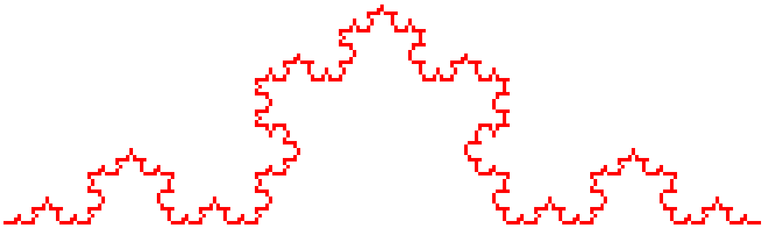
# T6 : Compacité dans les espaces vectoriels normés



*Le fractal de Von Koch est le point fixe d'une transformation définie sur l'ensemble des compacts du plan muni de la distance de Hausdorff*

# I Suites extraites ; valeurs d'adhérence d'une suite

## I.1 Définition d'une suite extraite

### a. Définition (suite extraite, extractrice)

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites d'éléments d'un ensemble $X$. On dit que $v$ est extraite de $u$ lorsqu'il existe une application strictement croissante $\phi$ de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad v_n = u_{\phi(n)}$$

On appellera « extractrice » une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{N}$ ; ce terme est assez usuel mais non officiel.

### b. Il est (parfois) utile de renommer les suites extraites

On dit souvent « Soit $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ une suite extraite de la suite $(u_n)$ ». Mais il faut parfois extraire d'une suite extraite.

**Question :** Une suite extraite de $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, est-ce une suite $(u_{\phi(\psi(n))})_{n\in\mathbf{N}}$ ou une suite $(u_{\psi(\phi(n))})_{n\in\mathbf{N}}$ ($\psi$ désignant bien sûr une nouvelle extractrice) ?

## I.2 Valeurs d'adhérence d'une suite

### a. Définition

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $E$, $\ell \in E$. On dit que $\ell$ est une valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$ lorsqu'il existe une suite extraite $(u_{\phi(n)})$ qui converge vers $\ell$.

### b. Remarque terminologique

On a déjà rencontré le terme « adhérence » pour l'adhérence d'une partie. Essayer de faire le lien entre les termes « adhérence » et « valeur d'adhérence » n'est pas forcément utile. Si on tient à faire un rapprochement, on se convaincra que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est

$$\bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{\{u_k \; ; \; k \geq n\}}$$

mais c'est hors-programme, et cela ne sert à rien.

### c. Caractérisation

**Proposition** Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $(E, \|.\|)$, soit $\ell \in E$. On notera comme d'habitude $B(x, r)$ la boule ouverte de centre $x$ et de rayon $r$.

$\ell$ est valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ si et seulement si l'une des trois conditions équivalentes suivantes est vérifiée :

**(i)** Pour tout $\epsilon > 0$, $\{n \in \mathbf{N} \ / \ u_n \in B(\ell, \epsilon)\}$ est infini.

**(ii)** Pour tout $\epsilon > 0$, $\{n \in \mathbf{N} \ / \ u_n \in B(\ell, \epsilon)\}$ est non majoré.

**(iii)** Pour tout $\epsilon > 0$, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $\{n \geq p \ / \ u_n \in B(\ell, \epsilon)\}$ est non vide.

**Démonstration** *importante...*

Une utilisation classique de ce résultat est :
**Exercice** Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence d'une suite est fermé.

### d. Cas d'une suite convergente

**Proposition** Une suite convergente a une unique valeur d'adhérence : sa limite.

**Remarque** La réciproque est fausse : une suite ayant une unique valeur d'adhérence n'est pas nécessairement convergente. Mais cette réciproque devient vraie si on rajoute certaines conditions, comme, par exemple, la suite est une suite bornée dans un espace de dimension finie.

### e. Autres cas

Une suite peut n'avoir aucune valeur d'adhérence, en avoir un nombre infini, en avoir une infinité...et même une infinité non dénombrable!
**Exercice :** Soit $(u_n)$ une suite de réels vérifiant

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(u_n)$ est un intervalle.
En déduire l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\right)\right)_{n\geq 0}$.

### f. Limite supérieure, limite inférieure

On suppose ici que $(u_n)$ est une suite réelle bornée. On pose, si $p \in \mathbf{N}$,

$$v_p = \sup\left(\{u_n\ ;\ n \geq p\}\right)$$

1. Montrer que la suite $(v_p)$ est bien définie.
2. Montrer que la suite $(v_p)$ converge.
3. Montrer que $\lim(v_p)$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$.
4. Définir une suite $(w_p)$ qui converge vers la plus petite valeur d'adhérence de la suite $(u_n)$.

