# Compacité : quelques corrigés

**Soit $(u_n)$ une suite de nombres complexes et $T$ l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. On suppose que $(u_n)$ est bornée, que $T$ est fini (il est non vide d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass), et que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Démontrer que $(u_n)$ converge.**

---

On note $T = \{x_1, \ldots, x_p\}$. Soit $\delta = \min\{|x_i - x_j| \ ; \ 1 \leq i, j \leq p, \ i \neq j\}$. Et soit

$$A = \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \delta/3)$$

Alors $\{n \in \mathbf{N} \ / \ u_n \notin A\}$ est fini. Sinon, on pourrait (classiquement) extraire de $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{\phi(n)} \notin A$$

De cette suite, bornée car extraite d'une suite bornée, on pourrait extraire une suite convergente : il existerait donc une extractrice $\psi$ et un complexe $\ell$ tels que

$$u_{\phi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Or, comme $\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{\phi(\psi(n))} \notin A$, pour chaque $i$ entre 1 et $p$ on a

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad |u_{\phi(\psi(n))} - x_i| \geq \delta/3$$

et donc, en prenant les limites quand $n \to +\infty$,

$$|\ell - x_i| \geq \delta/3$$

ce qui est contradictoire : $\ell$ serait une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$, et ne serait aucun des $x_i$.
Il existe donc un rang $N_1$ tel que

$$\forall n \geq N_1 \qquad u_n \in A$$

Mais il existe par hypothèse un rang $N_2$ tel que

$$\forall n \geq N_2 \qquad \|u_{n+1} - u_n\| \leq \delta/3$$

Soit $n \geq \max(N_1, N_2)$ ; $u_n \in A$, donc il existe $i$ tel que

$$u_n \in B(x_i, \delta/3)$$

Pour la même raison, il existe $j$ tel que

$$u_{n+1} \in B(x_j, \delta/3)$$

et, donc,

$$\|x_i - x_j\| \leq \|x_i - u_n\| + \|u_n - u_{n+1}\| + \|u_{n+1} - x_j\| < 3\delta/3 = \delta$$

Mais donc $x_i = x_j$. Et donc, à partir du rang $\max(N_1, N_2)$, les $u_n$ sont tous dans la même boule $B(x_i, \delta/3)$. Ce qui implique que toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$ sont dans $B'(x_i, \delta/3)$. Or le seul élément de $T$ qui soit dans cette boule est $x_i$. Donc il n'y a qu'une valeur d'adhérence, vers laquelle la suite $u_n$ converge puisque, si on remplace $\delta/3$ par un $\epsilon > 0$ plus petit, le même raisonnement que précédemment montre qu'à partir d'un certain rang tous les termes de la suite $(u_n)$ sont dans $B(x_i, \epsilon)$.

---

**Soit $(u_n)$ une suite réelle bornée, telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Démontrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un segment.**

---

Un segment est un intervalle borné qui contient ses bornes. Appelons $T$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$, le théorème de Bolzano-Weierstrass montre déjà que $T \neq \emptyset$.

• **$T$ est borné**

Ce n'est pas le plus dur ; soit $a, b$ réels tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad a \leq u_n \leq b$$

Alors, si $\phi$ est une extractrice,

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad a \leq u_{\phi(n)} \leq b$$

et donc, si $(u_{\phi(n)})$ converge, sa limite est dans $[a, b]$ (les inégalités larges étant conservées à la limite). Donc $T \subset [a, b]$

• **$T$ est un intervalle**

Il s'agit ici de montrer que $T$ est convexe, c'est-à-dire

$$\big(a \in T \text{ et } b \in T\big) \Rightarrow [a, b] \subset T$$

On a le droit de supposer $a < b$ ($a$ et $b$ jouent des rôles symétriques, et si $a = b$ il n'y a rien à montrer). On a donc $a \in T$, $b \in T$, $a < b$. Soit $c \in ]a, b[$, supposons $c \notin T$. On sait qu'alors (caractérisation du cours) il existe $\delta > 0$ tel que $\{n \in \mathbf{N} \ / \ u_n \in ]c - \delta, c + \delta[\}$ est fini. Il existe donc $N_1$ tel que

$$n \geq N_1 \ \Rightarrow \ u_n \notin ]c - \delta, c + \delta[$$

Il existe aussi un rang $N_2$ tel que

$$n \geq N_2 \ \Rightarrow \ |u_{n+1} - u_n| \leq \delta$$

Soit $n \geq \max(N_1, N_2)$ ;
si $u_n \geq c + \delta$, il est impossible d'avoir $u_{n+1} \leq c - \delta$ (car sinon on aurait $|u_{n+1} - u_n| \geq 2\delta > \delta$), et comme $u_{n+1} \notin ]c - \delta, c + \delta[$, on conclut nécessairement : $u_{n+1} \geq c + \delta$.
De même, si $u_n \leq c - \delta$, on a nécessairement $u_{n+1} \leq c - \delta$.
On aboutit ainsi à deux possiblités : $\forall n \geq \max(N_1, N_2) \quad u_n \geq c + \delta$ ou $\forall n \geq \max(N_1, N_2) \quad u_n \leq c - \delta$. Mais dans le premier cas $a$ ne peut pas être valeur propre de $(u_n)$, dans le deuxième cas $b$ ne peut pas être valeur propre de $(u_n)$.
On aboutit donc à une contradiction.

