T5 : Linéarité et continuité

I Continuité des applications linéaires

I.1 Caractérisation

Proposition Si E, F sont deux **K**-espaces vectoriels normés, si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors les trois propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue
2. f est lipschitzienne
3. Il existe $k \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$$

Remarque Le résultat important, c'est 1 $\Leftrightarrow$ 3. La propriété 2 est simplement un intermédiaire.

Remarque On peut aussi donner d'autres phrases équivalentes aux trois précédentes : f est continue en 0_E, f est uniformément continue sur E, f est bornée sur $B'(0_E,1)$...

Remarque Si on ne suppose pas f linéaire, 2. implique 1. et 3., c'est tout.

Remarque (très) utile La caractérisation énoncée est une question assez fréquemment rencontrée à l'écrit : on rencontre par exemple, dans un problème, une application linéaire

$$u \,:\, E \longrightarrow F$$

(où E, F sont des **K**-espaces vectoriels normés) et on demande de montrer que u est continue.

On doit alors penser que la « vraie » question est :
montrer qu'il existe k tel que

$$\forall x \in E \qquad \|T(x)\|_F \leq k\|x\|_E$$

…A moins que E ne soit de dimension finie, auquel cas il n'y a rien à faire :

I.2 En dimension finie

Théorème Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F (où F est un evn quelconque) est continue.
Probablement le résultat le plus utilisé pendant l'année de Spé ! bien remarquer que c'est E qui est de dimension finie, pas F.

Théorème (le même) Toute application linéaire définie sur un espace vectoriel normé de dimension finie est continue.

Corollaire Soit $(e_1,\ldots,e_n)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Les applications composantes :

$$\begin{array}{cccc} \pi_i : & E & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ & x = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto & x_i \end{array}$$

sont continues. Et donc toute application fabriquée à partir des π_i par combinaison linéaire, produit, quotient (si le dénominateur ne s'annule pas), composition par des applications continues…

Exercice Montrer que l'ensemble des matrices symétriques est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice Montrer que l'ensemble des matrices de trace nulle est un fermé de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

I.3 En pratique

Si on veut montrer la continuité d'une application linéaire, deux méthodes :

Méthode 1 Si E est de dimension finie, c'est…fini. « u est linéaire sur E qui est de dimension finie, donc u est continue » est peut-être ce qu'on dit le plus souvent en Analyse.

Méthode 2 Sinon, on cherche à trouver k tel que

$$\forall x \in E \quad \|u(x)\|_F \leq k\|x\|_E$$

bref, on revient à la caractérisation établie plus haut.

Méthode 3 Et si on veut montrer que u n'est pas continue ? on cherche à montrer le contraire, c'est-à-dire à montrer :

$$\forall k \geq 0 \quad \exists x \in E \quad \|u(x)\|_F > k\|x\|_E$$

ce qui équivaut à

$$\forall n \in \mathbf{N}_* \quad \exists x \in E \quad \|u(x)\|_F > n\|x\|_E$$

On peut donc voir le principe : trouver une suite (x_n) telle que, à condition d'avoir n assez grand, $\|u(x_n)\|_F$ soit aussi grand que l'on veut devant $\|x_n\|_E$.

Exercice Dire si l'application $f \longmapsto f(0)$ est continue sur l'espace $C([0,1],\mathbf{K})$ quand on munit celui-ci de la norme $\|.\|_\infty$, puis de la norme $\|.\|_1$.

Exercice (Oral Mines) Donner un exemple de forme linéaire non continue.

Exercice (Oral Centrale) Soit $a > 0$ et E l'espace des fonctions continues et intégrables de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}$. On munit E de la norme définie par

$$\forall f \in E \qquad \|f\|_1 = \int_0^{+\infty} |f|$$

Pour $f \in E$, on pose $\phi(f)\ :\ x \in \mathbf{R}^+ \mapsto e^{-ax}\displaystyle\int_0^x e^{at} f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que ϕ est un endomorphisme continu de E

I.4 $\mathscr{L}_c(E,F)$

Définition On note $\mathscr{L}_c(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F.

Proposition $\mathscr{L}_c(E,F)$ est un espace vectoriel.

I.5 Normes subordonnées (ou normes d'opérateurs)

Définition - proposition On considère deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$. Si $f\in\mathscr{L}_c(E,F)$, on pose

$$N(f)=\sup\left(\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x\in E\setminus\{0_E\}\right\}\right)=\sup_{x\neq 0_E}\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

N définit une norme sur $\mathscr{L}_c(E,F)$, parfois dite « subordonnée » aux deux normes fixées sur E et F.

