s6 : séries entières

I Exercices ccp 2015

$\boxed{\text{Analyse 18}}$ On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\sum\limits_{n \geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

$\boxed{\text{Analyse 19}}$

1. Démontrer que la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$.

2. On pose : $\forall\, z \in \mathbb{C},\ f(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

   Démontrer que $\forall\, (z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z) \times f(z') = f(z + z')$, sans utiliser le fait que $f(z) = e^z$.

3. En déduire que : $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) \neq 0$ et $\dfrac{1}{f(z)} = f(-z)$.

$\boxed{\text{Analyse 20}}$

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Calculer le rayon de convergence de chacune des séries entières suivantes :

   (a) $\sum \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} z^{2n+1}$.

   (b) $\sum n^{(-1)^n} z^n$

Analyse 21

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Analyse 22

1. Que peut-on dire du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ? Le démontrer.
2. Développer en série entière au voisinage de 0, en précisant le rayon, la fonction $f \ : \ x \longmapsto \ln(1+x) + \ln(1-2x)$.

   La série obtenue converge-t-elle pour $x = \dfrac{1}{4}$? $x = \dfrac{1}{2}$? $x = -\dfrac{1}{2}$?.

Analyse 23

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe telle que la suite $\left(\dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite.

1. Démontrer que les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum (n+1)a_{n+1}x^n$ ont le même rayon de convergence.
   On le note R.

2. Démontrer que la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $]-R, R[$.

$\boxed{\text{Analyse 24}}$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \dfrac{x^n}{(2n)!}$.

   On pose $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.

2. Donner le développement en série entière en 0 de la fonction $x \mapsto \text{ch}(x)$ et précisez le rayon de convergence.

3. (a) Déterminer $S(x)$.

   (b) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$f(0) = 1,\ \ f(x) = \text{ch}\sqrt{x} \text{ pour } x > 0,\ \ f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ pour } x < 0\,.$$

   Démontrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

---

1. Le rayon de convergence est $+\infty$ (d'Alembert, par exemple, ou dire que pour tout réel x la suite de terme général $x^n/(2n)!$ est bornée...).

2. Cours.

3. (a) On trouve, si $x \geq 0$, $S(x) = \text{ch}\left(\sqrt{x}\right)$. Si $x < 0$, l'idée est d'écrire que
   $x = -\left(\sqrt{-x}\right)^2$. On trouve alors $S(x) = \cos\sqrt{-x}$.

   (b) f, c'est S, elle est donc de classe C^∞ car dse sur $\mathbf{R}$.

II Autres exercices

Exercice 1 (Oral Mines). Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum(\sin n)z^n$ et $\sum 3^{-n}(1+2/n)^n x^{4n}$.

La suite $(\sin n)$ est bornée, le rayon de convergence de $\sum(\sin n)z^n$ est donc ≥ 1. Mais elle ne converge pas vers 0, le rayon de convergence est donc ≤ 1. Pour montrer que la suite $(\sin n)$ ne converge pas vers 0, on peut par exemple utiliser la formule de développement de $\sin(n+1)$, comme $\sin 1 \neq 0$ on obtient que $(\cos n)$ convergerait aussi vers 0, ce qui contredit $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$. Pour l'autre, si $x \neq 0$,

$$3^{-n}(1+2/n)^n x^{4n} \sim e^2 \left(\frac{x^4}{3}\right)^n$$

qui donne un rayon de convergence égal à $3^{1/4}$.

Exercice 2 (Oral Mines). Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$, a_n étant le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$.

La suite (a_n) est bornée, le rayon de convergence est donc ≥ 1. Elle ne tend pas vers 0, donc le rayon de convergence est ≤ 1.

Exercice 3 (Oral Centrale)**.** Soit, pour $n \geq 2$, $a_n = \ln\left(\dfrac{\sqrt{n}+(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière de terme général $a_n x^n$.

La suite (a_n) converge vers 0. Donc le rayon de convergence est ≥ 1. Réécrivons (technique ordinaire : on met en facteur le terme prépondérant en haut et en bas) :

$$a_n = \ln\left(\frac{1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}\right) = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Donc $a_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Ce qui ne permet pas de conclure à la convergence ni à la divergence de $\sum a_n$, mais en tout cas $\sum a_n$ ne converge pas absolument, donc le rayon est ≤ 1.

Exercice 4. On suppose que (a_n) est une suite de nombres complexes non nuls, telle que

$$\lim\left|\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right| = l_1 \quad \text{et} \quad \lim\left|\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right| = l_2$$

où l_1 et l_2 sont deux éléments de $[0,+\infty]$.
Que peut-on dire du rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$?

Commençons par supposer l_1 réel. Alors, si $z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$,

$$\frac{|a_{2n+2}z^{2n+2}|}{|a_{2n}z^{2n}|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1|z|^2$$

On en déduit que, si $l_1|z|^2 > 1$, la suite $\left(a_{2n}z^{2n}\right)_{n\geq 0}$ est non bornée. Et que, en revanche, si $l_1|z|^2 < 1$, la suite $\left(a_{2n}z^{2n}\right)_{n\geq 0}$ est bornée. Ce qui reste encore vrai avec des conventions compréhensibles ($+\infty \times r = +\infty$ si r est un réel strictement positif) si $l_1 = +\infty$. On tient le même genre de raisonnement avec la suite $\left(a_{2n+1}z^{2n+1}\right)_{n\geq 0}$. Et enfin, on constate que la suite $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ est bornée si et seulement si les deux suites $\left(a_{2n}z^{2n}\right)_{n\geq 0}$ et $\left(a_{2n+1}z^{2n+1}\right)_{n\geq 0}$ le sont. On en déduit que le rayon de convergence est $\mathrm{Min}\left(\dfrac{1}{\sqrt{l_1}}, \dfrac{1}{\sqrt{l_2}}\right)$ (conventions habituelles $1/+\infty = 0, 1/0 = +\infty$).

Exercice 5 (Oral X). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Quel est le rayon de convergence de la série $\sum a_n^2 z^n$?

Dire que la suite $(a_n^2 z^n)$ est bornée, c'est dire que la suite $(|a_n|^2\ |z|^n)$ l'est. Ce qui équivaut à dire que la suite $\left((|a_n|\ \sqrt{|z|}\ ^n)^2\right)$ l'est. Ou à dire que la suite $\left((|a_n|\ \sqrt{|z|}\ )^n\right)$ l'est. Le rayon cherché est donc R^2. *L'intérêt de cet exercice est de rappeler que dès qu'elle devient technique, une recherche de rayon de convergence est une histoire de suites bornées pas une histoire de séries convergentes ou divergentes.*

Exercice 6 (Oral X). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes. On définit
$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Comparer les rayons de convergence des séries entières $\sum \frac{u_n}{n!} x^n$ et $\sum \frac{S_n}{n!} x^n$.

Supposons la suite $\left(\frac{S_n}{n!} x^n\right)$ bornée. En écrivant

$$\frac{u_n}{n!} x^n = \frac{S_n - S_{n-1}}{n!} x^n = \frac{S_n}{n!} x^n - \frac{x}{n} \frac{S_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}$$

on en déduit que la suite $\left(\frac{u_n}{n!} x^n\right)$ est bornée. Pour la réciproque, c'est un petit peu moins rapide, mais on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{S_n}{n!} x^n = \frac{u_n}{n!} x^n + \frac{x}{n} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} + \frac{x^2}{n(n-1)} \frac{u_{n-2}}{(n-2)!} x^{n-2} \\ + \cdots + \frac{x^{n-2}}{n(n-1)\cdots 3} \frac{u_2}{2!} x^2 + \frac{x^{n-1}}{n(n-1)\cdots 3\times 2} \frac{u_1}{1!} x + u_0 \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

Supposons qu'il existe M tel que pour tout n on ait

$$\left|\frac{u_n}{n!} x^n\right| \leq M$$

On a alors

$$\left|\frac{S_n}{n!}x^n\right| \leq M\left(1+\frac{|x|}{n}+\frac{|x|^2}{n(n-1)}+\cdots+\frac{|x|^{n-2}}{n(n-1)\cdots 3}+\frac{|x|^{n-1}}{n(n-1)\cdots 3\times 2}+\frac{|x|^n}{n!}\right)$$

et on se trouve assez facilement convaincu que

$$\left|\frac{S_n}{n!}x^n\right| \leq M\exp(|x|)$$

D'où la réciproque, et l'égalité des rayons de convergence. On peut aussi utiliser un produit de Cauchy de la série exponentielle par $\sum u_n x^n$.

Exercice 7 (Un lemme utile). Montrer que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ et $M > 0$ tels que :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |a_n| \leq M\alpha^n$$

Ce lemme est utile lorsqu'une suite (a_n) est donnée par une relation de récurrence. On trouve $\alpha > 0$ tel que l'inégalité $|a_n| \leq M\alpha^n$ soit récurrente. On ajuste M pour que cette inégalité soit vraie pour les petites valeurs de n.

