Espaces vectoriels normés, topologie (T2, T3, T4, T5)

I Exercices ccp

EXERCICE 34 analyse

Soit A une partie non vide d'un espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \iff \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que, si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

EXERCICE 35 analyse

E et F désignent deux espaces vectoriels normés.

1. Soient f une application de E dans F et a un point de E.

   On considère les propositions suivantes :

   P1. f est continue en a.

   P2. Pour toute suite (x_n) d'éléments de E telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(a)$.

   Prouver que les propositions P1 et P2 sont équivalentes.
2. Soit A une partie dense d'un sous-espace vectoriel normé E, et soient f et g deux applications continues de E dans F, F désignant un espace vectoriel normé.

   Démontrer que si, pour tout $x \in A$, $f(x) = g(x)$, alors $f = g$.

EXERCICE 36 analyse

Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que $\forall x \in E, \|f(x)\| \leqslant k\,\|x\|$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

EXERCICE 37 analyse

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose, $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.

   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.

   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

EXERCICE 38 analyse

On note $\mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels.

$\forall\, P \in E$, on pose $N_1(P) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} |a_i|$ et $N_\infty(P) = \max_{0\leq i\leq n} |a_i|$ où $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ avec $n \geqslant \deg P$.

1. (a) Démontrer que N_1 et N_∞ sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

   (b) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_∞ est un ouvert pour la norme N_1.

   (c) Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

2. On note $\mathbb{R}_k[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ constitué par les polynômes de degré inférieur ou égal à k. On note N_1' la restriction de N_1 à $\mathbb{R}_k[X]$ et N_∞' la restriction de N_∞ à $\mathbb{R}_k[X]$.

   Les normes N_1' et N_∞' sont-elles équivalentes ?

EXERCICE 41 analyse

Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.

Les théorèmes utilisés pourront àªtre énoncés oralement à travers les exemples choisis.

Remarques

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

EXERCICE 44 analyse Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.

   (b) Montrer que $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$
2. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbf{R}$).

II Étude de normes

— On rencontre souvent dans un énoncé la question : « montrer que l'application N : ... définit une norme sur l'espace vectoriel E ». Avant de se précipiter sur la vérification des propriétés qui font d'une application une norme, il faut parfois commencer par justifier que N est bien définie (même si en général elle ne pose pas de problème).

— La vérification de l'homogénéité ne pose en général aucune difficulté. L'inégalité triangulaire peut au contraire être assez difficile (en particulier, pour certaines normes, on utilise des propriétés de convexité).

— Ne pas oublier la propriété $(N(x) = 0) \Rightarrow (x = 0)$, qui nécessite parfois l'utilisation de propriétés classiques, par exemple :

  — Si f est continue et positive sur un segment $[a, b]$, si $\int_{[a,b]} f = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$.

  — Si un polynôme s'annule en une infinité de points, alors il est nul.

  — Si un polynôme de degré au plus n s'annule en au moins $n+1$ points, alors il est nul.

— Il est important de bien lire la définition de l'espace sur lequel on travaille.

— Une question classique est de comparer deux normes N_1 et N_2 ;

  — Si l'on veut montrer qu'elles sont équivalentes, et si l'on n'est pas dans un espace de dimension finie (auquel cas toutes les normes sont équivalentes par théorème, et il n'y a rien à faire), on revient à la définition et on essaie de trouver deux constantes α et β telles que, pour tout x :
  $N_1(x) \le \alpha N_2(x)$ et $N_2(x) \le \beta N_1(x)$.

  — Si on veut montrer que N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, c'est plus délicat : on a en effet le choix entre démontrer qu'il n'existe pas de constante α telle que, pour tout x, $N_1(x) \le \alpha N_2(x)$, ou démontrer qu'il n'existe pas de constante β telle que, pour tout x, $N_2(x) \le \beta N_1(x)$, ou (plus rarement) les deux. On essayera souvent de construire une suite (x_n) d'éléments de E telle que $\big(N_1(x_n)\big)$ tende vers $+\infty$ et telle que $\big(N_2(x_n)\big)$ soit bornée (ou l'inverse). Il faut donc se poser la question : comment construire des éléments de E avec une grande N_1 et une petite N_2 (ou l'inverse) ?