# II Parties compactes d'un espace vectoriel normé

## II.1 Définition

(dite parfois « de Bolzano-Weierstrass »)

**Définition** Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Soit $X$ une partie de $E$. On dira que $X$ est compacte (ou est un compact) lorsque toute suite d'éléments de $X$ a une valeur d'adhérence dans $X$.

**Reformulation** On dit que $X$ est compact lorsque de toute suite d'éléments de $X$ on peut extraire une suite qui converge dans $X$.

**Remarque importante** $\emptyset$ est compact. Attention : lorsqu'on demande de montrer qu'une partie est compacte non vide, il se peut que le plus difficile soit de montrer qu'elle est non vide, voir par exemple la propriété des « compacts emboîtés ».

## II.2 Tout compact est fermé et borné

**Proposition**

Toute partie compacte est fermée.
Toute partie compacte est bornée.

*Démonstrations intéressantes.*

On va voir qu'en dimension finie, la réciproque est vraie : une partie est compacte si et seulement si elle est fermée et bornée. Mais il va falloir un certain nombre d'étapes pour y parvenir.
En revanche, une partie fermée et bornée d'un espace de dimension infinie n'est pas nécessairement compacte.
**Exercice :** On munit $\mathbf{K}[X]$ de la norme

$$\|P\| = \sup_{k\in\mathbf{N}}(|p_k|)$$

(on note comme d'habitude $P = \sum_{k=0}^{\infty} p_k X^k$, la somme étant finie). Trouver une suite d'éléments de $S(0,1)$ qui n'admette aucune valeur d'adhérence.

## II.3 Parties fermées d'un compact

**Proposition** Soit $X$ une partie compacte d'un evn, $A$ une partie de $X$ ($A \subset X$). Alors

$$(A \text{ fermée}) \iff (A \text{ compacte})$$

**Autre formulation** Les parties fermées d'un compact sont les parties compactes de ce compact.

**Remarque :** Au cas où on se poserait la question de savoir si l'hypothèse est « $A$ partie fermée **de** ou **dans** $X$ » (i.e. $A$ fermé relatif) ou « $A$ partie de $X$ fermée dans l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ », cela revient au même (car $X$ est fermé). Il n'y a pas de problèmes de topologie induite dans le chapitre sur la compacité !

## II.4 Produit d'une famille finie de compacts

**Proposition** Si $(E_1, \|.\|_1), \ldots, (E_p, \|.\|_p)$ ($p \geq 1$) sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, si, pour chaque $i \in \{1, \ldots, p\}$, $X_i$ est un compact de $E_i$, alors

$$\mathscr{X} = X_1 \times \cdots \times X_p$$

est un compact de l'evn produit $E = E_1 \times \cdots \times E_p$ (muni la « norme produit » vue dans le chapitre sur les evn).

**Reformulation** Un produit (fini) de compacts est compact.

**Démonstration :** par extractions successives.

**Remarque :** Il est bon de connaître la démonstration, mais le résultat est fait pour être utilisé : si on a envie de faire des extractions successives pour résoudre une question, on peut se poser la question de savoir si on n'aurait pas pu utiliser la compacité d'un produit de compacts pour s'épargner cette peine.

# III Compacts et continuité

## III.1 Image d'un compact par une application continue

**Proposition** L'image d'un compact par une application continue est compacte.

**Plus précisément** Si $f : X \subset E \longrightarrow F$ est continue, où $E$ et $F$ sont deux espaces vectoriels normés et $X$ est compact, alors $f(X)$ est compact.

**Plus particulièrement** Si $X$ est une partie compacte d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|_E)$, si $f : X \subset E \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue, alors $f$ est bornée et atteint ses bornes sur $X$ : $f$ atteint un minimum sur $X$ et un maximum sur $X$. *Le programme suggère d'appeler ce résultat « théorème des bornes atteintes ». Bonne idée pour ce dernier énoncé.*

**Utilisation** Ce sera l'un des résultats les plus utilisés en topologie dans le cadre de ce programme. Lorsqu'on demande de montrer que $f$ atteint un maximum ou un minimum sur $X$, on pense à regarder si $f$ est continue et $X$ compact. Ce résultat n'est pas complètement nouveau, on l'a déjà vu pour les segments, qui sont les intervalles compacts.

**Remarque** Attention à ne pas confondre le fait que l'image d'un compact par une application continue est compacte avec le fait que l'image **réciproque** d'un ouvert (respectivement d'un fermé) par une application continue est un ouvert (respectivement un fermé).