Si une suite (a_n) vérifie

$$\forall n \geq 2 \qquad a_n = \frac{a_{n-1}}{n} + 2a_{n-2}$$

montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul.

La série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul si et seulement si il existe $\rho > 0$ tel que la suite $(a_n\rho^n)$ soit bornée. Donc si et seulement si il existe $\rho > 0$ et $M > 0$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |a_n|\rho^n \leq M$$

ce qui donne le résultat (en notant $\alpha = 1/\rho$).

Pour l'exemple : si $n \geq 2$, supposons que $a_{n-1} \leq M\alpha^{n-1}$ et $a_{n-2} \leq M\alpha^{n-2}$, α étant un réel > 0. Alors

$$|a_n| \leq M\left(\frac{\alpha^{n-1}}{n} + 2\alpha^{n-2}\right) = M\alpha^n\left(\frac{1}{n\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right) \leq M\alpha^n\left(\frac{1}{n\alpha} + \frac{2}{\alpha^2}\right)$$

Si on choisit $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{2\alpha} + \dfrac{2}{\alpha^2} \leq 1$, ce qui est facile (par exemple, $\alpha = 2$), ça marche, c'est récurrent. Et il suffit d'initialiser. On prend M tel que $|a_0| \leq M$ et $|a_1| \leq M\alpha$, l'initialisation est alors réalisée. Il existe donc un $\alpha > 0$ et un M tels que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |a_n \leq M\alpha^n$$

Donc la série entière $\sum a_n z^n$ a un rayon de convergence non nul. Et on peut même dire que ce rayon de convergence est supérieur ou égal à $1/\alpha$ pour n'importe quel α qui convient, donc supérieur ou égal à $1/2$ (on pourrait mieux faire).

Exercice 8. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière

$$\sum_{n\geq 1} \big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^n$$

en la variable réelle x.
La série converge-t-elle pour les valeurs R et $-R$ de la variable ?
Démontrer que la convergence est uniforme sur le segment $[-R, 0]$.
Etudier la limite en R (à gauche) de $(R-x)S(x)$ où S désigne la fonction somme de la série entière.

Le rayon est, d'après le cours, le même que celui de $\sum \frac{1}{n}x^n$, (car $\ln(1+1/n) \sim 1$), donc vaut 1. Pour 1, ça diverge (Riemann, comparaison à la série harmonique), pour -1 ça converge (séries alternées). La convergence uniforme sur $[-1, 0]$ est donnée par la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées. Si $x \in [0, 1[$, les séries écrites ci-après convergent toutes, on n'a donc pas besoin de passer aux sommes partielles :

$$\begin{aligned}
(1-x)S(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^n - \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})\big)x^n - \sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^n \\
&= (\ln 2)x + \sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^n
\end{aligned}$$

(On a fait ici une transformation d'Abel). Notons $b_n = \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln(1+\frac{1}{n-1})$. La série $\sum |b_n|$ converge (série télescopique), donc $\sum_{n\geq 2}\left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right)x^n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0, 1]$. Ce qui montre que

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(1+\frac{1}{n-1})\big)x^n \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=2}^{+\infty}\big(\ln(1+\frac{1}{n})-\ln(1+\frac{1}{n-1})\big) = -\ln 2$$

On obtient donc que $(1-x)S(x) \underset{x \to 1}{\longrightarrow} 0$ ce qui n'est pas très surprenant : on pourrait avoir l'intuition que S a « le même comportement » au voisinage de 1 que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$, c'est-à-dire $-\ln(1-x)$, ce qui est démontrable mais en utilisant les ϵ.

Exercice 9. Développer en série entière la fonction

$$t \longmapsto \int_0^t \sin(u^2)du$$

Opérations sur les séries entières :

$$\forall u \in \mathbf{R} \qquad \sin(u^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{u^{4n+2}}{(2n+1)!}\mathrm{d}u$$

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad \int_0^t \sin(u^2)\mathrm{d}u = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{t^{4n+3}}{(2n+1)! \times (4n+3)}$$

Exercice 10 (Oral ccp)**.** Montrer, pour tout $t \in [-1, 1[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n} = -\ln(1-t)$$

Sur $]-1, 1[$, c'est du cours, qu'on retrouve éventuellement par primitivation du DSE de $\dfrac{1}{1-x}$. En -1, on trouve le résultat en montrant la convergence uniforme de $\sum (t \mapsto \dfrac{t^n}{n})$ sur $]-1, 0]$ ou sur $[-1, 0]$ au choix. Dans le premier cas, on appliquera alors le théorème de la double limite, dans le deuxième la transmission de la continuité. La convergence uniforme se montre en utilisant la majoration du reste dans le théorème sur les séries alternées.

Exercice 11. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels positifs, décroissante, ayant pour limite 0. Démontrer que la série entière $\sum_{n\geq 0}(-1)^n a_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1, et que sa somme est continue sur le segment $[0,1]$. En partant des développements en série entière de $\ln(1+x)$ et $\arctan x$, en déduire les égalités suivantes :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots=\ln 2$$

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}$$

C'est la manière la plus commode, avec le programme, d'aboutir à la somme de la série harmonique alternée. Il est donc intéressant de savoir faire cette démonstration.

Par théorème spécial sur les séries alternées, $\sum(-1)^n a_n\ (1)^n$ converge. Donc le rayon de convergence est ≥ 1. De plus, la série $\sum(-1)^n a_n x^n$ vérifie les hypothèses du théorème spécial pour tout $x\in[0,1]$. Ce qui permet, d'une part de définir, pour tout $x\in[0,1]$,

$$R_n(x)=\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^k a_k x^k$$

et d'autre part d'écrire, pour tout $x\in[0,1]$,

$$|R_n(x)|\leq a_{n+1}x^{n+1}\leq a_{n+1}$$

Ce qui montre la convergence uniforme vers $\widetilde{0}$ de la suite de fonctions (R_n), c'est-à-dire la convergence uniforme sur $[0,1]$ de la série de fonctions $\sum_{n\geq 0}(x\mapsto(-1)^n a_n x^n)$. Les fonctions $x\mapsto(-1)^n a_n x^n$ étant continues, la transmission de la continuité par convergence uniforme conclut.

L'application de ce résultat à la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = 1/n$ (on commence à $n=1$, ça ne change rien) permet de prolonger en 1 l'identité connue

$$\forall x\in[0,1[\qquad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

d'où la somme de la série harmonique alternée. Pour l'autre série, on dit que, de même, l'identité

$$\forall x \in [0,1[\qquad \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

se prolonge par continuité en 1 (si on tient à se ramener scrupuleusement aux hypothèses précédentes, on peut tout diviser par x, poser $y = \sqrt{x}$, etc. . .mais il est plus naturel de remarquer que le raisonnement utiisant le théorème spécial marche aussi bien dans ce cas particulier.

Exercice 12 (**Transformation d'Abel et théorème d'Abel, voir ccp 05).** Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R (on suppose que R est un réel strictement positif). Soit z_0 un nombre complexe de module R, tel que la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge. On veut démontrer qu'alors la série $\sum a_n z^n$ converge uniformément sur le segment $[0, z_0]$.

1. On se place dans le cas où $z_0 = R = 1$. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $\displaystyle\rho_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.
   Soit x un élément du segment $[0,1]$. Pour tout entier naturel n et tout entier naturel non nul p, démontrer que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k x^k = \rho_n x^{n+1} - \rho_{n+p} x^{n+p} + \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \rho_k x^k (x-1)$ (remarquer que $a_k = \rho_{k-1} - \rho_k$).
   En déduire que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k = \rho_n x^{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \rho_k x^k (x-1)$
   En déduire la convergence uniforme de $\sum a_n x^n$ sur le segment $[0,1]$.
2. Démontrer que le cas général peut se ramener au cas précédent.
3. Soit θ un élément de $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$. On rappelle (cela se démontre à l'aide d'une transformation d'Abel) que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n}$ converge. On consi-

dère la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} z^n$. Son rayon de convergence est donc au moins égal à 1. On note ϕ sa somme. Démontrer que, pour tout réel $t \in [0, 1[$,

$$\phi(t) = -\frac{1}{2} \ln\bigl(1 - 2t\cos\theta + t^2\bigr)$$

(on pourra d'abord calculer $\phi'(t)$). En déduire, en utilisant le résultat du **a.**, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n} = -\ln\Bigl(2\Bigl|\sin\frac{\theta}{2}\Bigr|\Bigr)$$

Calculer, de manière analogue,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n\theta}{n}\ .$$

Exercice 13. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R strictement positif. On note f sa somme. Soit r un élément de $[0, R[$. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi r^n}\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta$$

On note alors $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$. Justifier l'existence de $M(r)$, et majorer $|a_n|$ à l'aide de r, n, $M(r)$.
Que peut-on dire d'une série entière dont le rayon de convergence est infini et dont la somme est bornée ?

