sur \mathbf{R} , à valeurs dans \mathbf{C} , qui vérifient, pour tous x et y réels :

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

Dans la suite, f désigne une telle fonction.

1. Démontrer que $f(0) = 0$, et que f est impaire.

On fait $x = y = 0$, puis $y = -x$.

2. Démontrer que, pour tout réel x , pour tout entier naturel n , $f(nx) = nf(x)$.

Récurrence sur n , en écrivant $y = nx$ dans l'équation fonctionnelle.

3. Démontrer que, pour tout réel x , pour tout entier n , $f(nx) = nf(x)$.

Par imparité à partir de la propriété précédente.

4. Démontrer que, pour tout réel x , pour tout nombre rationnel r , $f(rx) = rf(x)$.

On part de $f\left(\frac{p}{q}x\right) = pf\left(\frac{1}{q}x\right)$ d'une part, $f(x) = f\left(\frac{q}{q}x\right) = qf\left(\frac{1}{q}x\right)$ d'autre part. On conclut bien

$$f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$$

5. Démontrer qu'il existe un nombre complexe α tel que, pour tout réel x ,
 $f(x) = \alpha x$.

Les fonctions $x \mapsto xf(1)$ et f sont continues et coïncident sur \mathbf{Q} dense, donc sont égales.

Exercice 15 (Equation fonctionnelle, Oral Mines-Telecom 2016).

Soit g l'ensemble des fonctions continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} telles que

$$\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2 \quad g(x+y) + g(x-y) = 2(g(x) + g(y))$$

1. Déterminer $g(0)$ et la parité de g .
2. Montrer que pour tout entier naturel n , $g(nx) = n^2g(x)$.
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}_*$,

$$g\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p^2}{q^2}g(x)$$

4. Déterminer g .

Exercice 16 (Autre équation fonctionnelle). On cherche les applications continues sur \mathbf{R} , à valeurs dans \mathbf{R} , qui vérifient, pour tous x et y réels :

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

Dans la suite, f désigne une telle fonction.

1. Démontrer que, si f est nulle en 0, elle est constamment nulle. On écarte désormais ce cas, dans toute la suite de l'exercice. Quelle est alors la valeur de f en 0?
2. Démontrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que, sur le segment $[0, a]$, f soit strictement positive.
3. On suppose dans un premier temps que $f(a) < 1$. On appelle α l'unique réel positif tel que $f(a) = \cos \alpha$. Démontrer que, pour tout entier p et tout entier naturel n :

$$f\left(\frac{pa}{2^n}\right) = \cos\left(\frac{p\alpha}{2^n}\right)$$

En déduire que f est de la forme $x \mapsto \cos(\phi x)$.

4. Que se passe-t-il si $f(a) > 1$? si $f(a) = 1$?

5. Retrouver ces résultats en supposant a priori f de classe C^2 et en obtenant à partir de la relation de départ une équation différentielle simple.

Exercice 17 (Une adhérence dans un espace fonctionnel, oral Centrale-Mines). On considère $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ et $F = \{f \in E / f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme N_∞ . Montrer que F est fermé.
2. On munit E de la norme N_1 . Montrer que F est dense dans E .
3. On munit E d'une norme quelconque. Montrer que F est soit dense dans E , soit fermé.

L'inégalité $|f(0)| \leq N_\infty(f)$ montre (par caractérisation de la continuité des applications linéaires) que l'application linéaire $\phi : f \mapsto f(0)$ est continue sur $(E, \|\cdot\|_\infty)$. Donc $F = \phi^{-1}(\{0\})$ est fermé dans cet espace.

(on peut aussi utiliser la caractérisation des fermés par les suites, la convergence pour N_∞ , alias convergence uniforme, implique la convergence simple en 0).

Si $f \in E$, on construit pour tout $n \geq 1$ une fonction continue f_n qui coïncide avec f sur $[1/n, 1]$, qui est affine sur $[0, 1/n]$ et vaut 0 en 0 (autrement dit, graphiquement, le graphe de f_n suit celui de f entre $1/n$ et 1, on complète par un segment de droite entre les points $(0, 0)$ et $(1/n, f(1/n))$). On montre que

$$N_1(f - f_n) \leq \frac{2}{n} N_\infty(f)$$

ce qui prouve que (f_n) converge dans (E, N_1) vers f . Or les f_n sont dans F . D'où la densité cherchée.