• $T$ **contient ses bornes**

Soit $M = \sup(T)$. Supposons $M \notin T$ ; il existe alors $\delta > 0$ tel que $\{n \in \mathbf{N} \ / \ u_n \in ]M-\delta, M+\delta[\}$ est fini. Ce qui empêche toute suite extraite de $(u_n)$ de converger vers une limite $\ell \in [M - \delta/2, M]$. On aboutit à une contradiction (il n'est pas beaucoup plus dur de montrer que $T$ est fermé, résultat plus général). $T$ contient aussi, pour la même raison, sa borne inférieure.

---

**Oral Centrale. Donner un exemple de partie fermée bornée non compacte d'un espace vectoriel normé.**

---

Evidemment, on n'a pas trop intérêt à chercher en dimension finie. Dans $\mathbf{K}[X]$ muni de la norme $\|P\| = \max(|p_k|)$ (notations « évidentes »), une suite extraite de la suite $(X^n)$ ne peut pas converger, car si $\phi$ est une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$, $\|X^{\phi(n)} - X^{\phi(n+1)}\| = 1$.

---

**Oral Mines. On munit l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ de la norme de la convergence uniforme. Montrer que la boule unité de cet espace normé n'est pas compacte.**

---

On peut s'inspirer de la question précédente, et construire une suite $(f_n)$ d'éléments de la boule vérifiant, si $p \neq q$, $\|f_p - f_q\| = 1$. Ce qui empêchera toute suite extraite de converger. Il suffit pour cela, si $n \geq 2$, de prendre une fonction affine par morceaux continue nulle en-dehors du segment $\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)\right]$, valant 1 au milieu de ce segment.

---

**Compacts emboîtés.**

1. **Soit $(K_n)$ une suite de compacts non vides d'un espace vectoriel normé, décroissante pour l'inclusion (pour tout $n$, $K_{n+1} \subset K_n$. Démontrer que l'intersection $\bigcap_n K_n$ est un compact non vide.**
2. **Pour tout entier naturel $n$, montrer que $\delta_n = \sup_{x,y \in K_n} d(x,y)$ est bien défini. On l'appelle diamètre du compact $K_n$. Démontrer qu'il existe deux éléments $x_n$ et $y_n$ de $K_n$ tels que $\delta_n = d(x_n, y_n)$.**
3. **Quelle conclusion peut-on rajouter au a. sous l'hypothèse supplémentaire $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ? (on ne se sert pas du résultat de la question précédente)**

---

1. C'est la non vacuité qui est consistante, pas la compacité : $\bigcap_n K_n$, intersection de fermés, est fermée et est incluse dans $K_0$ qui est compact. Donc $\bigcap_n K_n$ est compacte.

   Pour montrer que $\bigcap_n K_n$ est non vide, prenons dans chaque $K_n$ un élément $x_n$. La suite $(x_n)$ est une suite d'éléments de $K_0$ compact. On peut donc en extraire une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $\ell \in K_0$. Mais, si $p$ est un entier quelconque, si $n \geq p$ on a $\phi(n) \geq n \geq p$, donc $x_{\phi(n)} \in K_p$ ; la suite $(x_{\phi(n)})$ est donc à termes dans $K_p$ à partir d'un certain rang. Et donc, comme $K_p$ est fermé, $\ell \in K_p$. Finalement, $\ell \in \bigcap_n K_n$.

---

2. On peut utiliser des méthodes assez différentes : par exemple, dire que $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est continue sur $K_n \times K_n$ qui est compact, donc atteint un maximum. Pourquoi $(x,y) \mapsto d(x,y)$ est-elle continue ? on est dans un espace vectoriel normé $E$ muni de la norme $\|.\|$, on sait (voir produit d'evn) que $E \times E$ est muni de la norme $N$ définie par

$$N(x,y) = \max(\|x\|, \|y\|)$$

   Si $(x,y)$ et $(x',y')$ sont deux éléments de $E \times E$,

$$\begin{aligned} |d(x',y') - d(x,y)| &= |\|y'-x'\| - \|y-x\|| \\ &\leq \|(y'-x') - (y-x)\| \\ &\leq \|y'-y\| + \|x'-x\| \\ &\leq 2N\left((x',y') - (x,y)\right) \end{aligned}$$

   Et donc $d$ est 2-lipschitzienne.

Autre méthode, on peut considérer une suite $(s_p, t_p)$ d'éléments de $K_n^2$ telle que la suite $(d(s_p, t_p))$ converge vers $\delta_n$. De la suite $(x_p, y_p)$ on peut, comme $K_n^2$, extraire une suite convergente, etc...