Si $0 \leq r < R$, on a $|re^{i\theta}| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{ip\theta}$$

et donc, si n est un entier naturel,

$$f\left(re^{i\theta}\right)e^{-in\theta} = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On peut alors se douter qu'il va s'agir d'un problème de permutation série-intégrale. Définissons (après avoir fixé $n \in \mathbf{N}$)

$$\phi_p \;:\; \theta \longmapsto a_p r^p e^{i(p-n)\theta}$$

On a $N_\infty(\phi_p) = |a_p|r^p$, donc $\sum_p N_\infty(\phi_p)$ converge (car $r < R$), donc $\sum \phi_p$ converge uniformément car normalement sur le segment $[0, 2\pi]$. On peut alors permuter.
On peut aussi utiliser le théorème le plus fréquemment utilisé pour ce genre de permutation (parce qu'il ne demande pas la convergence uniforme, parce qu'il n'impose pas d'être sur un segment...), celui dont l'hypothèse cruciale est la convergence de $\sum N_1(\phi_p)$. Il suffit de remarquer que

$$N_1(\phi_p) \leq 2\pi|a_p|r^p$$

Bref, tout cela permet d'écrire

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta})e^{-in\theta}d\theta = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(a_p r^p \int_0^{2\pi} e^{i(p-n)\theta}\mathrm{d}\theta\right)$$

Or on calcule facilement (surtout sans repasser par cosinus et sinus !) :

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta}\mathrm{d}\theta = 0 \quad \text{si} \quad k \in \mathbf{Z}\setminus\{0\}$$

Si $k = 0$, le calcul est immédiat. On aboutit finalement à la formule souhaitée.
Le cercle de centre 0 et de rayon r est un compact inclus dans le disque ouvert de convergence, donc f, continue, est bornée sur ce compact, ce qui justifie l'existence de $M(r)$. Une majoration d'intégrale standard donne alors

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n}$$

Si $R = +\infty$ et si f est bornée, on peut majorer tous les $M(r)$ par un même M indépendant de r. On a alors

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n}$$

et en prenant la limite quand $r \to +\infty$, on trouve

$$\forall n \geq 1 \qquad a_n = 0$$

et donc f est constante.
Par exemple, le cosinus, le sinus sont constants (ça, c'est sûrement faux, mais pourquoi ?).

Exercice 14 (Oral TPE)**.** Ecrire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx$ sous forme d'une somme de série.

Les intégrations par parties font tourner en rond...Il faut d'abord montrer l'existence...Du côté de 0, par exemple :

$$\left|\frac{\ln x}{1-x}\right| \underset{x\to 0}{\sim} |\ln x| = \underset{x\to 0}{o}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right)$$

qui montre l'intégrabilité sur $]0,1/2]$. Puis du côté de 1, la fonction est prolongeable par continuité, car

$$\ln x = \ln\left(1+(x-1)\right) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$$

Ensuite, on peut écrire, si $x\in [0,1[$,

$$\frac{\ln x}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \ \ln x$$

On note $\phi_n \ : \ x\mapsto x^n \ \ln x$ et, par parties :

$$N_1(\phi_n) = -\int_0^1 x^n \ln x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\int_0^1 x^n \ \mathrm{d}x = \frac{1}{(n+1)^2}$$

Le théorème d'interversion s'applique alors, et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

Exercice 15. Ecrire comme somme d'une série simple l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{\ln t \ln(1-t)}{t}dt$$

après avoir prouvé son existence.

En 1, prolongement par continuité. En 0, $-\ln t$ est un équivalent, d'où l'intégrabilité en disant par exemple que c'est négligeable devant $1/x^{1/2}$. Puis on utilise le DSE de $\ln(1-x)$ et une interversion série-intégrale avec le théorème habituel.

Exercice 16 (Oral Centrale). Trouver le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n x^n}{(n!)^2}$. On note $f(x)$ sa somme.

Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$, si $x > 0$?.

Avec, par exemple, la règle de d'Alembert, on trouve que la série converge toujours. Donc le rayon de convergence vaut $+\infty$. Soit maintenant $x > 0$; on a, pour tout $t \geq 0$,

$$e^{-xt} f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-xt}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$$

Définissons donc, sur $[0, +\infty[$, ϕ_n ($n \in \mathbf{N}$) par

$$\phi_n(t) = e^{-xt}\frac{(-1)^n t^n}{(n!)^2}$$

comme $|\phi_n(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, ϕ_n est continue intégrable (comparaison à l'exemple de Riemann) sur $[1, +\infty[$, donc sur $[0, +\infty[$. $\displaystyle\sum_n \phi_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, sa somme est continue (on la connaît). On calcule par intégrations par parties successives :

$$N_1(\phi_n) = \frac{1}{n! x^{n+1}}$$

qui est le terme général d'une série convergente (encore d'Alembert par exemple. Mais on peut dire que c'est une série exponentielle). On conclut que $t \mapsto e^{-xt} f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, et que son intégrale est

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} \phi_n(t)\ dt = \frac{1}{x}e^{-1/x}$$

Exercice 17. Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. On note, si $|x| < R$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$? On note F sa somme ; démontrer que, si $|x| < R$,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} F(xz) e^{-z} dz$$

Le rayon vaut $+\infty$. En effet, soit $r \in]0, R[$. La suite $(a_n r^n)$ est bornée. Or, si x est quelconque,

$$\frac{a_n}{n!} x^n = a_n r^n \times \frac{1}{n!} \times \left(\frac{x}{r}\right)^n$$

Par croissances comparées, cette suite converge vers 0. Donc le rayon de convergence ne peut pas être réel.

Posons ensuite, pour tout entier naturel n,

$$\forall z \in [0, +\infty[\qquad \phi_n(z) = e^{-z} \frac{a_n}{n!} x^n z^n$$

On constate (comparaison à Riemann) que ϕ_n est intégrable sur $[0, +\infty[$, et que

$$N_1(\phi_n) = |a_n x^n|$$

Donc, si $|x| < R$, $\sum N_1(\phi_n)$ converge, on peut intervertir...

Exercice 18 (Oral Centrale)**.** Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$. On note, si $|x| < R$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} x^n$? On note $g(x)$ sa somme ; démontrer que, si $x > 1/R$,

$$\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) = \int_0^{+\infty} g(t) e^{-xt} dt$$

C'est presque la même chose que l'exercice précédent !

Exercice 19. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. On définit, pour tout entier naturel n,

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \ .$$

Démontrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum b_n z^n$ est au moins égal à $\min(1, R)$, et calculer sa somme à l'aide de la somme de la série $\sum a_n z^n$.

La série $\sum b_n z^n$ est le produit de Cauchy de la série entière $\sum a_n z^n$ par la série entière $\sum z^n$.

Exercice 20. Pour chacune des séries entières suivantes, préciser le rayon de convergence et calculer la somme au moyen des fonctions usuelles.
$\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$ (*Mines*)

Le rayon de convergence est infini (critère de D'Alembert si on tient à parler de séries, croissances comparées si on parle de suites bornées). De même que la considération des dse de $\exp(z)$ et $\exp(-z)$ permet de calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^{3n}}{(2n)!}$, on peut avoir l'idée d'écrire les dse de $\exp(z)$, $\exp(jz)$ et $\exp(j^2z)$. Chacun de ces dse peut se scinder en 3 paquets suivant la congruence modulo 3 de l'indice (les paquets convergent sans problème). En ajoutant, on trouve le résultat, $\displaystyle\frac{1}{3}\left(e^z + e^{jz} + e^{j^2z}\right)$.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\sin(n\theta)$ (*Mines*)

Rayon de convergence infini encore...mais là, pas par D'Alembert. Les croissances comparées et les suites bornées marchent bien. La notation x incite à penser que la variable est réelle, on fait donc apparaître la somme comme partie imaginaire de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}e^{in\theta}$ qui est l'exponentielle de $xe^{i\theta}$. On trouve donc

$$e^{x\cos\theta}\sin(x\sin\theta)$$

Si jamais x était complexe non réel, on devrait commencer par écrire

$$\sin(n\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{in\theta} - e^{-in\theta}\right)$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n}\sin(n\theta)$ (*Mines*)

Commençons par remarquer que le rayon de convergence est ≥ 1. Visiblement, pour θ multiple de π, il est infini. Supposons ici aussi x réel. On passe alors par la dérivation : par théorème de dérivation des séries entières, sur $]-1,1[$ la somme a pour dérivée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(n\theta)$$

On est donc ramené à calculer la partie imaginaire de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n e^{in\theta}$$

Or cette série est géométrique...

$$\sum_{n\geq 0} n^3 z^n$$

Rayon de convergence : 1. Le plus rapide est de décomposer

$$X^3 = \alpha X(X-1)(X-2) + \beta X(X-1) + \gamma X + \delta$$

(prenant les valeurs en 0, 1, 2, on obtient $\delta = 0$, puis $\gamma = 1$, puis $\beta = 3$, enfin $\alpha = 1$ en égalant les coefficients dominants. Donc

$$n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$$

Or on connaît $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ (si $|z| < 1$), $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} nz^{n-1} = \frac{1}{(1-z)^2}$ (dérivation si la variable réelle, produit de Cauchy si la variable est complexe), $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2} = \frac{2}{(1-z)^3}$ etc...