Dans le cas général, enfin, supposons F non fermé, soit $g \in \overline{F} \setminus F$. On a $g(0) \neq 0$, ce qui permet, f étant donnée dans E , de considérer $h = f - \frac{f(0)}{g(0)}g$. On a $h \in F$.

Et, si g est limite d'une suite (g_n) d'éléments de F , f est la limite de la suite $\left(h + \frac{f(0)}{g(0)}g_n\right)_{n \geq 1}$ d'éléments de F . Donc F est dense dans E .

Exercice 18.

1. Démontrer qu'un ouvert de \mathbf{R} peut s'écrire comme réunion d'intervalles ouverts.
 2. Démontrer qu'un ouvert de \mathbf{R} peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts (on rappelle que \mathbf{Q} est dénombrable).
-

La première question découle de la définition : si Ω est ouvert, pour tout $x \in \Omega$ il existe $r(x) > 0$ tel que $]x - r(x), x + r(x)[\subset \Omega$. Alors

$$\Omega = \bigcup_{x \in \Omega}]x - r(x), x + r(x)[$$

Pour la seconde, on remarque que par densité de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} il on peut fixer $u(x) \in \mathbf{Q}$ et $v(x) \in \mathbf{Q}_*^+$ tel que

$$x \in]u(x) - v(x), u(x) + v(x)[\subset]x - r(x), x + r(x)[$$

Et si on considère l'application $\alpha : x \mapsto (u(x), v(x))$, $\alpha(\Omega)$ est dénombrable (inclus dans un ensemble dénombrable), et

$$\Omega = \bigcup_{(u,v) \in \alpha(\Omega)}]u - v, u + v[$$

Exercice 19 (Oral Mines). On note E l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer la densité dans E de l'espace des fonctions polynomiales.

L'idée est d'aller dans le bon sens. . . La convergence uniforme passe à Soit $f \in E$. Il y a une suite (P_n) qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers f' . La suite (Q_n) , où

$$Q_n : x \mapsto f(a) + \int_a^x P_n(t) dt$$

converge uniformément sur $[a, b]$ vers f . Et donc (Q_n) converge vers f pour $\|\cdot\|$.

Exercice 20 (Détermination d'une adhérence dans un espace fonctionnel). On munit l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ de la norme de la convergence uniforme. On note F le sous-espace vectoriel des applications bornées à support compact, c'est-à-dire l'ensemble des éléments f de $\mathcal{B}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ pour lesquels il existe un réel M vérifiant

$$f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in [-M, M] .$$

Démontrer que l'adhérence de F est l'ensemble des applications bornées ayant pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 21 (Oral mines). Montrer que l'adhérence d'une partie convexe est convexe. Montrer que l'intérieur d'une partie convexe est convexe

Soit C convexe.

\overline{C} est convexe : si x et y sont dans \overline{C} , on peut trouver deux suites (x_n) et (y_n) d'éléments de C tels que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$ et $y_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y$. Donc, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$\underbrace{tx_n + (1-t)y_n}_{\in C} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} tx + (1-t)y$$

et donc, pour tout $t \in [0, 1]$, $tx + (1-t)y \in C$.

$\overset{\circ}{C}$ est convexe : Un peu plus difficile à écrire, faire un dessin. L'idée, si x et y sont intérieurs à C , est de prendre un $r > 0$ commun tel que $B(x, r)$ et $B(y, r)$ soient inclus dans C . On voit bien sur un dessin que, pour tout $t \in [0, 1]$, $B(tx + (1-t)y, r) \subset C$, il n'y a plus qu'à l'écrire!

Exercice 22 (Séparation de deux fermés). Soit A, B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E .

1. Démontrer que les deux parties $C = \{x \in E / d(x, A) = d(x, B)\}$ et $D = \{x \in E / d(x, A) \leq d(x, B)\}$ sont fermées.
2. On suppose A et B fermés, d'intersection vide. Démontrer qu'il existe une application f continue sur E , à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $f^{-1}(\{1\}) = A$ et $f^{-1}(\{0\}) = B$. On pourra par exemple construire une telle application à partir d'un quotient faisant intervenir les applications $x \mapsto d(x, A)$ et $x \mapsto d(x, B)$.
3. On suppose A et B fermés, d'intersection vide. Démontrer qu'il existe deux ouverts disjoints \mathcal{U} et \mathcal{V} tels que $A \subset \mathcal{U}$ et $B \subset \mathcal{V}$.