**Démonstration** Elle a déjà été demandée à l'écrit des ccp, et n'est ni difficile ni inintéressante.

## III.2 Théorème de Heine (continuité uniforme)

**Théorème** Une fonction continue sur un compact est uniformément continue sur ce compact.

**Démonstration** *Typique…*

# IV Evn de dimension finie

## IV.1 Exemples : compacts de R ou de C

**Théorème de Bolzano-Weierstrass** De toute suite bornée de réels ou de complexes on peut extraire une suite convergente.

**Reformulation** Toute suite bornée de réels ou de complexes admet au moins une valeur d'adhérence.

**Corollaire, résultat provisoire** Les compacts de **R** sont les parties fermées et bornées de **R**. Les compacts de **C** sont les parties fermées et bornées de **C**.

*Ce résultat se généralise aux espaces vectoriels de dimension finie, et donc sera un cas particulier d'un théorème plus général.*

**Segments** Les segments de **R** sont les intervalles compacts de **R**. Mais il y a beaucoup de compacts qui ne sont pas des intervalles. Par exemple, un ensemble fini est toujours compact, dans n'importe quel espace vectoriel normé. Remarquons enfin que tout compact $K$ de **R** est fermé et borné, donc inclus dans $\left[\inf(K), \sup(K)\right] = [\min(K), \max(K)]$. Ce qui explique que sur **R**, ou même sur un intervalle de **R**, « sur tout compact » et « sur tout segment » ont exactement le même sens.

## IV.2 Equivalence des normes en dimension finie

**Proposition** Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

**Démonstration** *Le résultat est à connaître parfaitement, la démonstration est intéressante. . .mais pas en vue des concours, on peut donc passer. Ou regarder l'annexe qui contient cette démonstration.*

## IV.3 Compacts d'un espace de dimension finie

**Proposition** Dans un evn de dimension finie, les parties compactes sont les parties fermées et bornées.

**Reformulation** Dans un evn de dimension finie, toute suite bornée admet au moins une valeur d'adhérence.

**Reformulation** De toute suite bornée d'élements d'un evn de dimension finie on peut extraire une suite convergente.

**Démonstration** *Pour une fois, pas si importante. Peut être laissée de côté.*

On commence par un lemme :

**Lemme** Pour $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ et $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, les compacts de $(\mathbf{K}^n, \|.\|_\infty)$ sont les parties fermées et bornées de $(\mathbf{K}^n, \|.\|_\infty)$.

**Démonstration du lemme :** Soit $A$ une partie fermée et bornée de $(\mathbf{K}^n, \|.\|_\infty)$. Comme $A$ est bornée, il existe $M > 0$ tel que

$$A \subset [-M, M]^n$$

Mais $[-M, M]^n$, en tant que produit de compacts (tout segment est compact), est compact (on a choisi $\|.\|_\infty$ pour que ce soit bien la norme d'espace vectoriel normé produit sur $\mathbf{K}^n = \mathbf{K} \times \cdots \times \mathbf{K}$). La partie $A$, fermée dans un compact, est donc compacte.

La réciproque (toute partie compacte est fermée et bornée) est toujours vraie.

**Démonstration du théorème** Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension finie, $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. On munit $E$ de la norme $N_\infty$ définie par

$$N_\infty\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \max(|x_i|)$$

L'application

$$f \ : \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

est un isomorphisme de $\mathbf{K}^n$ sur $E$, et

$$N_\infty\big(f(x)\big) = \|x\|_\infty$$

d'où l'on déduit rapidement que $f$ et $f^{-1}$ sont 1-lipschitziennes (et même mieux, $f$ et $f^{-1}$ conservent la norme), si on choisit de munir $\mathbf{K}^n$ de $\|.\|_\infty$. On peut alors dire, pour une partie $A$ de $E$, que $A$ est bornée (resp. fermée, resp. compacte) si et seulement si $f^{-1}(A)$ l'est, ce qui permet de « transférer » le résultat vu sur $\mathbf{K}^n$ en un résultat sur $E$.

**Un corollaire important** Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé, $F$ un sous-espace de $E$. On suppose $\dim(F) < +\infty$. Alors $F$ est fermé.

**Exercice** Donner un exemple d'espace vecvtoriel normé $(E, \|.\|)$ et de sous-espace vectoriel $F$ de $E$ tel que $F$ ne soit pas fermé.