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{2n+1}$$

Pas si évident, vu plus loin en exercice.

$$\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} x^n$$

On coupe en deux : les termes d'indices pairs, les termes d'indices impairs.

$$\sum_{n\geq 0} (\sin n) z^n$$

C'est la partie imaginaire d'une série géométrique.

$$\sum_{n\geq 0} \frac{n^3+2}{n!} z^n$$

On écrit $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$ comme plus haut, pour avoir des simplifications avec la factorielle du dénominateur.

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n(n+2)}$$

On décompose en éléments simples ou on dérive (il vaut mieux supposer la variable réelle).

$$\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{(2n)!}$$

Il vaut mieux supposer la variable réelle. Si $z > 0$, on trouve $\mathrm{ch}(\sqrt{z})$. Si $z < 0$, on trouve $\cos(\sqrt{-z})$.

$$\sum_{n\geq 0} \big((3 + 2(-1)^n)\big)^n x^n$$

On sépare les termes pairs et les termes impairs.

Exercice 21 (Oral Mines). Démontrer que ϕ définie par

$$\phi(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)} x^n$$

est continue sur $[-1, 1]$, et exprimer ϕ au moyen des fonctions usuelles (on utilisera deux méthodes : dérivation, et décomposition en éléments simples).

La décomposition en éléments simples est la méthode la plus générale (y penser quand on vous demande de calculer $\sum F(n)z^n$ où F est une fraction rationnelle). On commence par constater que la série entière définissant ϕ converge normalement sur $[-1, 1]$, d'où la continuité de la somme sur $[-1, 1]$. Le calcul qui suit comporte une étape délicate : on coupe en deux la somme de la série. Pour cela, il est prudent (c'est même impératif !) de supposer $x \in]-1, 1[$. On trouve alors

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \\
&= x \ln(1+x) + \ln(1+x) - x \\
&= (x+1) \ln(1+x) - x
\end{aligned}$$

Et, par continuité, $\phi(1) = 2\ln 2 - 1$, $\phi(-1) = -1$.
L'autre méthode est ici assez naturelle : on voit n au dénominateur, on dérive pour le simplifier. Mais attention là aussi, il faut prudemment rester dans $]-1, 1[$. Le fait que ϕ soit continue sur tout $[-1, 1]$ fermé ne prouve pas qu'elle soit dérivable sur $[-1, 1]$.
On a donc

$$\forall x \in]-1, 1[\qquad \phi'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n-1} x^{n-1} = \ln(1+x)$$

Comme une primitive de ln est $u \mapsto u \ln(u) - u$, on en déduit le résultat (pour « la constantre », on sait que $\phi(0) = 0$).

Exercice 22 (Oral Centrale). Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}$ sur son domaine de définition.

Le rayon de convergence est 1, le domaine de définition $[-1, 1[$ (la convergence en -1 s'obtient par TSSA). Si $x > 0$, on peut écrire

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1}$$

Reste à calculer

$$\phi(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^{2n+1}}{2n+1}$$

Mais la dérivée fait disparaître le dénominateur, donc, si $y \in]-1, 1[$,

$$\phi'(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} y^{2n} = \frac{1}{1-y^2}$$

Et donc, comme $\phi(0) = 0$, si $y \in]-1, 1[$,

$$\phi(y) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$$

Donc, si $x > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$$

Si $x < 0$, on peut écrire $x = -(-x) = -(\sqrt{-x})^2$. On en déduit, si $-1 < x < 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{-x}} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\sqrt{-x})^{2n+1}}{2n+1} = \frac{\operatorname{Arctan}\left(\sqrt{-x}\right)}{\sqrt{-x}}$$

Exercice 23 (Oral Mines). Déterminer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)^2}$.

Le rayon de convergence vaut 1. Notons $f(x)$ la somme. Dans la suite, on suppose, jusqu'à nouvel ordre, $x \in]-1,1[$. Il est naturel de dériver pour déjà faire disparaître un $2n+1$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n+1} = \frac{\text{Arctan} x}{x}$$

et, finalement,

$$f(x) = \int_0^x \frac{\text{Arctan} t}{t} \mathrm{d}t$$

(encore vrai en -1 et en 1 par continuité. On suppose évidemment $\dfrac{\text{Arctan} x}{x}$ prolongé par continuité en 0 par la valeur 1.

Exercice 24 (Oral Mines). Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{\sum_{k=1}^{n} k^2}$ sur son domaine de définition.

On se souvient de, mais il faut savoir retrouver :

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Le rayon de convergence est, comme d'habitude, 1 (d'Alembert par exemple). Notons $f(x)$ la somme, supposons $x \in]-1,1[$, dérivons :

$$f'(x) = 12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{n(2n+1)}$$

On a évidemment envie de recommencer :

$$f''(x) = 12 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{n}$$

ou encore

$$f''(x) = -12\ln(1-x^2)$$

Reste à primitiver : $f'(0) = 0$, et $f''(x) = -12\ln(1-x) - 12\ln(1+x)$. Donc

$$\frac{1}{12}f'(x) = (1-x)\ln(1-x) + 2x - (1+x)\ln(1+x)$$

(par parties, ou en se souvenant du fait que $u \mapsto u\ln(u) - u$ est une primitive de ln). Reste à primitiver encore une fois, par parties de nouveau, en constatant que $f(0) = 0\ldots$

$$\begin{aligned}\frac{1}{12}f(x) &= \int_0^x ((1-t)\ln(1-t) + 2t - (1+t)\ln(1+t))\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}(1-x)^2\ln(1-x) + \frac{1}{4}(1-x)^2 - \frac{1}{4} + x^2\ldots \\ &\cdots - \frac{1}{2}(1+x)^2\ln(1+x) + \frac{1}{4}(1+x)^2 - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

expression dont on peut compacter la partie polynomiale, si on veut...

Exercice 25 (Oral Centrale). On définit une suite (a_n) par $a_0 = a_1 = 1$ et, pour $n \in \mathbf{N}_*$, $a_{n+1} = a_n + \dfrac{a_{n-1}}{n+1}$. Trouver le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et calculer sa somme à l'aide d'une équation différentielle.

Exercice 26 (Oral Centrale ; classique : développement en série entière d'une fonction rationnelle).

1. Soit a un nombre complexe non nul. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$ est développable en série entière sur un disque ouvert centré en 0. Donner ce développement, et son rayon de convergence.
2. En déduire que, si m est un entier naturel non nul et a un complexe non nul, $z \mapsto 1/(z-a)^m$ est développable en série entière sur $D(0,|a|)$. Calculer les coefficients de ce développement.
3. Soit F une fraction rationnelle complexe n'admettant pas 0 pour pôle. En utilisant la décomposition en éléments simples de F, démontrer que F est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (on l'exprimera en fonction des modules des pôles de F)
4. On écrit F sou forme irréductible : $F = P/Q$. En écrivant $QF = P$, démontrer que la suite des coefficients du développement en série entière de F vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.
5. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit a_n le nombre de solutions de l'équation $x+2y+5z = n$, d'inconnue $(x,y,z) \in \mathbf{N}^3$. Montrer, si $|z| < 1$, que
$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
6. Donner un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.

Soit a un nombre complexe non nul. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/(z-a)$ est développable en série entière sur un disque ouvert centré en 0. Donner ce développement, et son rayon de convergence.

On essaye de se ramener à un dse classique : celui de $\dfrac{1}{1-u}$ sur $D(0,1)$. On écrit donc
$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}\frac{1}{1-z/a}$$

et donc, sur $D(0,|a|)$,

$$\frac{1}{z-a} = \frac{-1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^n}z^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{a^{n+1}}z^n$$

Il n'est pas difficile de voir que le rayon de convergence de cette série entière est $|a|$.

En déduire que, si m est un entier naturel non nul et a un complexe non nul, $z \mapsto 1/(z-a)^m$ est développable en série entière sur $D(0,|a|)$. Calculer les coefficients de ce développement.