III Continuité des applications linéaires

- Pour démontrer qu'une application linéaire est continue, on cherche à majorer et à obtenir : $\|\phi(x)\|_F \leq \dots \leq k\|x\|_E$. Mais très souvent l'argument est « l'espace de départ est de dimension finie, or ϕ est linéaire, donc elle est continue ».
- Ce qui fait mauvais effet (mais est courant) : ne pas s'apercevoir que l'application dont on demande de montrer la continuité est linéaire ; on est alors amené à écrire des choses trop compliquées pour montrer cette continuité.
- Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on montre qu'un tel k n'existe pas ; pour ce faire, on construit une suite (x_n) telle que $(\|x_n\|_E)$ soit bornée (par exemple constante égale à 1) et pas $(\|\phi(x_n)\|_F)$, ou telle que $(\|x_n\|_E)$ converge vers 0 et pas $(\|\phi(x_n)\|_F)$.

Exercice 23. On munit $\mathbf{R}[X]$ de la norme N définie par $N(P) = \sup_{t \in [-1, 1]} |P(t)|$. Discuter, suivant la valeur du réel α , la continuité de l'application $P \mapsto P(\alpha)$.

Exercice 24. On munit l'espace $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$ de la norme usuelle N_1 . Pour tout élément f de $\mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, on définit

$$T(f) : x \mapsto \int_0^x f(t) dt$$

Démontrer que l'application T est linéaire continue.

Même question en remplaçant N_1 par N_∞ .

Pour N_1 :

Notons d'abord que si $f \in E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbf{R})$, $T(f)$ définit bien un élément de E (et même, $T(f) \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbf{R})$). La linéarité de T vient de la linéarité de l'intégrale.

Majorations classiques :

$$\begin{aligned} N_1(T(f)) &= \int_0^1 |T(f)(x)| \, dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| \, dt \right) \, dx \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| \, dt \right) \, dx \\ &= N_1(f) \end{aligned}$$

Première conclusion : T est continue, et $\|T\|_{\text{op}} \leq 1$.

Peut-on avoir égalité (pour $f \neq \tilde{0}$) dans la suite d'inégalités ci-dessus ? On prendra évidemment $f \geq 0$, mais avoir pour tout x l'égalité

$$\int_0^x |f(t)| \, dt = \int_0^1 |f(t)| \, dt$$

semble difficile. On peut approcher cette égalité avec des fonctions qui concentrent leur intégrale près de 0. Pour cela, on peut considérer pour tout $n \geq 1$ la fonction f_n définie par $f_n(x) = n(1/n - x)$ si $0 \leq x \leq 1/n$ et $f_n(x) = 0$ sinon (faire un dessin !). On calcule $N_1(f_n) = 1/2n$ (en fait ce n'est même pas nécessaire), et il suffit de minorer

$$N_1(T(f_n)) \geq \int_{1/n}^1 |T(f_n)(x)| \, dx = (1 - 1/n)N_1(f_n)$$

On a

$$\forall n \geq 1 \quad \|T\|_{\text{op}} \geq \frac{N_1(T(f_n))}{N_1(f_n)}$$

ce qui, en prenant la limite quand $n \rightarrow +\infty$, donne $\|T\|_{\text{op}} \geq 1$. Et donc l'égalité.

Pour N_∞ :

C'est plus facile, car on a

$$\forall x \in [0, 1] \quad |T(f)(x)| \leq xN_\infty(f) \leq N_\infty(f)$$

donc $N_\infty(T(f)) \leq N_\infty(f)$ et donc déjà T est continue, et $\|T\|_{\text{op}} \leq 1$, cette fois la norme subordonnée est « atteinte », par exemple pour $f = \tilde{1}$.

Exercice 25 (Oral Mines). Soit (a_k) une suite de complexes. Pour $P = \sum p_k X^k \in \mathbf{C}[X]$, on pose

$$N_a(P) = \sum_k |a_k p_k|$$

1. Condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que N_a soit une norme sur $\mathbf{C}[X]$?

2. Condition nécessaire et suffisante pour que N_a et N_b soient équivalentes ?
3. Pour quelles suites a l'endomorphisme de $\mathbf{C}[X] : P \mapsto P'$ est-il continu ?

