T7 : Espaces vectoriels normés de dimension finie

Il n'y a à peu près rien de nouveau dans ce chapitre, qui est un résumé des résultats propres à la dimension finie vus dans les Tk précédents. On notera que $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est un bon exemple d'espace vectoriel normé de dimension finie.

I Equivalence des normes

Théorème Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Toutes les normes sur E sont équivalentes.

Corollaire Les notions de voisinage, d'ouvert, de fermé, d'adhérence, d'intérieur, de partie bornée, de suite convergente, de valeur d'adhérence d'une suite...ne dépendent pas de la norme choisie sur l'espace vectoriel de dimension finie E. En revanche, les boules et les sphères ne sont pas identiques pour deux normes équivalentes !

Exemples usuels Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de l'espace vectoriel de dimension finie E. Si $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on peut définir

$\|x\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$,

$\|x\|_2=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^{1/2}$,

$\|x\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|x_i|$,

on définit ainsi trois normes sur E.

Mais sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, par exemple, on préfère souvent travailler avec une norme subordonnée plutôt qu'avec une de ces trois normes.

II Limites, continuité

II.1 Limite d'une suite

Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de l'espace vectoriel de dimension finie E. Soit $(u_p)_{p\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E. On peut, pour tout entier naturel p, décomposer u_p dans la base $(e_1,\dots,e_n)$:

$$\forall p\in\mathbf{N}\qquad u_p=\sum_{i=1}^{n}u_p^{(i)}e_i$$

et on définit ainsi n suites $(u_p^{(i)})_{p\in\mathbf{N}}$ $(1\leq i\leq n)$ d'éléments de $\mathbf{K}$.

Soit $\ell=\sum_{i=1}^{n}\ell_i e_i$ un élément de E. Alors

$$\left(\lim_{p\to+\infty}u_p=\ell\right)\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\forall i\in\{1,\dots,n\}\qquad\lim_{p\to+\infty}u_p^{(i)}=\ell_i\right).$$

Autrement dit, une suite converge si et seulement si les suites de ses composantes convergent toutes. Et pour une suite convergente, les composantes de la limite sont les limites des composantes...

Ce résultat s'utilise assez naturellement, on en a déjà l'habitude quand on sait qu'une suite de nombres complexes converge si et seulement si les suites des parties réelles et imaginaires convergent, et le cas échéant la partie réelle et la partie imaginaire de la limite sont les limites des parties réelles et imaginaires...

II.2 Limite d'une fonction

Soit $f\ :\ A\subset F\longrightarrow E$ une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé F à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie E. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de l'espace vectoriel de dimension finie E. On peut, pour tout élément x de A, décomposer $f(x)$ dans la base $(e_1,\dots,e_n)$:

$$\forall x\in A\qquad f(x)=\sum_{i=1}^{n}f_i(x)e_i$$

et on définit ainsi n applications de A dans $\mathbf{K}$ (qui sont les « applications composantes » de f dans la base $(e_1,\dots,e_n)$). Soit a un élément de E adhérent à A. Soit $\ell=\sum_{i=1}^{n}\ell_i e_i$ un élément de E. Alors

$$\left(\lim_{x\to a}f(x)=\ell\right)\quad\Longleftrightarrow\quad\left(\forall i\in\{1,\dots,n\}\qquad\lim_{x\to a}f_i(x)=\ell_i\right).$$

II.3 Continuité d'une fonction

Sous les hypothèses précédentes, soit a un point de A. f est continue en a si et seulement si chaque f_i l'est. f est continue sur A si et seulement si chaque f_i l'est.

III Compacité

Deux énoncés équivalents :

Théorème Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.

Théorème (Bolzano-Weierstrass) Dans un espace de dimension finie, toute suite bornée a une valeur d'adhérence. De toute suite bornée dans un espace de dimension finie on peut extraire une suite convergente.

IV Deux résultats utiles

Proposition Tout sous-espace de dimension finie d'un evn quelconque est fermé.

Proposition Une suite bornée dans un espace de dimension finie converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Exercice : Définir une suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence et, néanmoins, non convergente (on sera donc nécessairement dans un espace qui n'est pas de dimension finie).

V Continuités

Théorème Toute application linéaire définie sur un espace vectoriel de dimension finie est continue; autrement dit, si E est de dimension finie, $\mathscr{L}_c(E,F) = \mathscr{L}(E,F)$ (sans hypothèse sur F).

En particulier, toute application π_i qui à un élément $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ associe sa i-ème composante x_i dans une certaine base est continue, ainsi donc que toute application obtenue par opérations à partir de telles applications. Donc

Théorème On considère deux espaces vectoriels normés E et F de dimension finie. Soit $(e_1,\dots,e_n)$ une base de E, $(f_1,\dots,f_p)$ une base de F. Soit $\phi\,:\,E\longrightarrow F$. On écrit, pour tout $x\in E$,

$$\phi(x)=\sum_{i=1}^{p}\phi_i(x)f_i$$

et on suppose que, pour chaque $i\in[\![1,p]\!]$, $\phi_i(x)$ est fonction polynomiale des composantes de x dans la base $(e_1,\dots,e_n)$. Alors ϕ est continue.

Un exemple L'application déterminant est continue.

Théorème Toute application multilinéaire définie sur un produit $E_1\times\ldots\times E_n$ d'espaces vectoriels de dimension finie est continue.

Table des matières