Lorsqu'on cherche à passer du dse de $\dfrac{1}{1-z}$ à un dse de $\dfrac{1}{(1-z)^2}$, on pense peut-être d'abord à la dérivation. Le problème est que dans le cadre du programme, on ne peut pas dériver des fonctions d'une variable complexe. Intéressons-nous quand même à cette dérivation :
Par théorème de dérivation terme à terme des séries entières, de

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

on déduit

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

Mais on peut dériver autant qu'on veut. On aura donc, en dérivant $m-1$ fois le dse de $1/(1-x)$ (on suppose $m \geq 2$),

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{(m-1)!}{(1-x)^m} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \frac{n!}{(n-m+1)!} x^{n-m+1}$$

Ou encore, en arrangeant les expressions :

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{n=m-1}^{+\infty} \binom{n}{m-1} x^{n-m+1}$$

que l'on peut réindexer en

$$\forall x \in]-1,1[\quad \frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{k+m-1}{k} x^k$$

Voilà. . .pour une variable réelle. Il est à noter que seule notre ignorance nous empêche d'étendre ce qui vient d'être fait à une variable complexe ! mais dans le cadre du programme, une autre opération que la dérivation nous permet d'avancer : le produit de Cauchy. En effet, l'écriture

$$\frac{1}{(z-a)^{m+1}} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{(z-a)^m}$$

nous permet, par récurrence, de conclure directement à la développabilité en série entière sur $D(0,|a|)$ de $z \mapsto 1/(z-a)^m$.
En revanche, cette technique par produit de Cauchy n'est pas idéale pour le calcul des coefficients. Définissons :

$$\forall m \geq 1 \ \forall z \in D(0,|a|) \quad \frac{1}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} z^n$$

On a déjà

$$\forall n \geq 0 \quad \alpha_{1,n} = \frac{-1}{a^{n+1}}$$

(dse de $1/(z-a)$, voir ce qui précède), puis, par produit de Cauchy :

$$\forall m \geq 1 \quad \forall n \geq 0 \qquad \alpha_{m+1,n} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{m,k}\alpha_{1,n-k}$$

donc, par exemple, pour s'entraîner un peu :

$$\alpha_{2,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{-1}{a^{k+1}}\frac{-1}{a^{n-k+1}} = \frac{n+1}{a^{n+2}}$$

Si on continue, les calculs sont moins pratique. Mais si on sait que

$$\forall m \geq 1 \ \forall z \in D(0,|a|) \quad \frac{1}{(z-a)^m} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} z^n$$

alors, de

$$\frac{1}{(z-a)^m} = \frac{(-1)^m}{a^m}\frac{1}{(1-z/a)^m}$$

on déduit

$$\forall m \geq 1 \ \forall u \in D(0,1) \quad \frac{1}{(1-u)^m} = (-a)^m \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_{m,n} a^n u^n$$

($z = au$, $u = z/a$) ; ce dse est a fortiori valable sur $]-1,1[$ et donc, **par unicité du dse**, les coefficients sont ceux qu'on a calculés par dérivation :

$$\alpha_{m,n} = \frac{(-1)^m}{a^{n+m}} \binom{n+m-1}{n}$$

Soit F une fraction rationnelle complexe n'admettant pas 0 pour pôle. En utilisant la décomposition en éléments simples de F, démontrer que F est développable en série entière au voisinage de 0. Quel est le rayon de convergence de cette série entière ? (on l'exprimera en fonction des modules des pôles de F)

Appelons $a_1 \ldots, a_p$ les pôles de F (tous non nuls), de multiplicités respectives $m_1, \ldots, m_p$. La décomposition en éléments simples de F s'écrit

$$F(z) = E(z) + \sum_{j=1}^{p} \Big(\sum_{k=1}^{m_j} \frac{\alpha_{j,k}}{(z-a_j)^k} \Big)$$

les $\alpha_{j,k}$ étant des nombres complexes. La partie entière est polynomiale, donc développable en série entière sur $\mathbf{C}$. Par combinaison linéaire, F est au moins développable en série entère sur $D(0,r)$ où $r = \min\limits_{1 \leq j \leq p} (|a_j|)$. Mais s'il y a un pôle au moins double dont le module est égal à r, ou si plusieurs pôles ont pour module r, on ne peut exclure a priori que le rayon de convergence d'une combinaison linéaire de séries entières de rayon $\geq r$ soit strictement supérieur à r.

Cependant, ici, cela ne se peut. Supposons en effet

$$\forall z \in D(0,r) \quad F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n z^n$$

et supposons que le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_n \mu_n z^n$ soit $R > r$. Notons alors, pour tout $z \in D(0,R)$,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n z^n$$

G coïncide avec F sur $D(0,r)$, et est bornée sur $D'(0,r)$ qui est un compact inclus dans $D(0,R)$. Soit a_{i_0} un pôle de F tel que $|a_{i_0}| = r$. Alors

$$\left|G(ta_{i_0})\right| = \left|F(ta_{i_0})\right| \xrightarrow[t\to 1, t<1]{} +\infty$$

Mais cela contredit le fait que G est bornée sur $D'(0,r)$.

> On écrit F sous forme irréductible : $F = P/Q$. En écrivant $QF = P$, démontrer que la suite des coefficients du développement en série entière de F vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.

Le produit QF d'une fonction polynôme, donc développable en série entière avec pour rayon de convergence $+\infty$, par F, développable en série entière avec pour rayon de convergence $r > 0$, est développable en série entière au moins sur $D(0,r)$ par produit de Cauchy. Ecrivons

$$\forall z \in D(0,|a|) \quad Q(z)F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu_n z^n$$

Comme par ailleurs $QF = P$, on peut aussi écrire, pour tout $z \in D(0,|a|)$ (et plus généralement pour tout z qui n'est pas un pôle de F)

$$Q(z)F(z) = P(z) = \sum_{n=0}^{d} p_n z^n$$

(P est polynomial). Mais un développement polynomial est un développement en série entière particulier, l'unicité du développement en série entière s'applique donc et permet d'écrire

$$\forall n > d \qquad \nu_n = 0$$

ce qui, écrivant $Q(z) = q_0 + q_1 z + \ldots + q_\delta z^\delta$ et utilisant la formule qui donne le produit de Cauchy, donne

$$\forall n > d \qquad \sum_{k=0}^{\delta} q_k \mu_{n-k} \;=\; 0$$

($\sum_{\mu=0}^{+\infty} \mu_n z^n$ désignant toujours le dse de F). Mais $q_0 \neq 0$ (0 n'est pas pôle de F), on obtient donc

$$\forall n > d \qquad \mu_n = -\sum_{k=1}^{\delta} \frac{q_k}{q_0}\mu_{n-k} \;=\; -\frac{q_1}{q_0}\mu_{n-1} - \ldots - \frac{q_\delta}{q_0}\mu_{n-\delta}$$

> Pour $n \in \mathbf{N}$, soit a_n le nombre de solutions de l'équation $x + 2y + 5z = n$, d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbf{N}^3$. Montrer, si $|z| < 1$, que
>
> $$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
>
> Puis donner un équivalent de a_n quand $n \to +\infty$.

On va calculer le dse de $\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)}$ de deux manières.

Par produit de Cauchy : Notons, ici,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n z^n \;, \qquad \frac{1}{1-z^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \beta_n z^n \;, \qquad \frac{1}{1-z^5} = \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_n z^n.$$

On a, si on note $\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \delta_n z^n$ et $\dfrac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, pour tout n on a

$$\begin{aligned} c_n &= \sum_{p+q=n} \delta_p \gamma_q \\ &= \sum_{p+q=n} \Big(\sum_{r+s=p} \alpha_r \beta_s \Big) \gamma_q \\ &= \sum_{r+s+q=n} \alpha_r \beta_s \gamma_q \end{aligned}$$

(en effet, $\{(r,s,q) \in \mathbf{N}^3 \; ; \; r+s+q = n\} = \bigcup_{q=0}^{n} \{(r,s,q) \in \mathbf{N}^3 \; ; r+s = n-q\}$).
Mais $\alpha_r = 1$, $\beta_s = 1$ si s pair, $\beta_s = 0$ si s impair, $\gamma_q = 1$ si $5|q$, $\gamma_q = 0$ sinon.

Donc $\alpha_r\beta_s\gamma_q = 1$ si et seulement si $s = 2y$ et $q = 5z$, 0 sinon. On obtient donc $c_n = a_n$.