---

3. Alors $\bigcap_n K_n$ est un singleton. En effet, si $x$ et $x'$ sont dans $\bigcap_n K_n$, alors pour tout $n$ on a $\|x - x'\|\delta_n$.

---

**Un résultat classique.**
**Soit $(u_n)$ une suite convergente dans un evn de dimension finie. On note $\ell$ sa limite. Montrer que**

$$K = \{\ell\} \cup \{u_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$$

**est compact.** *Ce résultat est vrai même si on n'a pas l'hypothèse de dimension finie. Mais il est alors un peu plus difficile à montrer.*

---

L'hypothèse de dimension finie incite à montrer que $K$ est fermé et borné. Une suite convergente est bornée, il existe $M$ tel que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \|u_n\| \leq M$$

et alors, les inégalités larges « passant à la limite », $\|\ell\| \leq M$. Donc $K$ est borné. Montrons que $K^c$ est ouvert. Si $x \in K^c$, alors $x \neq \ell$, donc $\delta = d(x, \ell) > 0$. A partir d'un certain rang $n_0$, $u_n \in B(\ell, \delta/2)$. Et donc, à partir de ce rang, $u_n \notin B(\ell, \delta/2)$. Et évidemment $\ell \notin B(\ell, \delta/2)$. Nous n'avons alors plus à nous occuper que d'un nombre fini d'éléments de $K$, ce qui est facile : si

$$r = \min(\delta/2, \|x - u_0\|, \|x - u_1\|, \ldots, \|x - u_{n_0-1}\|)$$

alors $r > 0$ et $B(x, r) \cap K = \emptyset$, i.e. $B(x, r) \subset K^c$.

En dimension quelconque, la définition de Borel Lebesgue est ici très efficace. Mais elle est hors-programme. On peut alors considérer une suite $(v_p)_{p \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $K$. Examinons deux cas :

- S'il existe un $n \in \mathbf{N}$ tel que $\{p \in \mathbf{N} \ ; \ v_p = u_n\}$ soit infini, alors on peut extraire de $(v_p)_{p \in \mathbf{N}}$ une suite constante égale à $u_n$.
- Sinon, montrons que la suite $(v_p)_{p \in \mathbf{N}}$ converge vers $\ell$. Soit $\epsilon > 0$. Soit $N$ tel que $\forall n \geq N \qquad \|u_n - \ell\| \leq \epsilon$. Réunion d'ensembles finis, $\{p \in \mathbf{N} \ ; \ v_p \in \{u_0, \ldots, u_{N-1}\}\}$ est un ensemble fini. Si $p_0$ majore strictement cet ensemble, alors

$$(p \geq p_0) \Rightarrow (\|v_p - \ell\| \leq \epsilon)$$

---

**Un théorème de point fixe, oral Centrale**

**Dans tout cet exercice, on considère un compact $X$ , et $f$ une application de $X$ dans $X$, vérifiant, pour tous $x$ et $y$ dans $X$ :**

$$\Big(x \neq y\Big) \Longrightarrow \Big(\|f(x) - f(y)\| \ < \ \|x - y\|\Big)$$

1. **Démontrer l'existence et l'unicité d'un point fixe pour $f$ (on montrera que l'application $g \ : \ x \mapsto \|f(x) - x\|$ atteint un minimum, et que ce minimum est nul).**

---

L'application $g$ est continue ($f$ est 1-lipschitzienne, car pour tous $x$ et $y$, même si $x = y$, on a $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$, donc $f$ est continue, et $\|.\|$ est continue), $X$ est compact, donc $g$ est minorée sur $X$ et atteint un minimum. Soit $\alpha$ ce minimum, $x_0$ un point en lequel il est atteint ; donc

$$\alpha = \|f(x_0) - x_0\|$$

Si $x_0 \neq f(x_0)$, on a $\|f(x_0) - f\big(f(x_0)\big)\| \ < \ \|x_0 - f(x_0)\|$, donc $g\big(f(x_0)\big) < g(x_0)$, ce qui contredit la minimalité de $g(x_0)$. Donc $x_0 = f(x_0)$, donc $\alpha = 0$.

---

2. **On définit une suite $(x_n)$ d'éléments de $X$ par le choix arbitraire d'un premier terme $x_0$ dans $X$ et par la relation de récurrence**

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n) \ .$$

**On note $a$ le point fixe de $f$.**

(a) **Démontrer que la suite de terme général $\|x_n - a\|$ converge ; on note $\delta$ sa limite.**

---

Il suffit de remarquer que

$$\|x_{n+1} - a\| = \|f(x_n) - f(a)\| \leq \|x_n - a\|$$

et une suite décroissante positive (donc minorée) converge. On peut dire que $\delta \geq 0$.