Exercice 1 (Oral Centrale 2010 !)**.** Indiquer un exemple de couple de normes non équivalentes sur un espace normé.

Exercice 2 (Normes sur un espace de polynômes)**.** Ici, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

1. Si $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathbf{K}[X]$ (rappelons que la somme est finie), on définit

$$N_1(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| \ , \ N_2(P) = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2} \ , \ N_\infty(P) = \sup_{n\ge 0} |a_n|$$

   Montrer que l'on définit ainsi trois normes sur $\mathbf{K}[X]$, les comparer.

2. (*Oral Centrale*) On définit, pour $P \in \mathbf{K}[X]$,

$$N(P) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|P^{(k)}(0)|}{k!}$$

(on confond donc polynôme et fonction polynôme, ce qui est rarement gênant en analyse). Montrer que N définit une norme sur $\mathbf{K}[X]$.

3. Si $P \in \mathbf{C}[X]$, on définit

$$\|P\| = \sup_{|z|=1} (|P(z)|)$$

Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur $\mathbf{C}[X]$.

Exercice 3 (Une norme simple, oral CCP)**.** Soit λ une suite de réels, et $N_\lambda(P) = \sum_{k=0}^{N} |a_k \lambda_k|$ si $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que N_λ soit une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
2. Trouver une cns sur λ et μ pour que N_λ et N_μ soient équivalentes.

Exercice 4 (Norme intégrale « avec poids »)**.** Soit E l'espace des fonctions continues sur le segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit w un élément de E. On définit, pour tout élément f de E,

$$N(f) = \int_{[a,b]} |wf| \ .$$

1. Démontrer qu'il suffit que w ne s'annule pas sur $[a, b]$ pour que N soit une norme. Cette condition est-elle nécessaire ?
2. Démontrer qu'il suffit que w ne s'annule pas sur $[a, b]$ pour que N soit équivalente à la norme N_1 usuelle. Cette condition est-elle nécessaire ?

Exercice 5. On définit, sur $\mathcal{C}^1([a, b], \mathbf{R})$,

$$\|f\| = |f(a)| + N_\infty(f')$$

où N_∞ désigne la norme de la convergence uniforme. Montrer que $\| \ . \ \|$ est une norme, la comparer à N_∞.

Exercice 6 (Une norme rencontrée dans un problème de l'X)**.** On note E l'espace des fonctions lipschitziennes sur $[0, 1]$, à valeurs réelles ; pour tout élément f de E on définit

$$\nu(f) = \sup_{0 \le x < y \le 1} \left(\frac{\left| f(x) - f(y) \right|}{|x - y|} \right) .$$

N_∞ désigne comme d'habitude la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$.

1. Dire pourquoi ν n'est pas une norme sur E.
2. On définit

$$N = \nu + N_\infty \ .$$

Démontrer que N est une norme sur E, et la comparer avec N_∞.

Exercice 7 (Un classique de l'oral)**.** On note E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = 0$. On désigne par $\|.\|_\infty$ la norme de la convergence uniforme.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles.
2. Montrer que les fonctions données par

$$N_1(f) = \|f + f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty \ + \ \|f'\|_\infty$$

sont deux normes.

3. Montrer qu'elles sont équivalentes.

La dernière question n'est pas évidente, mais elle est très intéressante (méthode réutilisable dans d'autres exercices, pas seulement le suivant.

Exercice 8 (Oral Centrale, un peu plus difficile que le précédent)**.** On note E l'ensemble des fonctions de classe C^2 de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ telles que $f(0) = f'(0) = 0$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel réel pour les lois usuelles.
2. Montrer que les fonctions données par

$$N_1(f) = \|f\|_\infty \quad , \quad N_2(f) = \|f + f''\|_\infty \quad \text{et} \quad N_3(f) = \|f\|_\infty \ + \ \|f''\|_\infty$$

sont trois normes.

3. Comparer N_1 et N_3.

4. Soit g une fonction continue ; montrer que l'application

$$x \mapsto \int_0^x \sin(x-t)g(t)dt$$

est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = g(x)$. Résoudre alors cette équation différentielle.