Par décomposition en éléments simples : On écrit

$$\frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \frac{k_1}{(1-z)^3} + \frac{k_2}{(1-z)^2} + \frac{k_3}{1-z} + \frac{k_4}{1+z} + \frac{k_5}{\omega - z} + \frac{k_6}{\omega^2 - z} + \frac{k_7}{\omega^3 - z} + \frac{k_8}{\omega^4 - z}$$

avec par exemple $\omega = \exp(2i\pi/5)$. On sait développer en série entière chacun de ces éléments simples. Mais en se reportant à la question 2, on voit que le coefficients « de degré n » de ce développement est $O(n)$ pour tous les éléments simples sauf le premier, qui est équivalent à quelquechose$\times n^2$. Donc on n'a besoin que de ce premier élément simple. Or

$$\frac{(1-z)^3}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)} = \frac{1}{(1+z)(1+z+z^2+z^3+z^4)}$$

. Donc $k_1 = 1/10$. Mais

$$\frac{2}{(1-z)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)z^{n-2}$$

(en dérivant deux fois le dse de $1/(1-z)$, ou en reprenant les formules vues plus haut). Donc

$$\frac{1}{(1-z)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2} z^n$$

et, finalement,

$$a_n \sim \frac{n^2}{20}$$

Exercice 27 (Oral X, classique : développement en série entière d'une fonction rationnelle).

1. Soit $R(X)$ une fraction rationnelle n'admettant pas 0 pour pôle. Montrer que $x \mapsto R(x)$ est développable en série entière. Quel est le rayon de convergence du développement ? On pose $R(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. Montrer que la suite (u_n) vérifie, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire.

2. Soit (u_n) une suite vérifiant, à partir d'un certain rang, une relation de récurrence linéaire. Montrer que la série $\sum u_n x^n$ a un rayon de convergence strictement positif et que sa somme est une fonction rationnelle.

Exercice 28 (oral X, dénombrement et série génératrice). Soit b_n le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Calculer b_0, b_1, b_2 et b_3. Trouver une relation de récurrence entre les b_n ; exprimer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$ à l'aide des fonctions élémentaires.

Exercice 29 (Oral TPE, dénombrement et série génératrice). Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit d_n le nombre de permutations sans point fixe de $\{1, \ldots, n\}$. On convient $d_0 = 1$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\displaystyle\sum \frac{d_n x^n}{n!}$ est ≥ 1.
2. Pour $n \in \mathbf{N}$, prouver : $\displaystyle n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d_{n-k}$.
3. Si x est dans $]-1, 1[$, calculer $\displaystyle e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d_n x^n}{n!}$ et en déduire : $\displaystyle d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.
4. Déterminer la limite de $\dfrac{d_n}{n!}$. Interprétation ?

Exercice 30 (Oral Paris-Lyon-Cachan, dénombrement et série génératrice). Soit $p \in \mathbf{N}_*$, $a_1, \ldots, a_p$ des éléments de $\mathbf{N}_*$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit V_n le nombre de $(x_1, \ldots, x_p)$ de $\mathbf{N}^p$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} a_i x_i = n$.

1. Si z est un complexe de module < 1, calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} V_n x^n$.
2. Donner un équivalent de V_n.

Exercice 31. Développer en série entière, si c'est possible, les fonctions suivantes. Préciser le rayon de convergence.

$x \longmapsto (1+x)\ln(1+x)$ $\qquad$ $x \longmapsto \dfrac{\ln(1+x)}{x(1+x)}$

$x \longmapsto \ln(1+x+x^2)$ (une petite astuce permet d'obtenir des calculs simples)

$x \longmapsto (\arcsin x)^2$ en utilisant une équation différentielle liant la dérivée et la dérivée seconde.

$x \longmapsto \sin^2 x$ sans, quasiment, faire de calculs.

Exercice 32. Soit f une application de classe C^∞ sur un intervalle $[a, b[$ ($a < b$), à valeurs dans $\mathbf{R}$, positive sur cet intervalle ainsi que toutes ses dérivées.

1. Démontrer que la fonction tan vérifie ces hypothèses sur $[0, \pi/2[$.
2. Soit c un élément quelconque de $[a, b[$, x un élément de $[a, c]$. On écrit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x)$$

Rappeler l'expression de $R_n(x)$ sous forme d'intégrale. En ramenant par changement de variable cette intégrale à une intégrale sur le segment $[0, 1]$, démontrer que

$$0 \leq R_n(x) \leq \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n+1} R_n(z) \leq \left(\frac{x-a}{z-a}\right)^{n} f(z)$$

pour tout élément z de $]c, b[$.

3. Démontrer que, pour tout élément x de $[a, b[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

et que la convergence est uniforme sur tout compact de $[a, b[$.

Exercice 33 (Oral Centrale). On pose

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t^x}{1+t} dt$$

1. Donner le domaine de définition de F.
2. Montrer que F est développable en série entière au voisinage de 0, préciser sur quel intervalle.

On peut utiliser les théorèmes de classe C^∞ sous le signe $\int$, calculer les dérivées successives, majorer le reste dans l'inégalité de Taylor-Lagrange...Seul réel inconvénient : c'est long. Il y a plus rapide, ce qui suit :
Principales étapes : développer t^x en utilisant le dse de l'exponentielle. On doit alors intervertir. Pour appliquer le théorème le permettant, on doit évaluer l'ordre de grandeur de

$$\int_0^1 \frac{(-\ln t)^n}{1+t} \mathrm{d}t$$

Et la bonne idée est de se débarrasser du $1+t$ en l'encadrant entre 1 et 2. Ce qui permet alors d'intégrer.

III Utilisation de la sommabilité

Exercice 34 (Analyticité d'une somme de série entière). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. On note f sa somme, définie sur $D(0, R)$. Soit a un point de ce disque ouvert. En utilisant une série double, démontrer qu'il existe une suite (b_n) telle que, pour tout nombre complexe h tel que $|h| < R - |a|$,

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n h^n$$

(on développera les $(a+h)^k$ dans l'écriture de $f(a+h)$ par la formule du binôme)

Si $|h| < R - |a|$, alors $|a+h| < R$, ce qui permet d'écrire

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (a+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k \right)$$

Ici, inutile de rajouter des coefficients nuls dans la suite double qu'on va considérer : on peut en effet écrire directement

$$f(a+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (a+h)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k \right)$$

Peut-on intervertir ? posons, si $(n,k) \in \mathbf{N}^2$,

$$u_{n,k} = \binom{n}{k} a_n a^{n-k} h^k$$

On pourra intervertir dès lors qu'on aura montré la sommabilité de la famille $(u_{n,k})_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$. C'est-à-dire la sommabilité de la famille $(|u_{n,k}|)_{(n,k)\in\mathbf{N}^2}$. Pour laquelle on fait évidemment le chemin inverse de celui suivi pour arriver à cette famille :

Pour tout n, la série $\sum_{k\geq 0} |u_{n,k}|$ converge, et

$$s_n = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_{n,k}| = \sum_{k=0}^{n} |u_{n,k}| = |a_n| \; (|a| + |h|)^n$$

Or $|a_n|\ (|a|+|h|)^n \leq |a_n|R^n$ donc, par comparaison, $\sum_n |a_n|R^n$ converge. On a donc la sommabilité voulue, on peut donc intervertir et obtenir

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}a_n a^{n-k}\right)h^k$$

Exercice 35 (Première question d'un problème des Mines !). Démontrer que la fonction $x \mapsto \exp(\exp x)$ est développable en série entière sur $\mathbf{R}$.

On écrit

$$\exp(\exp x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}e^{nx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{n^p x^p}{n!\ p!}\right)$$

Cette écriture permet, en remplaçant x par $|x|$, d'obtenir la sommabilité de la famille $\left(\dfrac{n^p|x|^p}{n!\ p!}\right)_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$, donc de pouvoir intervertir, ce qui conclut.

IV Autres exercices

Exercice 36. Soit r un réel strictement positif. Calculer $\sup_{|z|\leq r}|\sin z| \quad (z \in \mathbf{C})$.

Exercice 37 (Oral Ulm-Lyon-Cachan). Démontrer que $x \mapsto \dfrac{x}{e^x-1}$ est développable en série entière, ses coefficients étant rationnels.

Soit $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$, $R>0$. Alors

$$\begin{aligned}\forall x\in]-R,R[\ f(x)=\frac{x}{e^x-1} &\Leftrightarrow \forall x\in]-R,R[\ (e^x-1)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)=x\\ &\Leftrightarrow a_0=1 \text{ et } \forall n\geq 2\ \sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_k}{(n-k)!}=0\end{aligned}$$

(en utilisant le produit de Cauchy et l'unicité du développement en série entière). D'où, finalement,

$$\forall x\in]-R,R[f(x)=\frac{x}{e^x-1}\iff a_0=1 \text{ et } \forall p\geq 1\ a_p=-\sum_{k=0}^{p-1}\frac{a_k}{(p+1-k)!}$$

Reste à s'occuper du rayon de convergence. On remarque que, si $|a_k|\leq M\rho^k$ pour $k\in [\![0,p-1]\!]$, alors

$$\begin{aligned}|a_p| &\leq M\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\rho^k}{(p+1-k)!}\\ &= M\sum_{k=2}^{p+1}\frac{\rho^{p+1-k}}{k!}\\ &\leq M\rho^{p+1}e^{-\rho}\end{aligned}$$

Or, si $\rho\leq e^\rho$, l'hypothèse est récurrente, et il suffit de prendre $M=1$ pour que la récurrence soit initialisable. Mais tout $\rho>0$ vérifie $\rho\leq e^\rho$, on en déduit que le rayon de convergence est $\geq\rho$ pour tout $\rho>0$, il est donc infini. Les a_k sont quant à eux rationnels par récurrence.