**Exercice (un résultat très, très classique)**

Montrer que $\mathcal{O}(n)$ est compact. On rappelle :

$$\mathcal{O}(n) = \left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ ; \ M^T \ M \ = \ I_n\right\}$$

**Remarque** En général, (compact)⇒(fermé et borné). La réciproque n'est vraie qu'en dimension finie.
Par exemple, on a vu plus haut que si on munit $\mathbf{K}[X]$ de la norme $\|.\|_\infty$, la boule unité fermée n'est pas compacte.
**Exercice (Mines)** On munit $C([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. Montrer que sa boule unité fermée n'est pas compacte.

# V Suite convergente dans un compact

**Proposition :** Soit $X$ un compact. Une suite d'éléments de $X$ est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

**Remarque :** Si on enlève la condition de compacité, il est facile de trouver une suite divergente ayant une unique valeur d'adhérence.

**Corollaire :** Soit $(u_n)$ une suite bornée d'éléments d'un evn de dimension finie $E$. La suite $(u_n)$ est convergente si et seulement si elle a une unique valeur d'adhérence.

**Exercice (Oral Mines)** On munit l'espace vectoriel des suites bornées de complexes de la norme

$$\|u\| = \sup_n |u_n|$$

Montrer que le sous-espace des suites convergentes est fermé.
*Le réflexe d'utiliser la caractérisation par les suites est en général un bon réflexe, mais ici cela amène des suites de suites, objets toujours délicats à manier. On préfère procéder autrement. . ..*

# VI Catalogue

La compacité est très utilisée, et elle a l'avantage de mettre en œuvre des techniques en nombre assez limité. On peut donc, avec quelques exercices, avoir assez rapidement une maîtrise correcte des raisonnements qui la mettent en jeu.

## VI.1 Montrer qu'une partie est compacte

Si on est en dimension finie, on montre souvent qu'elle est fermée et bornée.

**Exercice** Soit $(u_n)$ une suite convergente dans un espace vectoriel normé de dimension finie $(E, \|.\|)$, $\ell$ sa limite. Montrer que $\{u_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$ est compact.

Presque aussi souvent, en dimension finie ou non, on montre qu'elle est l'image d'une partie compacte par une application continue.

**Exercice (écrit Mines)**
Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\{AQ \ ; \ Q \in \mathscr{O}(n)\}$ et $\{Q^{-1}AQ \ ; \ Q \in \mathscr{O}(n)\}$ sont deux compacts.

On pense aussi à deux résultats : un produit de compacts est compact (par exemple, $\mathscr{O}(n) \times \mathscr{O}(n)$ est compact), et une partie fermée d'un compact est compacte.
Si rien de tout cela ne marche, on revient à la définition (de toute suite on peut extraire une suite qui converge dans la partie).

## VI.2 Démonstration par l'absurde

Il est très fréquent, dans un compact, d'utiliser le schéma suivant :
On veut montrer une propriété, on suppose qu'elle est fausse, à partir de cette hypothèse on construit une suite, de cette suite on extrait une suite convergente, puis on essaie d'aboutir à une contradiction.

On a déjà vu le mécanisme dans la preuve du théorème de Heine. Une des illustrations les plus classiques est la suivante :

**Exercice :** Montrer que, si $X$ est compact, pour tout $\epsilon > 0$ on peut « recouvrir » $K$ par des boules ouvertes de rayon $\epsilon$, i.e. il existe une famille finie $(x_1, \ldots, x_m)$ d'éléments de $X$ telle que

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \epsilon)$$

Cette question a été posée à plusieurs écrits des Mines assez récents. Elle gagne à être connue si on veut arriver à faire sans indication l'exercice suivant (oral X) :

**Exercice (X)** Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$. Pour tout $x \in [a, b]$ on se donne $\epsilon_x > 0$ et on note $I_x = ]x - \epsilon_x, x + \epsilon_x[$. Montrer que $[a, b]$ est recouvert par un nombre fini de $I_x$ (i.e. qu'il existe $x_1, \ldots, x_p$ tels que

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{p} x_i$$

Parfois le théorème sur l'image continue d'un compact permet d'éviter ce schéma. On le voit par exemple en résolvant l'exercice suivant de deux manières différentes.

**Exercice :** Soit $X$ un compact, $\mathscr{U}$ un ouvert tel que $X \subset \mathscr{U}$. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que

$$\forall x \in X \qquad B(x, r) \subset \mathscr{U}$$

## VI.3 La compacité sans compacité

Il arrive qu'on doive montrer un résultat qui fait penser à un résultat de compacité (par exemple : montrer que $f$ atteint un minimum sur $A$), mais sans l'hypothèse de compacité (par exemple, ici : $f$ est continue, mais $A$ n'est pas compacte). Si on est en dimension finie, il faut avoir l'idée de se ramener à un compact de la manière suivante : on montre que ce n'est pas la peine (pour une raison provenant d'autres hypothèses) de s'occuper des points de $A$ qui sont « loin ». On réduit alors le problème à l'intersection de $A$ avec une boule fermée. Si $A$ est fermé et si on est en dimension finie, cette intersection est compacte.