Exercice 26 (Oral X...un peu abrégé). Soit E un espace vectoriel normé, p un projecteur continu non nul. Montrer que $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires fermés de E .

Exercice 27. Soit T une forme linéaire sur un espace vectoriel normé E . On veut démontrer que T est continue si et seulement si $\ker T$ est fermé.

1. Démontrer que, si T est continue, $\ker T$ est fermé.
2. Réciproquement, on suppose $\ker T$ fermé, et T non nulle ; fixons x_0 tel que $T(x_0) \neq 0$. On note $\delta = d(x_0, \ker T)$. Montrer que $\delta > 0$.
Montrer alors que, pour tout $y \in E$:

$$|T(y)| \leq \frac{|T(x_0)|}{\delta} \|y\|$$

puis conclure.

1. $\ker T$ est l'image réciproque par T , continue, du singleton $\{0\}$, qui est fermé. Ce qui conclut.
2. $\delta = 0$ signifierait que x_0 est dans $\overline{\ker T}$, adhérence de $\ker T$. Or $\ker T$ est fermé, donc $\overline{\ker T} = \ker T$, et par hypothèse $x_0 \notin \ker T$, on a donc bien

$$\boxed{\delta > 0}$$

L'inégalité suivante est moins évidente. Mais elle est claire si $T(y) = 0$. Supposons donc $T(y) \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} |T(y)| \leq \frac{|T(x_0)|}{\delta} \|y\| &\Leftrightarrow \delta \leq \frac{|T(x_0)|}{|T(y)|} \|y\| \\ &\Leftrightarrow \delta \leq \left\| \frac{T(x_0)}{T(y)} y \right\| \end{aligned}$$

Mais, si on pose $z = \frac{T(x_0)}{T(y)} y$, on remarque que $T(z) = T(x_0)$, donc $x_0 - z \in \ker T$, donc

$$\|z\| = \|x_0 - (x_0 - z)\| \geq \delta$$

ce qui donne bien la conclusion. Comme l'inégalité est vraie pour tout y , on en déduit la continuité de T .

Exercice 28. On désigne par n un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe une constante α_n telle que, pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n on ait :

$$|P(0)| \leq \alpha_n \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

Exercice 29 (Quelques questions classiques sur la topologie matricielle). Ici, lorsque l'on parle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

1. Vérifier que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
3. Démontrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$.
4. Ici, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Démontrer que le groupe des matrices orthogonales est compact.
5. L'ensemble des matrices symétriques est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ? (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
6. L'ensemble des matrices nilpotentes est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ? (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
7. Démontrer que l'ensemble des matrices de rang 1 n'est ni ouvert ni fermé.
8. Démontrer que l'ensemble des matrices de rang supérieur ou égal à 1 est ouvert.

Exercice 30. Topologie matricielle, encore *On utilise le chapitre A15*

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ n'est ni ouvert ni fermé.
2. En utilisant par exemple l'application

$$M \longmapsto \text{Tr}(M)^2 - 4\det(M)$$

déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.

Une suite de matrices diagonalisables qui converge vers une matrice qui ne l'est pas : par exemple, $\left(\begin{pmatrix} \frac{1}{p} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)_{p \geq 1}$. Une suite de matrices non diagonalisables

qui converge vers une matrice qui l'est : par exemple, $\left(\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right)_{p \geq 1}$.

L'application proposée (notons-là ϕ) est continue. On remarque que $\phi(M)$ est le discriminant de P_M . Donc $\phi^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert, et c'est d'autre part l'ensemble des matrices diagonalisables ayant deux valeurs propres distinctes. Comme l'ensemble des matrices diagonalisables n'est pas voisinage d'une matrice d'homothétie (au voisinage de λI_2 il y a toujours une matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$), l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables est l'ensemble des matrices diagonalisables à deux valeurs propres distinctes. Mais d'autre part, $\phi^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé qui contient l'ensemble des matrices diagonalisables. C'est l'ensemble des matrices trigonalisables. Et toute matrice trigonalisable est limite d'une suite de matrices diagonalisables (classique de la topologie matricielle), on a donc bien là l'adhérence de l'ensemble des matrices diagonalisables.
