Compacité (T6)

— Etant donnée une suite (u_n), Il faut savoir rédiger la construction d'une suite extraite dont tous les termes vérifient une certaine propriété $\mathcal{P}$. Cette construction se fait par récurrence, suivant un schéma que l'on peut décrire ainsi :

soit $\phi(0)$ le plus petit indice p pour lequel u_p ait la propriété $\mathcal{P}$ (à supposer bien entendu montrer qu'un tel indice existe).

Puis, supposant les $\phi(k)$ définis jusqu'à l'ordre n ($\phi(0) < \phi(1) < \cdots < \phi(n)$, et, pour tout k entre 0 et n, $u_{\phi(k)}$ vérifie la proprifé $\mathcal{P}$) $\phi(0) < \phi(1) < \cdots < \phi(n)$), on note $\phi(n+1)$ le plus petit entier p tel que $p > \phi(n)$ et tel que u_p ait la propriété $\mathcal{P}$.

Cette construction est possible si et seulement si l'ensemble des entiers naturels k pour lesquels u_k vérifie $\mathcal{P}$ est infini.

— Pour démontrer qu'une partie est compacte, les trois principales méthodes sont :
  — le retour à la définition
  — montrer que cette partie est l'image d'un compact par une application continue
  — montrer que cette partie est fermée et bornée en dimension finie.

— Dans un compact, on passe beaucoup de temps à construire des suites ; car on sait alors qu'on peut en extraire des suites convergeant dans le compact.

— On utilise aussi très souvent le fait que si f est continue sur le compact K, l'image par f du compact est compacte (en particulier si f est à valeurs réelles elle est bornée et atteint ses bornes). Autrement dit, un argument de compacité et de continuité est souvent utilisé pour montrer l'existence d'un extremum et le fait qu'il est atteint. Cela ne dit rien sur l'unicité (ou non) du point où il est atteint.

— En dimension finie, un problème qui n'est pas posé a priori sur un compact peut parfois se résoudre par un argument de compacité ; il suffit pour cela que l'on parvienne à limiter le problème à une boule fermée.

I Exercices ccp

Il semble qu'il n'y ait plus d'exercice sur la compacité dans la liste...

II Suites extraites

Exercice 1. Soit (u_n) une suite dont les trois suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}), (u_{3n}) convergent. Démontrer que (u_n) converge.

Exercice 2. Soit (u_n) une suite d'éléments d'un espace vectoriel normé E. Montrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est fermé. On pourra montrer par exemple que son complémentaire est ouvert.

Ainsi, une suite réelle bornée a une plus grande valeur d'adhérence et une plus petite valeur d'adhérence, qu'on appelle limite supérieure et limite inférieure.

Exercice 3 (Lemme des prisonniers, oral X). Soit (u_n) une suite de nombres complexes et T l'ensemble de ses valeurs d'adhérence. On suppose que (u_n) est bornée, que T est fini (il est non vide d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass), et que $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Démontrer que (u_n) converge.

Exercice 4 (Oral X). Soit (u_n) une suite réelle bornée, telle que la suite $(u_{n+1} - u_n)$ converge vers 0. Démontrer que l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est un segment.

III Compacité

Exercice 5 (Oral Centrale). Donner un exemple de partie fermée bornée non compacte d'un espace vectoriel normé.

Exercice 6 (Oral Mines). On munit l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ de la norme de la convergence uniforme. Montrer que la boule unité de cet espace normé n'est pas compacte.

Exercice 7 (résultat classique : compacts emboîtés).

1. Soit $(K_n)_{n\geq 0}$ une suite de compacts non vides d'un espace vectoriel normé, décroissante pour l'inclusion (pour tout n, $K_{n+1}\subset K_n$). Démontrer que l'intersection $\bigcap_{n=0}^{+\infty} K_n$ est un compact **non vide**.
2. Pour tout entier naturel n, vérifier que $\delta_n = \sup_{x,y\in K_n} d(x,y)$ est bien défini. On l'appelle diamètre du compact K_n. Quelle conclusion peut-on rajouter au 1. sous l'hypothèse supplémentaire $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$?