5. Comparer entre elles les trois normes $N_1,\ N_2,\ N_3$.

$\triangle$ Les deux exercices suivants utilisent les fonctions convexes.

Exercice 9 (Normes sur $\mathbf{R}^n$, écrit ens 2002)**.** *Les normes étudiées ci-dessous englobent les normes N_1 et N_2 usuelles ; l'inégalité triangulaire demande une étude peu évidente, mais bien découpée dans cet énoncé ens assez accessible.*

1. Soit $0 \leq \alpha \leq 1$ et $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} t_i^\alpha \leq \Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k t_i)^\alpha$$

2. Soit $\alpha \geq 1$ et $t_1, \dots, t_k \in \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$\sum_{i=1}^k \frac{1}{k} t_i^\alpha \geq \Big(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k t_i)^\alpha$$

3. On se donne $p \in [1, +\infty]$ et on définit $p^* \in [1, +\infty]$ par la relation $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p^*} = 1$ (de sorte que $1^* = +\infty$ et $(+\infty)^* = 1$).

   (a) Soit $p \in]1, +\infty[$. Si $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, montrer que

$$\exp(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^*}) \leq \frac{1}{p}\exp(\alpha) + \frac{1}{p^*}\exp(\beta)$$

   (b) Soit $p \in]1, +\infty[$ et $x, y \in \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{p^*}y^{p^*}$$

4. Dans la suite, on note, si $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, et $p \in [1, +\infty[$, $\|x\|_p = \big(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\big)^{1/p}$. On rappelle que $\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. On veut montrer l'inégalité de Hölder : pour tous $x, y \in \mathbf{R}^n$,

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_p \|y\|_{p^*}$$

où $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

   (a) Traiter directement la cas $\{p, p^*\} = \{1, +\infty\}$.

   (b) Si $p \in]1, +\infty[$, montrer que l'on peut supposer $\|x\|_p = \|y\|_{p^*} = 1$ et que les x_i et les y_i sont tous positifs ou nuls. Déduire de 3.b. que $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$, et conclure.

5. On veut montrer l'inégalité de Minkowski : $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

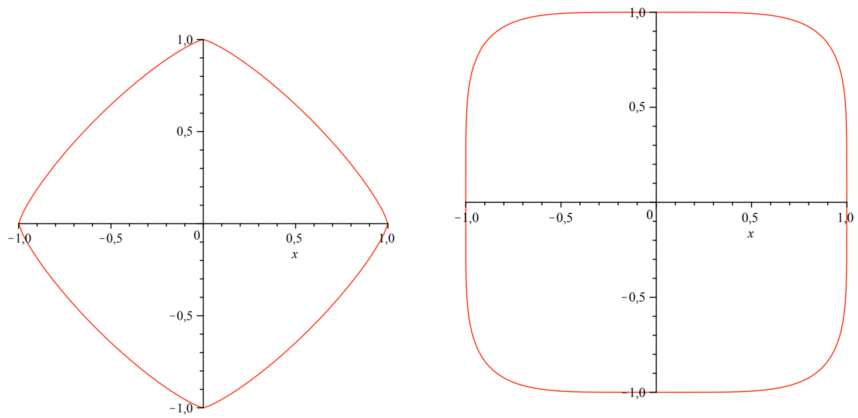
   (a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où tous les x_i et les y_i sont positifs.

   (b) Si $z \in \mathbf{R}^n$ est défini par $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$, que vaut $\|z\|_{p^*}$?

   (c) Montrer que $\|x+y\|_p^p \leq \|x\|_p\|z\|_{p^*} + \|y\|_p\|z\|_{p^*}$

   (d) Montrer l'inégalité de Minkowski.

