s5 (régularité des suites et séries de fonctions)

I Liste ccp

Analyse 16

On considère la série de fonctions de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,1],\quad u_n(x) = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\ .$$

On pose, lorsque la série converge, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - \frac{x}{n}\right]$.

1. Démontrer que S est dérivable sur $[0,1]$.
2. Calculez $S'(1)$.

Analyse 18 On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$.

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

1. Étudier la convergence simple de cette série.

   On note D l'ensemble des x où cette série converge et $S(x)$ la somme de cette série pour $x \in D$.

2. (a) Étudier la convergence normale, puis la convergence uniforme de cette série sur D.

   (b) La fonction S est-elle continue sur D ?

II Autres exercices

Exercice 1 (Suite de ccp Analyse 18).

Montrer que S est dérivable sur $\mathring{D}$. Calculer S', en déduire S, puis calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 2. On considère une « suite » $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels telle que la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ soit absolument convergente.

1. Montrer que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sin(nx)$$

   définit une fonction continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles.

2. Trouver, pour tout entier p, une relation entre $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(pt)f(t)\mathrm{d}t$ et les coefficients a_k.

Exercice 3. On considère une « suite » $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de nombres complexes telle que les deux séries $\sum_{n\geq 0}|c_n|$ et $\sum_{n\geq 0}|c_{-n}|$ soient convergentes *(on dira plus tard que la famille $(c_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ est sommable)*.

1. Montrer que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}\right)$$

   définit une fonction continue sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$.

2. Trouver, pour tout entier p, une relation entre $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{-ipt}f(t)\mathrm{d}t$ et les coefficients c_k.

Exercice 4. Trouver deux suites de réels a et b telles que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

Exercice 5. En utilisant l'exercice précédent, trouver $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 6.

1. Déterminer le domaine de définition D de

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{e^{-nx}}{n}$$

2. Montrer que S est continue sur D et de classe C^1 sur $\mathring{D}$. Calculer S'.
3. Déterminer $\lim\limits_{+\infty} S$.
4. Calculer S, puis calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

Exercice 7. Soit $k \geq 3$. Trouver j tel que l'on puisse dire que la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^k}$$

est au moins de classe C^j sur $\mathbf{R}$.

Exercice 8. Pour tout réel x qui n'est pas un entier négatif, on pose
$\displaystyle f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)}$ et $\displaystyle g(x) = e\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+n)}$.

1. Justifier l'existence de $f(x)$ et $g(x)$.
2. Déterminer leurs limites en $+\infty$.
3. Trouver une relation liant $f(x+1)$ et $f(x)$; montrer que g vérifie cette même relation.
4. Montrer que $f = g$.
5. Montrer que f est de classe C^∞.

---

1. Pour la définition de $f(x)$, le critère de D'Alembert marche bien (ne pas oublier de prendre les valeurs absolues pour appliquer ce critère à une série à termes réels positifs).
2. Double limite, en montrant par exemple la convergence uniforme car normale sur $[1, +\infty[$ pour chacune des séries. La limite vaut 0 dans les deux cas.
3. On calcule

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)\dots(x+n)} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\dots(x+n)} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\dots(x+1+m)} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x} f(x+1) \end{aligned}$$

Mais aussi (nettement plus astucieusement) :

$$\begin{aligned} g(x+1) &= e\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(x+1+n)} \\ &= e\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!(x+n)} \\ &= e\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n!(x+n)} \\ &= ex\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}\right] \\ &= -1 + xg(x) \end{aligned}$$

4. Si h est une fonction vérifiant la même relation fonctionnelle que f et g, on aura, pour tout $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}^-$,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x} h(x+1) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x(x+1)} h(x+2) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x(x+1)} + \dots + \frac{1}{x(x+1)\dots(x+k)} + \frac{1}{x(x+1)\dots(x+k)} h(x+k+1) \end{aligned}$$

pour tout $k \in \mathbf{N}_*$ (par récurrence, avec l'équation fonctionnelle). Si l'on suppose de plus que h a pour limite 0 en $+\infty$, on conclut que $h = f$.

5. On montre donc plutôt que g est de classe C^∞, en utilisant les théorèmes habituels, avec convergence uniforme sur tout segment.

Exercice 9. Etudier, à l'aide de l'exercice sur la transformation d'Abel (voir exercices sur les séries), la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions

$$\begin{array}{rccc} h_n : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & \theta & \longmapsto & \dfrac{e^{in\theta}}{\sqrt{n}} \end{array}$$

sur $]0, 2\pi[$. Rappel : pour écrire une transformation d'Abel, on pose, pour tout p,

$$S_p(\theta) = \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$$

et on écrit $e^{in\theta} = S_n(\theta) - S_{n-1}(\theta)$.

Exercice 10 (fonction ζ).
On pose

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Pour quelles valeurs de x peut-on définir $\zeta(x)$?
2. Sur quel type d'intervalles cette série de fonctions converge-t-elle normalement ?
3. Démontrer que la fonction ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$, et exprimer ses dérivées successives comme sommes de séries de fonctions.
4. Quel est le sens de variation de ζ ?
5. Quelle est la limite de ζ en $+\infty$?
6. Quelle est la limite de ζ en 1 ? Déterminer un équivalent de $\zeta(x)$ au voisinage à droite de 1 en utilisant une comparaison à une intégrale.
7. On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la fonction

$$f_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n^x}$$

Sur quel intervalle a-t-on convergence simple de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$? Etudier la nature de la convergence (uniforme, normale...).

8. Démontrer que la fonction ϕ définie sur $]0, +\infty[$ par

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^x}$$

est de classe C^∞. *Question classique, pas facile, importante.*

9. Démontrer que, si $x > 1$,

$$\phi(x) = (2^{1-x} - 1)\zeta(x)$$

Vérifier que cette relation permet de prolonger ζ à l'intervalle $]0, 1[$; retrouver l'équivalent de $\zeta(x)$ au voisinage à droite de 1.

10. Démontrer que l' on peut définir, pour tout nombre complexe z de partie réelle strictement supérieure à 1,

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z}$$

(si t est un nombre réel strictement positif et z un nombre complexe, on définit $t^z = \exp(z \ln t)$). Démontrer qu'il y a convergence normale sur tout compact inclus dans le demi-plan $\{z \ / \ \Re(z) > 1\}$ de cette série de fonctions.

Exercice 11 (Résolution d'une équation fonctionnelle). On considère une fonction ϕ continue sur un segment $[-a, a]$, à valeurs réelles, telle qu'il existe une constante C vérifiant, pour tout x de $[-a, a]$,

$$|\phi(x)| \leq C|x|$$

Démontrer qu'il existe une fonction f continue sur $[-a, a]$ telle que, pour tout x dans ce segment :

$$f(x) - f(\frac{x}{2}) = \phi(x)$$

Y-a-t-il unicité de f ?Si ϕ est de classe C^1, en est-il de même de f ?

On a nécessairement :

$$f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right) + \cdots + f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \sum_{k=0}^{n} \phi\left(\frac{x}{2^k}\right)$$

(récurrence sur n). D'où, par continuité de f en 0, nécessairement

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} \phi\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

d'où la pseudo-unicité de f (elle est unique à une constante additive près, on pouvait d'ailleurs voir dès le début que si f convenait alors $f + cte$ convenait aussi).
Reste à montrer la convergence de la série écrite (facile avec la majoration de ϕ), et la classe C^1 grâce au théorème avec convergence uniforme car normale sur tout segment.