Exercice 8 (résultat classique). Soit (u_n) une suite convergente dans un evn de dimension finie. On note ℓ sa limite. Montrer que

$$K = \{\ell\}\cup\{u_n\ ;\ n\in\mathbf{N}\}$$

est compact. *Ce résultat est vrai même si on n'a pas l'hypothèse de dimension finie. Mais il est alors un peu plus difficile à montrer.*

Exercice 9 (Oral Centrale, un théorème de point fixe). Dans la suite de l'exercice, on considère un compact X , et f une application de X dans X, vérifiant, pour tous x et y dans X :

$$\Big(x\neq y\Big) \Longrightarrow \Big(\|f(x)-f(y)\| \ <\ \|x-y\|\Big)$$

1. Démontrer l'existence et l'unicité d'un point fixe pour f (on montrera que l'application $g\ :\ x\mapsto \|f(x)-x\|$ atteint un minimum, et que ce minimum est nul).
2. On définit une suite (x_n) d'éléments de X par le choix arbitraire d'un premier terme x_0 dans X et par la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbf{N}\qquad x_{n+1}=f(x_n)\ .$$

On note a le point fixe de f.

(a) Démontrer que la suite de terme général $\|x_n-a\|$ converge ; on note δ sa limite.

(b) Montrer que, si b est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), alors $\|b-a\|=\delta$.

(c) Montrer que, si b est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), alors $f(b)$ en est aussi une.

(d) Conclure que la suite (x_n) converge vers a.

Exercice 10. Soit f une application continue de $[a,b]$ dans $[a,b]$. Démontrer qu'elle admet au moins un point fixe.

Exercice 11 (Diamètre d'un compact : il est atteint). Soit K un compact non vide d'un evn $(E,\|.\|)$. La distance associée à $\|.\|$ est notée d. Vérifier que

$$\delta(K)=\sup\{d(x,y)\ ;\ (x,y)\in\mathbf{K}^2\}$$

est bien défini. On l'appelle diamètre de K. Montrer qu'il existe x_0 et y_0 dans K tels que

$$\delta(K)=d(x_0,y_0)$$

Exercice 12 (distance entre deux compacts : elle est atteinte). Soit K_1, K_2 deux compacts d'un espace vectoriel normé. Démontrer qu'il existe a et b respectivement dans K_1 et K_2 tels que $d(K_1,K_2)=d(a,b)$ ($d(K_1,K_2)=\inf_{x\in K_1,y\in K_2} d(x,y)$). Vérifier que, en dimension finie, ce résultat reste vrai si l'on suppose seulement l'une des parties compacte et l'autre fermée. Mais montrer par un exemple qu'il est faux sous la seule hypothèse K_1 et K_2 fermés.

Exercice 13. Soit K un compact inclus dans un ouvert $\mathcal{U}$ d'un espace vectoriel normé. Démontrer qu'il existe un réel strictement positif r tel que toute boule ouverte centrée en un élément de K et de rayon r soit incluse dans $\mathcal{U}$.

Exercice 14 (Oral Centrale). Soit A, B deux parties d'un espace vectoriel normé E. On définit

$$A + B = \{a + b\ ,\ (a, b) \in A \times B\}$$

1. Montrer que, si A est ouvert, $A + B$ l'est.
2. Montrer que, si A est compacte et B fermée, $A + B$ est fermée.
3. Montrer que, si A et B sont compactes, $A + B$ l'est.
4. Trouver A et B fermées telles que $A + B$ ne le soit pas.

Exercice 15 (Oral Centrale, X, Ulm). Soit A une partie bornée non vide de $\mathbf{K}^p$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, muni d'une norme quelconque. On veut montrer qu'il existe une boule de rayon minimal contenant A.

1. On définit D comme l'ensemble des $r \geq 0$ tels qu'il existe une boule fermée de rayon r contenant A. Pourquoi D admet-elle une borne inférieure ? on la note r_0.
2. Soit, pour tout $n \in \mathbf{N}_*$, $\rho_n = r_0 + 1/n$. Montrer que, pour tout n, il existe x_n tel que A soit incluse dans la boule de centre x_n et de rayon ρ_n.
3. Montrer que la suite (x_n) est bornée.
4. Conclure.
5. Dans le cas de la norme $\|.\|_\infty$, dessiner un ensemble A pour lequel il n'y a pas unicité d'une telle boule de rayon minimal.
6. Dans le cas de la norme $\|.\|_2$, montrer qu'il y a unicité de la boule de rayon minimal contenant A.