Exercice 38 (Oral Ulm-Lyon-Cachan). Soit p un nombre premier. On note, pour $x\in\mathbf{Q}^*$, $\nu_p(x)=m$ où $m\in\mathbf{Z}$ est tel que $p^{-m}x$ est quotient de deux entiers non multiples de p. On note $\mathbf{Z}_p$ l'ensemble des rationnels x tels que $\nu_p(x) \geq 0$. Etudier la structure de $\mathbf{Z}_p$; que peut-on dire de $\overline{\mathbf{Z}_p}$? Soit a un entier non multiple de p. Montrer que $x \mapsto \dfrac{a}{(1+x)^a - 1} - \dfrac{1}{x}$ est développable en série entière, ses coefficients étant dans $\mathbf{Z}_p$.

Exercice 39 (Ulm-Lyon-Cachan). Soit des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ de rayons de convergence non nuls, de sommes respectives $f(z)$ et $g(z)$.

1. Montrer que le rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$ est non nul. On note $h(z)$ la somme de cette série entière.
2. Montrer l'existence d'un voisinage V de 0 dans $\mathbf{C}$ tel que

$$\forall (z, z') \in V^2 \qquad h(zz') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta}) g(z'e^{-i\theta}) d\theta$$

---

1. Si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes non nuls tels que, respectivement, les suites $(a_n z_1^n)$ et $(b_n z_2^n)$ soient bornées, la suite $(a_n b_n (z_1 z_2)^n)$ est bornée, et donc le rayon de convergence de $\sum a_n b_n z^n$ est $\geq |z_1 z_2|$. On en déduit aussi que ce rayon de convergence est $\geq R_1 R_2$ où R_1 et R_2 sont les deux rayons des séries entières de départ.
2. Soit $r = \min(R_1, R_2)$. Supposons z et z' dans $D(0, r)$. La famille

$$\left(a_n z^n e^{in\theta} b_m z'^m e^{-im\theta}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$$

est sommable (famille « produit » de deux famille sommables. Et sa somme vaut $f(ze^{i\theta}) g(z'e^{-i\theta})$. Notons

$$\phi_{m,n} \ : \ \theta \longmapsto a_n z^n e^{in\theta} b_m z'^m e^{-im\theta}$$

et notons que $\|\phi_{m,n}\|_\infty = |a_n||z|^n |b_m||z'|^m$. La famille $(\|\phi_{m,n}\|_\infty)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ est donc sommable. Une bijection quelconque de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}\times\mathbf{N}$ permet de réindexer la famille $(\phi_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ et de l'écrire comme une suite $\left(\phi_{\alpha(p)}\right)_{p\in\mathbf{N}}$ de fonctions normalement convergente sur le segment $[0, 2\pi]$, ce qui autorise à intervertir :

$$\int_0^{2\pi} \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \phi_{\alpha(p)} \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \int_0^{2\pi} \phi_{\alpha(p)}$$

Mais les deux séries écrites dans cette égalité sont des sommes de familles sommables (autrement dit sont des séries absolument convergentes), donc commutativement sommables, on peut donc aussi bien écrire

$$\int_0^{2\pi}\left(\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}\phi_{m,n}\right)=\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}\int_0^{2\pi}\phi_{m,n}$$

ce qui donne facilement le résultat, $\int_0^{2\pi}\phi_{m,n}$ valant 0 si $m\neq n$ et $2\pi a_n z^n b_n z'^n$ si $n=m$.

Exercice 40 (Lyon). Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$, q dans $\mathbf{C}_*$ tel que $|q|<R$ et $(b_n)_{n\geq 0}\in(\mathbf{C}_*)^{\mathbf{N}}$ telle que $b_n\sim qb_{n+1}$. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n=\dfrac{1}{b_n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a_k b_{n-k}$.

On remarque que $\dfrac{b_{n-1}}{b_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}q$, et plus généralement que, pour tout $k\in\mathbf{N}$,

$$\frac{b_{n-k}}{b_n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}q^k$$

Soit, pour tout entier naturel k,

$$\phi_k\ :\ n\longmapsto\begin{cases}a_k\dfrac{b_{n-k}}{b_n} & \text{si}\quad n\geq k\\ 0 & \text{si}\quad n<k\end{cases}$$

Chaque ϕ_k, définie sur $\mathbf{N}$, a en $+\infty$ une limite : $a_k q^k$. Si on montre la convergence uniforme sur $\mathbf{N}$ (ou au moins sur un $[n_0,+\infty[$) de $\sum\phi_k$, on conclut par le théorème de la double limite. Fixons une petite « marge de manœuvre » : soit $r\in]|q|,R[$. Il existe un rang p tel que

$$\forall n\geq p\qquad\left|\frac{b_n}{b_{n+1}}\right|\leq r$$

Donc, pour tous entiers naturels n et k tels que $n-k\geq p$,

$$\left|\frac{b_{n-k}}{b_n}\right|\leq r^k$$

Mais pour faire mieux, soit

$$M = \max\left(\left|\frac{b_0}{b_1}\right|, \left|\frac{b_1}{b_2}\right|, \dots \left|\frac{b_{p-1}}{b_p}\right|\right)$$

Quitte à l'augmenter encore, on peut supposer $M \geq 1$. Réécrivons

$$\left|\frac{b_{n-k}}{b_n}\right| = \left|\frac{b_{n-k}}{b_{n-k+1}}\right| \times \left|\frac{b_{n-k+1}}{b_{n-k+2}}\right| \times \dots \times \left|\frac{b_{n-1}}{b_n}\right|$$

C'est le produit de k termes, dont au plus p ne peuvent être majorés que par M, et au moins $k-p$ majorables par r. Donc

$$\left|\frac{b_{n-k}}{b_n}\right| \leq r^{k-p}M^p = \alpha r^k$$

La convergence normale de $\sum \phi_k$ en résulte, et le résultat.

Exercice 41 (Formules de Newton, aplication à la méthode de Fadeev-Leverrier de calcul du polynôme caractéristique d'un matrice carrée). Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les racines (complexes, pas nécessairement distinctes) du polynôme caractéristique χ_A de la matrice carrée d'ordre n (réelle ou complexe) A. On note

$$\chi_A(t) = t^n - p_1 t^{n-1} - \dots - p_n$$

et, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 1 :

$$s_k = \lambda_1^k + \dots + \lambda_n^k \; .$$

1. On veut démontrer que les p_i et les s_k sont liés entre eux par les formules suivantes, dites de Newton :
   si $1 \leq k \leq n \; : \; kp_k = s_k - p_1 s_{k-1} - \dots - p_{k-1}s_1$;
   si $k \geq n+1 \; : \; s_k = p_1 s_{k-1} + \dots + p_n s_{k-n}$.
   (a) On définit, si $u \in \mathbf{C}$,

   $$f(u) = \prod_{i=1}^{n}(1 - u\lambda_i)$$

   Montrer que la fonction $\dfrac{f'}{f}$ est développable en série entière au voisinage de 0.

(b) Développer le polynôme $f(u)$ en exprimant ses coefficients à l'aide de $p_1, \dots, p_n$.

(c) Conclure.

2. Démontrer que, pour tout $k \geq 1$:

$$s_k = \mathrm{tr} A^k$$

3. On construit deux suites de matrices et une suite de nombres par l'algorithme suivant :

$$\begin{array}{lcr} A_1 = A & q_1 = \mathrm{tr} A_1 & B_1 = A_1 - q_1 I_n \\ A_2 = AB_1 & 2q_2 = \mathrm{tr} A_2 & B_2 = A_2 - q_2 I_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_n = AB_{n-1} & nq_n = \mathrm{tr} A_n & B_n = A_n - q_n I_n \end{array}$$

(a) Montrer que les q_k sont les p_k en utilisant les formules de Newton.

(b) Montrer que B_n est nulle.

4. On définit enfin le polynôme matriciel

$$Q(t) = t^{n-1} I_n + t^{n-2} B_1 + \cdots + B_{n-1}$$

et on suppose connue une valeur propre λ de A. Démontrer que chaque colonne non nulle de la matrice $Q(\lambda)$ est un vecteur propre de la matrice A.