6. Montrer que $\| \ . \ \|_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$.



(Représentation de la sphère unité de $\mathbf{R}^2$ pour $\| \ . \ \|_{5/4}$ et pour $\| \ . \ \|_5$)

Exercice 10 (Normes intégrales sur $\mathcal{C}([a,b], \mathbf{C})$)**.** *Exercice analogue au précédent, mais dans le cadre d'un espace fonctionnel*

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$. On suppose $a < b$. On désigne par p et q deux réels strictement positifs qui vérifient la relation

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\ .$$

1. Démontrer que, pour tous nombres réels x et y,

$$\exp(\frac{x}{p}+\frac{y}{q}) \leq \frac{1}{p}\exp(x)+\frac{1}{q}\exp(y)$$

puis en déduire que, pour tous nombres réels positifs α et β :

$$\alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p}+\frac{\beta^q}{q}$$

2. Démontrer que, pour tous éléments f, g de E,

$$\Big|\int_{[a,b]} fg\,\Big| \leq \frac{1}{p}\int_{[a,b]}|f|^p \;+\; \frac{1}{q}\int_{[a,b]}|g|^q$$

3. En utilisant la question précédente, on se propose de démontrer l'inégalité de Hölder, valable pour n'importe quels éléments f et g de E :

$$\Big|\int_{[a,b]} fg\,\Big| \leq \Big(\int_{[a,b]}|f|^p\Big)^{1/p}\Big(\int_{[a,b]}|g|^q\Big)^{1/q}$$

   (a) Examiner le cas où l'une des deux fonctions est nulle.

   (b) Examiner le cas où $\displaystyle\int_{[a,b]}|f|^p = \int_{[a,b]}|g|^q = 1$.

   (c) On se place dans le cas général, on suppose néanmoins que ni f ni g n'est la fonction nulle. Montrer qu'il existe deux réels positifs λ et μ tels que les fonctions $f_1=\lambda f$ et $g_1=\mu g$ vérifient $\displaystyle\int_{[a,b]}|f_1|^p = \int_{[a,b]}|g_1|^q = 1$; exprimer λ et μ à l'aide d'intégrales faisant intervenir f, g, p et q.Conclure alors en utilisant la question précédente.

4. Vérifier que :

$$\Big(|f|+|g|\Big)^p = |f|\Big(|f|+|g|\Big)^{p-1}+|g|\Big(|f|+|g|\Big)^{p-1}$$

   En appliquant (adroitement !) l'inégalité de Hölder à chacun des produits du second membre, en déduire l'inégalité de Minkowski :

$$\Big(\int_{[a,b]}|f+g|^p\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_{[a,b]}|f|^p\Big)^{1/p}+\Big(\int_{[a,b]}|g|^p\Big)^{1/p}$$

5. Démontrer que l'application

$$\begin{array}{rccl}\phi_p : & E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & f & \longmapsto & \Big(\int_{[a,b]}|f|^p\Big)^{1/p}\end{array}$$

   est une norme sur E.

6. En utilisant l'inégalité de Hölder, démontrer que, si $1<p<p'$ et si $f\in E$,

$$\phi_p(f) \leq (b-a)^{1/p-1/p'}\;\phi_{p'}(f)$$

   Utiliser ce résultat pour comparer les normes ϕ_p entre elles ; les comparer à la norme N_∞ de la convergence uniforme sur $[a,b]$.

   On pourra utilement s'inspirer des comparaisons des normes intégrales usuelles vues en cours

   On peut démontrer (exercice d'intégration) que, pour tout élément f de E,

$$\lim_{p\to+\infty}\phi_p(f) = N_\infty(f)$$

   ce qui justifie l'appellation N_∞

Exercice 11 (Oral Centrale)**.** Soit E un espace normé, x et x' dans E, r et r' dans $\mathbf{R}^+$, B (resp. B') la boule fermée de centre x et de rayon r (resp. de centre x' et de rayon r'). Caractériser à l'aide de x, x', r, r' l'inclusion $B\subset B'$.