Exercice 16. Soit E, F deux espaces vectoriels normés et f une application continue de E dans F telle que l'image réciproque par f de tout compact de F soit un compact de E. Montrer qu'alors l'image par f de tout fermé de E est un fermé de F *On pourra utiliser le fait que la réunion des termes d'une suite convergente et de sa limite est un compact.*

Exercice 17. Soit f une bijection continue d'un compact K dans un compact K'. Démontrer que f^{-1} est continue (c'est-à-dire que f est un homéomorphisme).

IV La compacité sans compacité

Exercice 18. Soit A, B, C trois points du plan. Démontrer qu'il existe un point M pour lequel la somme des distances $MA + MB + MC$ est minimale.

Exercice 19. Soit f une application définie sur un e.v.n. de dimension finie, à valeurs dans $\mathbf{R}$, continue, et telle que

$$\lim_{||x||\to+\infty} \Big(f(x)\Big) = +\infty$$

Démontrer que f atteint un minimum.

Exercice 20. Soit f une application définie sur un e.v.n. de dimension finie, à valeurs dans un e.v.n., continue, et telle que

$$\lim_{||x||\to+\infty} ||f(x)|| = 0$$

Démontrer qu'elle est uniformément continue.

Exercice 21 (Centrale, polynôme de meilleure approximation uniforme). On munit $\mathcal{C}([a, b])$, espace vectoriel des fonctions continues de $[a, b]$ dans $\mathbf{K}$ de la norme $||.||_\infty$. On désigne par f un élément de $\mathcal{C}([a, b])$. On note $\mathcal{P}_n$ le sous-espace vectoriel constitué des fonction polynômes de degré au plus n.

1. Dire pourquoi $\mathcal{P}_n$ n'est pas compact.
2. Montrer néanmoins qu'il existe un polynôme P_n de $\mathcal{P}_n$ tel que

$$d(f, P_n) \ = \ d(f, \mathcal{P}_n)$$

3. Dans le cas $n=0$, montrer l'unicité de P_0 et l'exprimer à l'aide de f.

   Dans le cas général, il y a encore unicité de P_n, mais ce n'est pas si facile à montrer

V Autres exercices

Exercice 22 (Oral X). Soit A un ouvert non vide et borné de $\mathbf{K}^p$ ayant la propriété suivante : si x et y sont dans A, il existe une boule ouverte contenant x et y et contenue dans A. Montrer qu'alors A est une boule ouverte.

Exercice 23 (Propriété de Borel Lebesgue). Soit K un compact d'un espace vectoriel E, $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts tels que $K \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$.

1. Démontrer qu'il existe un réel $\epsilon > 0$ tel que, pour tout x dans $\mathbf{K}$, la boule ouverte $B(x,\epsilon)$ soit incluse dans un ouvert $\mathcal{O}_i$.
2. Montrer qu'il existe une famille finie $(x_1,\ldots,x_n)$ d'éléments de K telle que $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} B(x_j,\epsilon)$.
3. En déduire qu'il existe une famille $(i_1,\ldots,i_n)$ d'éléments de I telle que $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.
4. On suppose qu'une partie A d'un espace vectoriel normé vérifie la propriété de Borel-Lebesgue :

   si $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ est une famille d'ouverts tels que $A \subset \bigcup_{i\in I} \mathcal{O}_i$, alors il existe une famille finie $(i_1,\ldots,i_n)$ d'éléments de I telle que $A \subset \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{O}_{i_k}$.

   Montrer que A est compacte (on pourra raisonner par l'absurde).
5. Soit, dans un espace vectoriel normé (pas nécessairement de dimension finie), une suite (u_n) convergeant vers une limite ℓ. Démontrer en utilisant la propriété précédente que $\{u_n\ ;\ n\in\mathbf{N}\}\cup\{\ell\}$ est compacte.

La définition « générale » de la compacité dans un espace topologique est la définition de Borel Lebesgue : une partie K est dite compacte lorsque de tout recouvrement de K par une famille d'ouverts on peut extraire un recouvrement fini. Dans un evn, cette définition est équivalente à la définition de Bolzano-Weierstrass. Qui est au programme car plus facile à appréhender.