---

**Montrer que, si $b$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)$, alors $\|b - a\| = \delta$.**

---

Soit $\phi$ une extractrice telle que la suite $\left(x_{\phi(n)}\right)$ converge vers $b$. Extraite de la suite $\left(\|x_n - a\|\right)_{n\in\mathbf{N}}$, la suite $\left(\|x_{\phi(n)} - a\|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\delta$. Mais elle converge aussi vers $\|b-a\|$, d'où le résultat cherché.

---

(b) **Montrer que, si $b$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)$, alors $f(b)$ en est aussi une.**

---

Si la suite $\left(x_{\phi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $b$, la suite $\left(x_{1+\phi(n)}\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $f(b)$ par continuité de $f$, car $f\left(x_{\phi(n)}\right) = x_{1+\phi(n)}$. Or cette suite est extraite de $(x_n)$, car $n \mapsto 1+\phi(n)$ est une extractrice.

---

(c) **Conclure que la suite $(x_n)$ converge vers $a$**

---

$(x_n)$ a au moins une valeur d'adhérence ($X$ est compact), soit $b$ une telle valeur d'adhérence. On sait qu'alors $f(b)$ en est une aussi. Donc, comme on l'a vu,

$$\|b-a\| = \|f(b)-a\| = \delta$$

Mais alors $\|b-a\| = \|f(b)-f(a)\|$, donc nécessairement $a = b$, donc $\delta = 0$, ce qui conclut.

---

**[Diamètre d'un compact : il est atteint] Soit $K$ un compact non vide d'un evn $(E, \|.\|)$. La distance associée à $\|.\|$ est notée $d$. Vérifier que**

$$\delta(K) = \sup\{d(x,y) \ ; \ (x,y) \in \mathbf{K}^2\}$$

**est bien défini. On l'appelle diamètre de $K$. Montrer qu'il existe $x_0$ et $y_0$ dans $K$ tels que**

$$\delta(K) = d(x_0, y_0)$$

---

Déjà résolu dans un autre exercice, on peut faire ça très élémentairement. On considère $u_n$ et $v_n$ dans $K$ tels que

$$\delta(K) - 1/n \leq d(u_n, v_n) \leq \delta(K)$$

(si $n \geq 1$). De la suite $(u_n)$ on peut extraire une suite $\left(u_{\phi(n)}\right)$ convergeant vers $x_0 \in K$. De la suite $\left(v_{\phi(n)}\right)$ on peut alors extraire la suite $\left(v_{\phi(\psi(n))}\right)$ qui converge vers $y_0 \in K$. Et donc

$$d(u_{\phi(\psi(n))}, v_{\phi(\psi(n))}) = \|u_{\phi(\psi(n))} - v_{\phi(\psi(n))}\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|x_0 - y_0\| = d(x_0, y_0)$$

Or d'autre part on a défini $(u_n)$ et $(v_n)$ de telle manière que

$$d(u_n, v_n)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \delta$$

ce qui permet de conclure. La double extraction est en fait une redémonstration du fait que si $K$ est compact, $K \times K$ l'est, ce qu'on pouvait éviter.

---

**[distance entre deux compacts : elle est atteinte] Soit $K_1$, $K_2$ deux compacts d'un espace vectoriel normé. Démontrer qu'il existe $a$ et $b$ respectivement dans $K_1$ et $K_2$ tels que $d(K_1, K_2) = d(a, b)$ ($d(K_1, K_2) = \inf_{x \in K_1, y \in K_2} d(x, y)$). Vérifier que, en dimension finie, ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement l'une des parties compacte et l'autre fermée. Mais montrer par un exemple qu'il est faux sous la seule hypothèse $K_1$ et $K_2$ fermés.**

---

On a montré dans un autre exercice que $(x, y) \mapsto d(x, y)$ était continue, or $K_1 \times K_2$ est compact (produit de compacts), une application continue sur un compact atteint un minimum. On peut aussi, plus laborieusement, comme dans l'exercice précédent, prendre pour chaque $n \geq 1$ un élément $u_n$ de $K_1$ et un élément $v_n$ de $K_2$ tels que

$$d(K_1, K_2) \leq \|u_n - v_n\| \leq d(K_1, K_2) + \frac{1}{n}$$

puis faire une extraction (en tenant compte de la compacité de $K_1 \times K_2$ donnée par le cours) ou deux extractions successives (en l'oubliant).

On est maintenant en dimension finie, on suppose $K_1$ compact et $K_2$ « seulement » fermé. La méthode un peu laborieuse va être utile ! en effet, comme ci-dessus, on prend pour chaque $n \geq 1$ un élément $u_n$ de $K_1$ et un élément $v_n$ de $K_2$ tels que

$$d(K_1, K_2) \leq \|u_n - v_n\| \leq d(K_1, K_2) + \frac{1}{n}$$

et on extrait de la suite $(u_n)$ une suite $\left(u_{\phi(n)}\right)$ convergeant vers $a \in K_1$. Cette suite est bornée (car elle converge, mais de toute façon la suite $(u_n)$ était déjà bornée car dans un compact $K_1$), et la suite $\left(u_{\phi(n)} - v_{\phi(n)}\right)$ est également bornée, donc la suite $\left(v_{\phi(n)}\right)$ est bornée. Mais on est en dimension finie, on peut donc en extraire une suite $\left(v_{\phi(\psi(n))}\right)$ qui converge dans $K_2$ fermé vers $b \in K_2$. On a

$$\|u_{\phi(\psi(n))} - v_{\phi(\psi(n))}\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} \|b - a\|$$

et le résultat s'ensuit assez facilement.
Graphiquement, dans $\mathbf{R}^2$, on voit que l'axe des abscisses et l'ensemble $\{(x, 1/x) \ ; \ x > 0\}$ sont fermés, à distance nulle non atteinte. Ce qui se justifie assez bien.