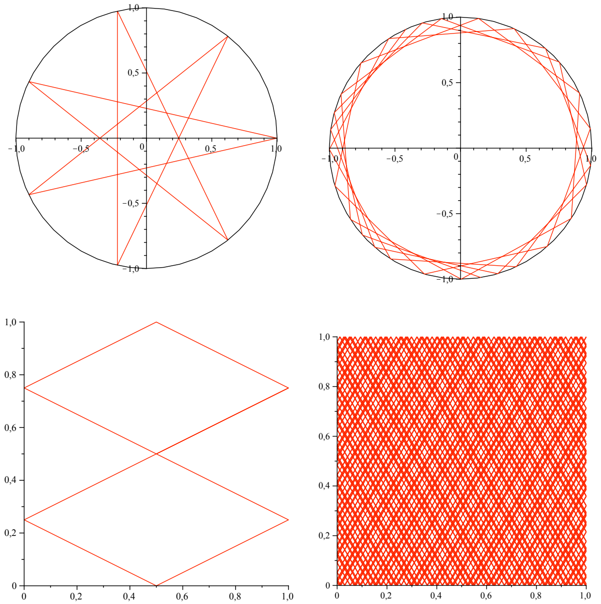
III Topologie, continuité

— Les caractérisations par les suites (autrement dit : séquentielles) de l'adhérence, d'une partie fermée, de la continuité, des limites, de la borne supérieure, de la densité. . .) sont souvent utiles.

— Pour montrer qu'une partie est ouverte ou fermée, on peut, parfois, revenir à la définition, à l'utilisation des suites. . .on utilise très fréquemment les résultats sur l'image réciproque d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue ; en général, une partie dont la définition s'écrit avec des inégalités strictes est ouverte, une partie dont la définition s'écrit avec des inégalités larges ou des égalités est fermée.

Exercice 12 (exercice classique, étude topologique des sous-groupes additifs de $\mathbf{R}$)**.** Soit G un sous-groupe de $(\mathbf{R},+)$ (exemple : $G=\mathbf{Z}$, $G=\mathbf{Q}$). On suppose $G\neq\{0\}$. On note α la borne inférieure de $G\cap\mathbf{R}_*^+$ (on justifiera son existence).

1. Montrer que $\forall g \in G\ \forall n \in \mathbf{Z} \quad ng \in G$.
2. Si $\alpha = 0$, démontrer que G est dense dans $\mathbf{R}$ (exemple : $G = \mathbf{Q}$).
3. Si $\alpha > 0$, montrer que $\alpha \in G$ (on procèdera par l'absurde, et on montrera que si $\alpha \notin G$ alors il y a au moins deux éléments de G dans $]\alpha, 2\alpha[$) puis que $G = \alpha\mathbf{Z}$.
On a ainsi montré qu'un sous-groupe de $(\mathbf{R}, +)$ est soit discret soit dense dans $\mathbf{R}$. Ce résultat a des applications à des domaines divers : billards, gammes musicales...



4. Que dire des sous-groupes de $(\mathbf{R}_*^+, \times)$?
5. Démontrer que si G contient deux réels non nuls x et y tels que x/y ne soit pas rationnel, alors on est dans le cas **1.**
6. Soit θ un réel tel que θ/π soit irrationnel. Démontrer que $\{\cos n\theta\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

La densité de $\{\cos n\theta\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$ est un résultat que l'on peut placer entre deux autre résultats :

• La suite $(\cos n\theta)_n$ diverge (résultat plus faible, que l'on peut montrer avec des formules de trigonométrie).

• La suite $(\cos n\theta)_n$ est équirépartie (résultat plus fort), notion hors-programme mais assez facile à comprendre.

Exercice 13 (Utilisation des caractérisations séquentielles)**.** Soit A et B deux parties de $\mathbf{R}$ non vides majorées. En utilisant la caractérisation par les suites de la borne supérieure, démontrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Exercice 14 (Résolution typique d'une équation fonctionnelle, programme mpsi)**.** On cherche les applications continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$, qui vérifient, pour tous x et y réels :

$$f(x) + f(y) = f(x + y)$$

Dans la suite, f désigne une telle fonction.

1. Démontrer que $f(0) = 0$, et que f est impaire.
2. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier naturel n, $f(nx) = nf(x)$.
3. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout entier n, $f(nx) = nf(x)$.
4. Démontrer que, pour tout réel x, pour tout nombre rationnel r, $f(rx) = rf(x)$.
5. Démontrer qu'il existe un nombre complexe α tel que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha x$.