**Exercice** Soit $f : E \longrightarrow \mathbf{R}$ continue, où $E$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie. On suppose

$$\lim_{\|x\|_E \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Montrer que $f$ atteint sur $E$ un minimum absolu (i.e. global).

**Exercice** On munit $E = C([0,1], \mathbf{R})$ de la norme $\|.\|_\infty$. Si $n \in \mathbf{N}$, on note $F_n$ le sous-espace de $E$ formé des fonctions polynomiales de degré $\leq n$. Si $f \in E$ et $n \in \mathbf{N}$, montrer qu'il existe une fonction polynomiale $\phi_n$ telle que

$$\|f - \phi_n\|_\infty = \inf\big(\{\|f - \phi\| \ ; \ \phi \in E_n\}\big)$$

**Exercice :** Soit $f : E \longrightarrow F$ continue, où $E$ et $F$ sont deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés. On suppose que $E$ est de dimension finie, et que

$$\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0_F$$

Montrer qu'alors $f$ est uniformément continue sur $E$.

# VII Annexe : équivalence des normes en dimension finie

**Proposition** Sur un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

**Démonstration** Soit $E$ un espace de dimension finie, $(e_1,\dots,e_n)$ une base de $E$. Pour tout $x=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$, on définit

$$N_\infty(x) = \max_{1\le i\le n} |x_i|$$

Il est assez clair que $N_\infty$ est une norme sur $E$.

Soit maintenant $N$ une norme quelconque sur $E$ ; définissons sur $\mathbf{K}^n$ l'application

$$\phi\ :\ (x_1,\dots,x_n) \longmapsto N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)$$

(qui est à valeurs réelles). Montrons que, lorsqu'on munit $\mathbf{K}^n$ de la norme $\|.\|_\infty$, et bien entendu $\mathbf{R}$ de la norme $|.|$, cette application $\phi$ est continue. Il suffit d'écrire :

$$|\phi\big((y_1,\dots,y_n)\big)-\phi\big((x_1,\dots,x_n)\big)| = |N(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i) - N(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i)|$$

Mais $N$ est une norme ; elle vérifie donc l'inégalité triangulaire (ici sous la forme $|N(a)-N(b)| \le N(b-a)$), ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}|\phi\big((y_1,\dots,y_n)\big)-\phi\big((x_1,\dots,x_n)\big)| &\le N\big(\sum_{i=1}^{n} y_i e_i - \sum_{i=1}^{n} x_i e_i\big)\\ &= N\big(\sum_{i=1}^{n} (y_i-x_i)e_i\big)\\ &\le \sum_{i=1}^{n} |y_i-x_i| N(e_i)\end{aligned}$$

(on utilise deux fois l'inégalité triangulaire). Notons alors $K=\sum_{i=1}^{n} N(e_i)$. On obtient

$$|\phi\big((y_1,\dots,y_n)\big)-\phi\big((x_1,\dots,x_n)\big)| \le K\|y-x\|_\infty$$

et donc $\phi$, lipschitzienne, est continue. Sur la sphère unité de $(\mathbf{K}^n, \|.\|_\infty)$, $\phi$ est bornée et atteint un maximum, $\beta$, et un minimum, $\alpha$. [En effet, cette sphère unité est un produit de segments si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, un produit de disques fermés si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, et un produit de compacts est compact]. Remarquons que, sur $\mathbf{K}^n \setminus \{0\}$, $\phi$ ne prend que des valeurs strictement positives, donc $\alpha > 0$.
Mais, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$,

$$N_\infty(x) = \|(x_1, \dots, x_n)\|_\infty$$

Donc

$$N_\infty(x) = 1 \Rightarrow \alpha \leq N(x) \leq \beta$$

Si $x \neq 0_E$, on peut appliquer la double inégalité précedente à $\frac{1}{N_\infty(x)}x$, on aboutit à

$$\alpha \leq N\Big(\frac{1}{N_\infty(x)}x\Big) \leq \beta$$

et donc, par homogénéité de $N$, à

$$\alpha N_\infty(x) \leq N(x) \leq \beta N_\infty(x)$$

encore vraie pour $x = 0_E$. Toute norme sur $E$ est donc équivalente à $N_\infty$, ce qui achève la démonstration.

# Table des matières