---

**Soit $K$ un compact inclus dans un ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace vectoriel normé. Démontrer qu'il existe un réel strictement positif $r$ tel que toute boule ouverte centrée en un élément de $K$ et de rayon $r$ soit incluse dans $\mathcal{U}$.**

---

Le plus rapide : $x \mapsto d(x, U^c)$ est 1-lipschitzienne, donc continue, donc elle atteint un minimum sur $K$ compact. Ce minimum est strictement positif (s'il était nul, si $x_0$ était un point en lequel il était atteint, on aurait $d(x_0, \mathcal{U}^c) = 0$ et donc $x_0 \in \overline{\mathcal{U}^c} = \mathcal{U}^c$, contradiction avec l'hypothèse $K \cap \mathcal{U}^c = \emptyset$). Si on appelle $r$ ce minimum, $r$ convient.
La plus naturelle (peut-être) : supposons qu'il n'en soit rien. Pour tout $n$, il existe donc $x_n \in K$ tel que

$$B(x_n, \frac{1}{n+1}) \not\subset \mathcal{U}$$

et on peut extraire de $(x_n)$ une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge vers $a \in K$. Mais, dans chaque $B\left(x_{\phi(n)}, \dfrac{1}{\phi(n)+1}\right)$ il y a un $y_n \in \mathcal{U}^c$. La suite $\left(x_{\phi(n)} - y_n\right)$ converge vers 0, donc $(y_n)$ converge vers $a$, qui est donc dans $\mathcal{U}^c$ car celui-ci est fermé. C'est une contradiction.

---

**[Oral Centrale] Soit $A, B$ deux parties d'un espace vectoriel normé $E$. On définit**

$$A + B = \{a + b\ ,\ (a, b) \in A \times B\}$$

1. **Montrer que, si $A$ est ouvert, $A + B$ l'est.**

---

Soit $x \in A + B$ ; soit $(a, b) \in A \times B \quad x = a + b$. Il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$ ; mais, facilement, $B(a+b, r) = \{y+b\ ;\ y \in B(a, r)\} \subset A+B$ ce qui conclut.

2. **Montrer que, si $A$ est compacte et $B$ fermée, $A + B$ est fermée.**

---

Soit $x \in \overline{A + B}$. Il existe une suite $(x_n)$ d'éléments de $A+B$ qui converge vers $x$. Il existe donc deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ d'éléments de $A$ et $B$ respectivement telles que

$$a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$$

On extrait de $(a_n)$ une suite $(a_{\phi(n)})$ qui converge vers $a \in A$ (par compacité) ; comme la suite $(a_{\phi(n)} + b_{\phi(n)})$ converge vers $x$, la suite $(b_{\phi(n)})$ converge vers $x - a$. Et $B$ est fermé, donc $x - a \in B$, et donc $x \in A + B$.

3. **Montrer que, si $A$ et $B$ sont compactes, $A + B$ l'est.**

---

Soit $(x_n)$ une suite d'éléments de $A + B$ et, pour tout $n$, soit $(a_n, b_n) \in A \times B$ tel que $x_n = a_n + b_n$. De $(a_n)$ on extrait $(a_{\phi(n)})$ convergeant vers $a \in A$. Puis de $\left(b_{\phi(n)}\right)$ on extrait $\left(b_{\phi(\psi(n))}\right)$ convergeant vers $b \in B$. Alors la suite $\left(x_{\phi(\psi(n))}\right)$ converge vers $A + B$.

4. **Trouver $A$ et $B$ fermées telles que $A + B$ ne le soit pas.**

---

Mieux vaut éviter que $A$ ou $B$ soit compacte. Soit $A = \mathbf{N}_*$, et $B = \{-n+\dfrac{1}{n}\ ;\ n \geq 1\}$. $A$ et $B$ sont fermées. Et $0 \notin A + B$, or $0 \in \overline{A + B}$.

**Soit $A$ une partie bornée non vide de $\mathbf{K}^p$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, muni d'une norme quelconque. On veut montrer qu'il existe une boule de rayon minimal contenant $A$.**

1. **On définit $D$ comme l'ensemble des $r \geq 0$ tels qu'il existe une boule fermée de rayon $r$ contenant $A$. Pourquoi $D$ admet-elle une borne inférieure ? on la note $r_0$.**

---

Comme $A$ est bornée, $D \neq \emptyset$. Et $D$ est minorée (par 0).