Exercice 15 (Equation fonctionnelle, Oral Mines-Telecom 2016)**.**
Soit g l'ensemble des fonctions continues de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \qquad g(x + y) + g(x - y) = 2\left(g(x) + g(y)\right)$$

1. Déterminer $g(0)$ et la parité de g.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, $g(nx) = n^2 g(x)$.
3. Montrer que pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et $q \in \mathbf{N}_*$,
$$g\left(\frac{p}{q}\,x\right) = \frac{p^2}{q^2} g(x)$$
4. Déterminer g.

Exercice 16 (Autre équation fonctionnelle)**.** On cherche les applications continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, qui vérifient, pour tous x et y réels :

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$$

Dans la suite, f désigne une telle fonction.

1. Démontrer que, si f est nulle en 0, elle est constamment nulle. On écarte désormais ce cas, dans toute la suite de l'exercice. Quelle est alors la valeur de f en 0 ?
2. Démontrer qu'il existe un réel strictement positif a tel que, sur le segment $[0, a]$, f soit strictement positive.
3. On suppose dans un premier temps que $f(a) < 1$. On appelle α l'unique réel positif tel que $f(a) = \cos\alpha$. Démontrer que, pour tout entier p et tout entier naturel n :
$$f(\frac{pa}{2^n}) = \cos(\frac{p\alpha}{2^n})$$
En déduire que f est de la forme $x \mapsto \cos(\phi x)$.
4. Que se passe-t-il si $f(a) > 1$? si $f(a) = 1$?
5. Retrouver ces résultats en supposant a priori f de classe C^2 et en obtenant à partir de la relation de départ une équation différentielle simple.

Exercice 17 (Une adhérence dans un espace fonctionnel, oral Centrale-Mines)**.** On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$ et $F = \{f \in E \ / \ f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme N_∞. Montrer que F est fermé.
2. On munit E de la norme N_1. Montrer que F est dense dans E.
Cette question se résout bien graphiquement.
3. On munit E d'une norme quelconque. Montrer que F est soit dense dans E, soit fermé.
Plus difficile : le support graphique disparaît.

Exercice 18.

1. Démontrer qu'un ouvert de $\mathbf{R}$ peut s'écrire comme réunion d'intervalles ouverts.
2. Démontrer qu'un ouvert de $\mathbf{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts (on rappelle que $\mathbf{Q}$ est dénombrable).

Exercice 19 (**Oral Mines**)**.** On note E l'espace vectoriel réel $\mathcal{C}^1([a,b], \mathbf{R})$ muni de la norme $\|f\| = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer la densité dans E de l'espace des fonctions polynomiales.

Exercice 20 (Détermination d'une adhérence dans un espace fonctionnel)**.** On munit l'espace vectoriel $\mathcal{B}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ de la norme de la convergence uniforme. On note F le sous-espace vectoriel des applications bornées à support compact, c'est-à-dire l'ensemble des éléments f de $\mathcal{B}(\mathbf{R}, \mathbf{C})$ pour lesquels il existe un réel M vérifiant

$$f(x) \neq 0 \Rightarrow x \in [-M, M] \ .$$

Démontrer que l'adhérence de F est l'ensemble des applications bornées ayant pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 21 (Oral mines)**.** Montrer que l'adhérence d'une partie convexe est convexe. Montrer que l'intérieur d'une partie convexe est convexe

Exercice 22 (Séparation de deux fermés)**.** Soit A, B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E.

1. Démontrer que les deux parties $C = \{x \in E / d(x, A) = d(x, B)\}$ et $D = \{x \in E / d(x, A) \leq d(x, B)\}$ sont fermées.
2. On suppose A et B fermés, d'intersection vide. Démontrer qu'il existe une application f continue sur E, à valeurs dans $[0, 1]$, telle que $f^{-1}(\{1\}) = A$ et $f^{-1}(\{0\}) = B$. On pourra par exemple construire une telle application à partir d'un quotient faisant intervenir les applications $x \longmapsto d(x, A)$ et $x \longmapsto d(x, B)$.
3. On suppose A et B fermés, d'intersection vide. Démontrer qu'il existe deux ouverts disjoints $\mathcal{U}$ et $\mathcal{V}$ tels que $A \subset \mathcal{U}$ et $B \subset \mathcal{V}$.