Exercice 24 (Oral X). Soit $E=[0,1]^{\mathbf{N}}$. Pour u et v dans E, on pose

$$d(u,v)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{|u_k-v_k|}{2^k}$$

Montrer que d est une distance sur E, pour laquelle E est compact.

VI Compacité et suites de fonctions

Exercice 25 (Utilisation de la compacité).

1. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, lipschitziennes de même rapport k, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction f.
   (a) Vérifier que f est, elle aussi, k-lipschitzienne.
   (b) Soit $(x_i)_{0\leq i\leq p}$ une subdivision régulière de $[a,b]$. Démontrer que, pour tout i tel que $0\leq i\leq p-1$, pour tout x dans $[x_i,x_{i+1}]$,
   $$\|f_n(x)-f(x)\|_F \leq 2k\frac{b-a}{p}+\|f_n(x_i)-f(x_i)\|_F$$
   puis démontrer que la convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme.
2. On veut étendre le résultat trouvé précédemment. Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un compact K d'un espace vectoriel normé $(E,\|.\|_E)$, lipschitziennes de même rapport k, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie F. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur K vers une fonction f.
   (a) Vérifier que f est, elle aussi, k-lipschitzienne.

(b) Soit $r > 0$. Montrer qu'il existe un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_p\}$ d'éléments de K tel que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{p} B'(x_i, r)$$

(B' signifie toujours « boule fermée »).

(c) Avec les notations précédentes, montrer que, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, pour tout $x \in B'(x_i, r)$,

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq 2kr + \|f_n(x_i) - f(x_i)\|_F$$

(d) Montrer que la convergence est uniforme.

(e) Retrouver le résultat de la question précédente en raisonnant par l'absurde et en utilisant des suites extraites.

Exercice 26 (Oral Centrale, ens Lyon). Soit (P_n) une suite de polynômes de degrés tous inférieurs à d. Montrer que si (P_n) converge simplement en $d+1$ points de $\mathbf{C}$, (P_n) converge uniformément sur tout compact vers un polynôme de degré $\leq d$.

Exercice 27 (Oral X, Centrale). Soit (f_n) une suite de fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, convexes. On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f. Vérifier que f est convexe, et que la convergence est uniforme sur tout segment inclus dans I (on pourra se ramener à ce qui précède).

Exercice 28. Soit (f_n) une suite de fonctions croissantes et continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. On suppose qu'elle converge simplement en tout point de ce segment vers une fonction continue f. Démontrer que f est croissante, puis démontrer que la convergence est uniforme en utilisant une subdivision du segment $[a, b]$.
Donner un exemple simple montrant que l'on ne peut pas se passer de l'hypothèse de continuité de f.

Exercice 29 (Théorème de Dini, Oral Mines).

1. Soit (K_n) une suite décroissante de fermés de $[a, b]$ $(a < b)$, d'intersection vide. Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $K_{n_0} = \emptyset$.
2. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions continues sur $[a, b]$ convergeant simplement vers une fonction f continue sur $[a, b]$. Montrer que la convergence est uniforme.
3. Donner un exemple montrant que, si on supprime l'hypothèse de continuité de f, la résultat n'est plus vrai.
4. Dans les deux premières questions, peut-on remplacer $[a, b]$ par $\mathbf{R}$?

Exercice 30 (Oral Centrale). Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. (f_n) converge uniformément sur tout compact.
2. Pour toute suite (x_n) convergente, $\big(f_n(x_n)\big)$ converge.

Exercice 31. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur un segment, à valeurs réelles, telle que, pour tout x, la suite $\big(f_n(x)\big)$ soit croissante. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f, et on veut montrer que la convergence est uniforme.

1. On suppose que la convergence n'est pas uniforme. Montrer qu'il existe un réel $\delta > 0$, une extractrice ϕ et une suite $(x_{\phi(n)})$ telle que, pour tout n,

$$f(x_{\phi(n)}) - f_{\phi(n)}(x_{\phi(n)}) > \delta$$

2. En utilisant la continuité des (f_n), aboutir à une contradiction.