---

2. **Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}_*$, $\rho_n = r_0 + 1/n$. Montrer que, pour tout $n$, il existe $x_n$ tel que $A$ soit incluse dans la boule de centre $x_n$ et de rayon $\rho_n$.**

---

Pour tout $n \in \mathbf{N}_*$, $\rho_n = r_0 + 1/n$ ne minore pas $D$. Il existe donc une boule fermée de rayon $r < \rho_n$ qui contient $A$. Soit $x_n$ le centre d'une telle boule. A fortiori, la boule fermée $B'(x_n, \rho_n)$, qui contient $B'(x_n, r)$, contient $A$.

---

3. **Montrer que la suite $(x_n)$ est bornée.**

---

Soit $M$ tel que

$$\forall a \in A \qquad \|a\| \leq M$$

Si $a_0$ est un élément quelconque de $A$ (dont la non vacuité est une hypothèse oubliée mais assez évidente, sinon le problème n'a pas d'intérêt), pour tout $n$ on a

$$\|x_n\| \leq \|x_n - a\| + \|a\| \leq \rho_n + M \leq r_0 + 1 + M$$

---

4. **Conclure.**

---

De la suite $(x_n)$ bornée dans un espace de dimension finie, on peut extraire une suite convergente. Soit $\big(x_{\phi(n)}\big)_{n\in\mathbf{N}}$ une telle suite, soit $\ell$ sa limite. Pour tout $n$,

$$A \subset B'\big(x_{\phi(n)}, r_0 + \frac{1}{\phi(n)}\big)$$

Et on pense pouvoir en déduire

$$A \subset B'(\ell, r_0)$$

ce qui n'est pas très difficile ; en effet, si $a \in A$, pour tout $n$ on a

$$\|a - x_{\phi(n)}\| \leq r_0 + \frac{1}{\phi(n)}$$

et les inégalités larges « passent à la limite », d'où

$$\|a - \ell\| \leq r_0$$

---

5. **Dans le cas de la norme $\|.\|_\infty$, dessiner un ensemble $A$ pour lequel il n'y a pas unicité d'une telle boule de rayon minimal.**

---

Un segment parallèle à un des axes de coordonnées convient.

---

6. **Dans le cas de la norme $\|.\|_2$, montrer qu'il y a unicité de la boule de rayon minimal contenant $A$.**

---

Comme il y a unicité du rayon minimal ($r_0$), supposons que les deux boules fermées de centres $x_1$ et $x_2$ et de rayon $r_0$ contiennent $A$. Un petit dessin (avec un compas !) convainc (ou persuade, si on préfère conjuguer le premier groupe) que $A$ est inclus dans la boule fermée de centre $\frac{1}{2}(x_1+x_2)$ et de rayon $\sqrt{r_0^2 - \frac{\delta^2}{4}}$ où $\delta = d(x_1, x_2)$. Le prouver est un problème de géométrie euclidienne : supposons $a \in A$, alors

$$\|a-\frac{1}{2}(x_1+x_2)\|^2 = \frac{1}{4}\|(a-x_1)+(a-x_2)\|^2 = \frac{1}{4}\Big(2(\|a-x_1\|^2+\|a-x_2\|^2)-\|(a-x_1)-(a-x_2)\|^2\Big)$$

(identité du parallélogramme) et donc

$$\|a - \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\|^2 \leq \frac{1}{4}\big(2(r_0^2 + r_0^2) - \delta^2\big)$$

Soit $f$ une application définie sur un e.v.n. de dimension finie, à valeurs dans $\mathbf{R}$, continue, et telle que

$$\lim_{||x|| \to +\infty} \Big(f(x)\Big) = +\infty$$

Démontrer que $f$ atteint un minimum.

---

On « borne » le problème pour se ramener à un compact. Soit $A > 0$ tel que

$$\|x\| \geq A \Longrightarrow f(x) \geq f(0_E)$$

Sur la boule fermée $B'(0_E, A)$, fermée et bornée en dimension finie, $f$ atteint un minimum. On voit que ce minimum est global.

---

**Soit $f$ une bijection continue d'un compact $K$ dans un compact $K'$. Démontrer que $f^{-1}$ est continue (c'est-à-dire que $f$ est un homéomorphisme).**

---

Soit $\beta \in K'$. Soit $(y_n)$ une suite d'éléments de $K'$ qui converge vers $K'$. On veut montrer que la suite $\left(f^{-1}(y_n)\right)$ converge vers $f^{-1}(\beta)$. Remarquons que si $\phi$ est une extractrice, si la suite $\left(f^{-1}\left(y_{\phi(n)}\right)\right)$ converge vers $\alpha$, par continuité de $f$ en $\alpha$, $\left(y_{\phi(n)}\right)$ converge vers $f(\alpha)$, donc $f(\alpha) = \beta$. Donc $\alpha = f^{-1}(\beta)$.
Or une suite dans un compact qui a une valeur d'adhérence unique converge. On conclut donc que la suite $\left(f^{-1}(y_n)\right)$ converge vers $f^{-1}(\beta)$.
Soit $f$ une application définie sur un e.v.n. de dimension finie, à valeurs dans un e.v.n., continue, et telle que

$$\lim_{||x||\to+\infty} ||f(x)|| = 0$$

Démontrer qu'elle est uniformément continue.