IV Continuité des applications linéaires

— Pour démontrer qu'une application linéaire est continue, on cherche à majorer et à obtenir :$\|\phi(x)\|_F \leq \ldots \leq k\|x\|_E$. Mais très souvent l'argument est « l'espace de départ est de dimension finie, or ϕ est linéaire, donc elle est continue ».
— Ce qui fait mauvais effet (mais est courant) : ne pas s'apercevoir que l'application dont on demande de montrer la continuité est linéaire; on est alors amené à écrire des choses trop compliquées pour montrer cette continuité.
— Pour montrer qu'une application linéaire n'est pas continue, on montre qu'un tel k n'existe pas; pour ce faire, on construit une suite (x_n) telle que $(\|x_n\|_E)$ soit bornée (par exemple constante égale à 1)et pas $(\|\phi(x_n)\|_F)$, ou telle que $(\|x_n\|_E)$ converge vers 0 et pas $(\|\phi(x_n)\|_F)$: bref, on cherche des x_n tels que $\|\phi(x_n)\|$ soit « de plus en plus grand » devant $\|x_n\|$.

Exercice 23. On munit $\mathbf{R}[X]$ de la norme N définie par $N(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|$. Discuter, suivant la valeur du réel α, la continuité de l'application $P \mapsto P(\alpha)$.

Exercice 24. On munit l'espace $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$ de la norme usuelle N_1. Pour tout élément f de $\mathcal{C}([0,1],\mathbf{R})$, on définit

$$T(f) \ : \ x \longmapsto \int_0^x f(t)dt$$

Démontrer que l'application T est linéaire continue.
Même question en remplaçant N_1 par N_∞.

Exercice 25 (Oral Mines). Soit (a_k) une suite de complexes. Pour $P = \sum p_k X^k \in \mathbf{C}[X]$, on pose

$$N_a(P) = \sum_k |a_k p_k|$$

1. Condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que N_a soit une norme sur $\mathbf{C}[X]$?
2. Condition nécessaire et suffisante pour que N_a et N_b soient équivalentes ?
3. Pour quelles suites a l'endomorphisme de $\mathbf{C}[X]$: $P \mapsto P'$ est-il continu ?

Exercice 26 (Oral X...un peu abrégé). Soit E un espace vectoriel normé, p un projecteur continu non nul. Montrer que $\ker p$ et $\operatorname{im} p$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires fermés de E.

Exercice 27. Soit T une forme linéaire sur un espace vectoriel normé E. On veut démontrer que T est continue si et seulement si $\ker T$ est fermé.

1. Démontrer que, si T est continue, $\ker T$ est fermé.
2. Réciproquement, on suppose $\ker T$ fermé, et T non nulle; fixons x_0 tel que $T(x_0) \neq 0$. On note $\delta = d(x_0, \ker T)$. Montrer que $\delta > 0$.
   Montrer alors que, pour tout $y \in E$:
   $$|T(y)| \leq \frac{|T(x_0)|}{\delta}\|y\|$$
   puis conclure.

Exercice 28. On désigne par n un entier naturel non nul. Démontrer qu'il existe une constante α_n telle que, pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à n on ait :

$$|P(0)| \leq \alpha_n \sup_{|z|=1} |P(z)|$$

Exercice 29 (Quelques questions classiques sur la topologie matricielle). Ici, lorsque l'on parle de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

1. Vérifier que l'application déterminant est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
2. Démontrer que $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
3. Démontrer que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathcal{GL}_n(\mathbf{K})$.

4. Ici, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$. Démontrer que le groupe des matrices orthogonales est compact.
5. L'ensemble des matrices symétriques est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ? (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
6. L'ensemble des matrices nilpotentes est-il ouvert ? fermé ? ni l'un ni l'autre ? (dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$).
7. Démontrer que l'ensemble des matrices de rang 1 n'est ni ouvert ni fermé.
8. Démontrer que l'ensemble des matrices de rang supérieur ou égal à 1 est ouvert.

Exercice 30. Topologie matricielle, encore *On utilise le chapitre Al5*

1. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ n'est ni ouvert ni fermé.
2. En utilisant par exemple l'application

$$M \longmapsto \mathrm{Tr}(M)^2 - 4\det(M)$$

   déterminer l'adhérence et l'intérieur de l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$.