On a

$$\frac{f'}{f}(u) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{1 - u\lambda_i}$$

qui est développable en série entière sur $D(0, r)$ où $r = \max(|\lambda_i|)$ (on suppose les λ_i pas tous nuls, sinon il n'y a rien de difficile. De plus les termes avec les λ_i nuls disparaissent dans la somme ci-dessus). Sur ce disque ouvert,

$$\frac{f'}{f}(u) = -\sum_{k=0}^{+\infty} s_{k+1} u^k$$

Mais d'autre part, si $u \neq 0$,

$$f(u) = u^n \chi_A(1/u) = 1 - p_1 u - \ldots - p_n u^n$$

encore vrai si $u = 0$. Donc, sur $D(0, \delta)$,

$$p_1 + 2p_2 u + \ldots + np_n u^{n-1} = (1 - p_1 u - \ldots - p_n u^n) \sum_{k=0}^{+\infty} s_{k+1} u^k$$

d'où la conclusion par produit de Cauchy.
Ensuite, expression de la trace dans le cas d'un polynôme caractéristique scindé.
Puis :
$q_1 = s_1 = p_1$, $B_1 = A - s_1 I_n = A - p_1 I_n$.
$A_2 = A^2 - p_1 A$, $2q_2 = s_2 - p_1 s_1 = 2p_2$, $B_2 = A^2 - p_1 A - p_2 I_n$, et on continue par récurrence (dans l'hypothèse de récurrence on doit faire figurer : $B_k = A^k - p_1 A^{k-1} - \ldots - p_k I_n$).
La nullité de B_n vient alors du théorème de Cayley-Hamilton.
On calcule alors $AQ(\lambda)$, qui vaut $\sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} A_k$. Mais $A_k = B_k + p_k I_n$, donc

$$AQ(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} B_k + (\sum_{k=1}^{n} p_k \lambda^{n-k}) I_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda^{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^{n-k} B_k$$

en posant $B_0 = I_n$. On trouve $AQ(\lambda) = \lambda Q(\lambda)$ ce qui conclut.

Exercice 42 (Oral Centrale). Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n \geq 1} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{x^n}{n!}$$

puis déterminer un équivalent de sa somme quand x tend vers $+\infty$.

Le rayon de convergence est $+\infty$. Il y a de bonnes raisons d'espérer que, si $f(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{x^n}{n!}$,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)=e\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}$$

ce qui donnera

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e\times(e^x-1) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{x+1}$$

Soit $\epsilon>0$. Il y a un rang, disons N, tel que

$$(n\geq N) \implies \left|e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right|\leq\frac{\epsilon}{2}e$$

(pourquoi ce e au second membre ? pour donner une preuve générique. . .voir plus loin). Découpons alors, pour tout $x\geq 0$,

$$\begin{aligned}|f(x)-g(x)| &\leq \sum_{n=1}^{N-1}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|\frac{x^n}{n!}+\sum_{n=N}^{+\infty}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|\frac{x^n}{n!}\\ &\leq P_N(x)+\frac{\epsilon}{2}e\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{x^n}{n!}\\ &\leq P_N(x)+\frac{\epsilon}{2}g(x)\end{aligned}$$

On note alors que $P_N\ :\ x\longmapsto\displaystyle\sum_{n=1}^{N-1}\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n-e\right|\frac{x^n}{n!}$, qui est une fonction polynôme, est négligeable devant $g(x)$ au voisinage de $+\infty$, ce qui permet de dire qu'il existe A tel que

$$\forall x\geq A\qquad P_N(x)\leq\frac{\epsilon}{2}g(x)$$

En conclusion, on a montré

$$\forall\epsilon>0\quad\exists A\qquad\forall x\geq A\qquad |f(x)-g(x)|\leq\epsilon g(x)$$

Ou encore $f-g=\underset{+\infty}{o}(g)$ qui est ce qu'il fallait prouver.
On pourra essayer de généraliser : si le rayon de convergence de $\sum a_nx^n$ est

$+\infty$, si ls a_n sont strictement positifs, si $b_n \sim a_n$, le rayon de convergence de $\sum b_n x^n$ est $+\infty$, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \underset{x\to+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

.

Exercice 43 (Oral X). Etant donné une suite de carré sommable (a_n), on pose $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n-t}$ où la variable t est réelle.

1. Préciser le domaine de définition de f.
2. Montrer que f est développable en série entière autour de 0.
3. Montrer que si f est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$, la suite (a_n) l'est.

L'inégalité

$$\frac{|a_n|}{|n-t|} \leq \frac{1}{2}\left(|a_n|^2 + \frac{1}{(n-t)^2}\right)$$

montre que le domaine de définition est $\mathbf{R} \setminus \mathbf{N}^*$. Supposons alors $|t| < 1$, on a

$$f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{t^p}{n^p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{a_n t^p}{n^{p+1}}\right)$$

Les calculs à l'envers en remplaçant t et a_n par leurs valeurs absolues montrent la sommabilité de la famille $\left(\frac{a_n t^p}{n^{p+1}}\right)_{(n,p)\in\mathbf{N}_*\times\mathbf{N}}$. Ce qui permet d'intervertir les sommations et d'obtenir la développabilité en série entière. Si la somme est identiquement nulle sur $[-1/2, 1/2]$, par unicité du développement en série entière on a

$$\forall p \in \mathbf{N} \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{p+1}} = 0 \tag{1}$$

Notant $\phi_n : p \longmapsto \frac{a_n}{n^{p+1}}$, définie sur $\mathbf{N}$, $\|\phi_n\|_\infty = \frac{|a_n|}{n}$. On a bien convergence normale, on utilise alors la double limite pour prendre la limite quand $p \to$

$+\infty$, on obtient $a_1 = 0$. On mutliplie alors (1) par 2^{p+1}, on fait tendre p vers $+\infty$, et ainsi, par récurrence, on arrive à la nullité de tous les a_n.

Exercice 44 (**Oral Paris, Lyon, Cachan**)**.** Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

1. Peut-on déduire f de la connaissance de sa restriction au cercle de centre O et de rayon $R > 0$?
2. Peut-on déduire f de la connaissance de la restriction de sa partie réelle au cercle de centre O et de rayon $R > 0$?

Exercice 45 (**Oral Paris, Lyon, Cachan**)**.** Soit I un intervalle non vide et f une fonction complexe définie sur I. On suppose f analytique, i.e. pour tout $a \in I$ il existe $\epsilon > 0$ et une suite complexe (b_n) telle que, pour tout $x \in I \cap]a - \epsilon, a + \epsilon[$ on a $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n (x-a)^n$.

1. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que la suite $\left(|f^{(n)}(a)|^{1/n}\right)$ est bornée. Montrer que f admet un prolongement analytique unique à $\mathbf{R}$ tout entier. On note g ce prolongement.
2. On suppose en outre que la série de terme général $f^{(n)}(a)$ converge. Montrer que pour tout réel x la série de terme général $g^{(n)}(x)$ converge.

Exercice 46 (Oral X)**.** Soit (a_n) une suite décroissante de réels. On pose, si $|z| < 1$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Montrer que, pour $|z| < 1$, on a $f(z) \neq 0$.

Exercice 47. Donner un équivalent en $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$.

Exercice 48. On se propose d'établir la formule suivante, dûe à Ramanujan, et dont la première démonstration était basée sur les fonctions elliptiques :

$$\frac{1}{\pi} = \frac{3}{16} + \frac{9}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\binom{2k-2}{k-1}}{k} \right)^2 \frac{4k^2-1}{2^{4k}(k+1)^2} \ .$$

On admettra les formules de Wallis, démontrées dans un exercice d'intégration :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k} x \ dx \ = \ \frac{\pi}{2} \frac{\binom{2k}{k}}{2^{2k}} \quad \text{et} \quad \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \ .$$

En effectuant un calcul direct de l'intégrale d'une part, en utilisant le développement en série entière de $\sqrt{1+u}$ d'autre part, démontrer l'égalité suivante, pour tout x de l'intervalle $[0,1[$:

$$\int_0^x t\sqrt{1-t^2}dt = \frac{1}{3}\left(1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{x^2}{2} - \sum_{j=2}^{+\infty} \frac{\binom{2j-4}{j-2}}{(j-1)2^{2j-3}} \frac{x^{2j}}{2j} \ .$$

Puis justifier que cette égalité est encore vraie pour $x=1$. On remplace alors x par $\sin u$ dans l'égalité, et on intègre entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Montrer que l'on obtient la formule annoncée.

Des formules dûes à Ramanujan, la suivante est sans doute l'une des plus belles :

$$\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 (396)^{4n}} \right)^{-1}$$