---

Même principe que le précédent, un peu plus technique. Soit $\epsilon > 0$. Fixons $A$ tel que

$$\|x\| \geq A \implies \|f(x)\| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Sur $B'(0_E, A+1)$, fermé et borné en dimension finie donc compact, $f$ est uniformément continue. Soit donc $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in B'(0_E, A+1)^2 \qquad \|y - x\| \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$$

On peut sans restriction supposer $\eta \leq 1$. Alors, pour tous $x, y$ dans $E$ tels que $\|x - y\| \leq \eta$, on a $(x,y) \in B'(0_E, A+1)^2$ ou $\|x\| \geq A$ et $\|y\| \geq A$, dans les deux cas on conclut $\|f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$, on a donc bien continuité uniforme.

---

**[Propriété de Borel-Lebesgue] Soit $K$ un compact d'un espace vectoriel $E$, $\left(\mathcal{O}_i\right)_{i\in I}$ une famille d'ouverts tels que**
$K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.

1. **Démontrer qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x$ dans K, la boule ouverte $B(x,\epsilon)$ soit incluse dans un ouvert $\mathcal{O}_i$.**

   ---

   Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors (*écriture de la négation*) pour tout $\epsilon > 0$ il existe $x \in K$ tel que $B(x,\epsilon)$ ne soit incluse dans aucun $\mathcal{O}_i$. En particulier (*construction d'une suite*) pour tout $n \geq 1$ il existe $x_n \in K$

tel que $B(x_n, 1/n)$ ne soit inclus dans aucun $\mathcal{O}_i$. On peut (*utilisation de la compacité*) extraire de $(x_n)$ une suite $\big(x_{\phi(n)}\big)_{n\geq 1}$ qui converge vers $\ell \in K$. Mais (*recherche d'une contradiction*) il existe donc $i_0$ tel que $\ell \in \mathcal{O}_{i_0}$, et $\mathcal{O}_{i_0}$ est ouvert, il existe donc $\delta > 0$ tel que $B(\ell, \delta) \subset \mathcal{O}_{i_0}$. On voit qu'alors, à partir d'un certain rang,

$$B\big(x_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}\big) \subset \mathcal{O}_{i_0}$$

(il suffit en effet pour cela d'avoir $B\big(x_{\phi(n)}, \frac{1}{\phi(n)}\big) \subset B(\ell, \delta)$, or à partir d'un certain rang on aura $\|\ell - x_{\phi(n)}\| \leq \delta/2$ et $1/\phi(n) \leq \delta/2$, ce qui donne bien l'inclusion recherchée). On aboutit bien à une contradiction, ce qui conclut.

2. **Montrer qu'il existe une famille finie** $(x_1, \dots, x_n)$ **d'éléments de** $K$ **telle que** $K \subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$.

---

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors *(écriture de la négation)* pour toute famille finie $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $K$, on a $K \not\subset \displaystyle\bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$. On peut (*construction d'une suite*) construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $K$ telle que

$$\forall n \geq 1 \qquad x_{n+1} \notin \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j, \epsilon)$$

On aura alors, si $p \neq q$, $\|x_p - x_q\| \geq \epsilon$. Et donc (*utilisation de la compacité, recherche d'une contradiction*) si $\phi$ est une extractrice,
$\|x_{\phi(n+1)} - x_{\phi(n)}\| \geq \epsilon$, ce qui empêche la suite $(x_{\phi(n)})$ de converger. Contradiction.

3. **En déduire qu'il existe une famille** $(i_1, \dots, i_n)$ **d'éléments de** $I$ **telle que** $K \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.

---

Reprenons les notations précédentes. Pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $i_k \in I$ tel que $B(x_k, \epsilon) \subset \mathcal{O}_{i_k}$. On a bien alors $K \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.

4. **On suppose qu'une partie $A$ d'un espace vectoriel normé vérifie la propriété de Borel-Lebesgue :**
   **si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts tels que $A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$, alors il existe une famille finie $(i_1, \ldots, i_n)$ d'éléments de $I$ telle que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.**
   **Montrer que $A$ est compacte.**

---

Supposons $A$ non compacte, il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de $A$ qui n'a aucune valeur d'adhérence. Pour tout $x \in A$, il existe $\delta_x > 0$ tel que l'ensemble $\{n \in \mathbf{N}\ ;\ a_n \in B(x, \delta_x)\}$ soit fini. Posons $\mathcal{O}_x = B(x, \delta_x)$ ; on a $A \subset \bigcup_{x\in A} \mathcal{O}_x$. Et, si $(x_1, \ldots, x_p)$ est une famille finie d'éléments de $A$,

$$\Big\{n \in \mathbf{N}\ ;\ a_n \in \bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{O}_{x_k}\Big\} = \bigcup_{k=1}^{p} \big\{n \in \mathbf{N}\ ;\ a_n \in \mathcal{O}_{x_k}\big\}$$

est fini comme réunion d'ensembles finis. Donc $\bigcup_{k=1}^{p} \mathcal{O}_{x_k}\big\} \neq K$ (en effet, $\big\{n \in \mathbf{N}\ ;\ a_n \in K\big\} = \mathbf{N}$ est infini). Le résultat est donc montré par contraposition.

5. **Soit, dans un espace vectoriel normé (pas nécessairement de dimension finie), une suite $(u_n)$ convergeant vers une limite $\ell$. Démontrer en utilisant la propriété précédente que $\{u_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$ est compacte.**

---

Notons $A = \{u_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$ ; soit $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts tels que
$A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$. Il existe donc $j \in I$ tel que $\ell \in \mathcal{O}_j$. Comme $\mathcal{O}_j$ est ouvert, il contient une boule ouverte centrée en $\ell$. Il existe donc $N$ tel que

$$n \geq N \ \Rightarrow\ u_n \in \mathcal{O}_j$$

De plus, pour $k = 0, \ldots, N-1$ il existe $i_k \in I$ tel que $u_k \in \mathcal{O}_{i_k}$. On a alors

$$A \subset \mathcal{O}_j\ \cup\ \bigcup_{k=0}^{N-1} \mathcal{O}_{i_k}$$

ce qui conclut par propriété de Borel-Lebesgue.

**[Oral X] Soit $A$ un ouvert non vide et borné de $\mathbf{K}^p$ ayant la propriété suivante : si $x$ et $y$ sont dans $A$, il existe une boule ouverte contenant $x$ et $y$ et contenue dans $A$. Montrer qu'alors $A$ est une boule ouverte.**

---

Cet exercice est assez difficile : comment caractériser une boule ouverte ? (et, question qui ne se serait pas présentée à l'oral : que vient faire là-dedans la compacité ?) Un peu de réflexion peut conduire à la remarque suivante : si $A$ est une boule ouverte, c'est la plus grande boule ouverte incluse dans $A$, et d'ailleurs la seule boule ouverte de même rayon que $A$ incluse dans $A$. C'est presque une évidence, mais c'est une piste pour démarrer : soit

$$X = \{r > 0 \ ; \ \exists a \in A \ B(a, r) \subset A\}$$

Les hypothèses font que $X$ est non vide et majoré, donc admet une borne supérieure $R$. Soit $(r_n)$ une suite d'éléments de $X$ qui converge vers $R$, $(a_n)$ une suite d'éléments de $A$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad B(a_n, r_n) \subset A$$

La suite $(a_n)$ est bornée dans $\mathbf{K}^p$ qui est de dimension finie, donc on peut en extraire une suite convergente. Quitte à remplacer $(a_n)$ par une telle suite extraite, on peut supposer que $(a_n)$ converge (cet artifice usuel permet de ne pas s'encombrer avec les extractrices). Sa limite $b$ n'est pas a priori dans $A$, mais dans $\overline{A}$. L'objectif est maintenant plus concret : montrer que $A = B(b, R)$.

L'inclusion $A \subset B(b, R)$ est assez visible sur un dessin : soit $a \in A$. Pour tout $n$, éloignons-nous de $a$ en partant de $a_n$. Si $0 \leq t < r_n$, $a_n + \dfrac{t}{\|a_n - a\|}(a_n - a) \in B(a_n, r_n) \subset A$. Il existe donc une boule ouverte contenant $a_n + \dfrac{t}{\|a_n - a\|}(a_n - a)$ et incluse dans $A$. Et donc

$$\|a - \Big(a_n + \frac{t}{\|a_n - a\|}(a_n - a)\Big)\| \leq 2R$$

ou encore

$$\big(1 + \frac{t}{\|a_n - a\|}\big)\|a - a_n\| \leq 2R$$

Prenant la limite quand $t \to r_n$, on obtient

$$\big(1 + \frac{r_n}{\|a_n - a\|}\big)\|a - a_n\| \leq 2R$$

puis, quand $n \to +\infty$,

$$(1 + \frac{R}{\|b - a\|})\|b - a\| \leq 2R$$

d'où $\|b-a\| \leq R$. On conclut que $A \subset B'(b,R)$ ; $A$ est ouvert, donc $A$ est contenu dans l'intérieur de la boule fermée, donc dans la boule ouverte.
Reste l'inclusion réciproque. Si $\|x-b\| < R$, à partir d'un certain rang on aura $\|x-a_n\| < r_n$ (car la suite de terme général $r_n - \|x-a_n\|$ converge vers $R - \|x-b\| > 0$). Donc $x \in A$. On aurait même pu commencer par ça...