Remarque Si $f\in\mathscr{L}_c(E,F)$

$$N(f)=\sup_{\|x\|_E=1}\|f(x)\|_F$$

Et $N(f)$ est le plus petit k tel que, pour tout $x\in E$,

$$\|f(x)\|_F\leq k\|x\|_E$$

Proposition On considère trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$, $(G,\|.\|_G)$. On note $N_{E,F}$, $N_{F,G}$, $N_{E,G}$ les normes subordonnées définies comme ci-dessus sur $\mathscr{L}_c(E,F)$, $\mathscr{L}_c(F,G)$, $\mathscr{L}_c(E,G)$ respectivement. Alors, si $u\in\mathscr{L}_c(E,F)$ et $v\in\mathscr{L}_c(F,G)$,

$$N_{E,G}(v\circ u)\leq N_{F,G}(v)N_{E,F}(u)$$

Corollaire Ici, $E=F$, on a une norme $\|.\|_E$ sur E, et si $u\in\mathscr{L}_c(E)$ on définit

$$N(f)=\sup_{x\neq 0_E}\frac{\|u(x)\|_E}{\|x\|_E}=\sup_{\|x\|_E=1}\|u(x)\|_E$$

Alors N est une norme sur $\mathscr{L}_c(E)$ qui vérifie $N(\mathrm{Id}_E)=1$ et

$$\forall(u,v)\in\mathscr{L}_c(E)^2\qquad N(v\circ u)\leq N(u)\ N(v)$$

On dit que N est une norme d'algèbre unitaire.

Propriété On a $N(u^k)\leq(N(u))^k$, pour tous $k\in\mathbf{N}$ et $u\in\mathscr{L}_c(E)$.

I.6 Version matricielle

Proposition Soit $\|.\|$ une norme quelconque sur $M_{n,1}(\mathbf{K})$. On définit, si $A \in M_n(\mathbf{K})$,

$$N(A) = \sup_{X \neq (0)} \frac{\|AX\|}{\|X\|} = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$$

On définit ainsi une norme sur $M_n(\mathbf{K})$, vérifiant $N(I_n) = 1$ et

$$\forall (A, B) \in M_n(\mathbf{K}) \qquad N(AB) \leq N(A)N(B)$$

ce qui implique

$$\forall A \in M_n(\mathbf{K}) \quad \forall k \in \mathbf{N} \qquad N(A^k) \leq (N(A))^k$$

II Continuité des applications multilinéaires

Proposition Si $E_1, \dots, E_p, F$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés, si $f : E_1 \times \cdots \times E_p \longrightarrow F$ est mutlilinéaire, alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue.

(ii) Il existe $k \geq 0$ tel que, pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \cdots \times E_p$,

$$\|f(x_1, \dots, x_p)\|_F \leq k \|x_1\|_{E_1} \dots \|x_p\|_{E_p}$$

Cette proposition étant surtout utilisée pour $p = 2$, on peut se concentrer sur sa démonstration dans ce cas particulier, elle n'est pas inintéressante.

Corollaire Si $(E, (.|.))$ est un espace préhilbertien réel, l'application $(x, y) \mapsto (x|y)$ est continue de $E \times E$ dans $\mathbf{R}$.

Démonstration Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on est ramené à la proposition avec $k = 1$.

III Applications polynomiales et applications multilinéaires en dimension finie

III.1 Applications polynomiales

a. Définition

Soit E un $\mathbf{K}$-espace de dimension finie, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Si $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, on note $m_{(k_1, \dots, k_n)}$ l'application

$$x \longmapsto x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$$

définie sur E, à valeurs dans $\mathbf{K}$, où l'on a noté

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$$

Autrement écrit, si on définit comme d'habitude les

$$\pi_k : x \longmapsto x_k$$

alors

$$m_{(k_1,\dots,k_n)} = \pi_1^{k_1}\pi_2^{k_2}\dots\pi_n^{k_n}$$

Définition On appelle application polynomiale sur E toute application de E dans $\mathbf{K}$ qui est combinaison linéaire des $m_{(k_1,\dots,k_n)}$.

Remarque On peut avoir l'impression qu'il faudrait dire « polynomiale relativement à la base $(e_1,\dots,e_n)$ »...mais non, c'est indépendant de la base !

b. Continuité

Proposition Toute application polynomiale sur un espace de dimension finie est continue.

c. Exemples fondamentaux

Exemple très utile det est continu sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Autre exemple L'application $M \longrightarrow \mathrm{com}(M)$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$.

Autre exemple très utile L'application qui à une matrice associe son polynôme caractéristique est continue (résultat à préciser !).

Remarque Par contre, si on remplace « caractéristique » par « minimal »...

Application Les exercices d'oral concernant la comatrice...Par exemple,

Exercice déterminer le coefficient de degré 1 de P_A en fonction de la trace de la comatrice de A.

III.2 Applications multilinéaires encore

Proposition Si $E_1,\dots,E_n$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels normés de dimension finie, si F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, alors toute application multilinéaire de $E_1\times\cdots\times E_n$ dans F est continue.

Démonstration Dans le cas où $\dim(F) < +\infty$, il suffit de dire qu'une telle application a pour composantes dans une base de F des applications polynomiales. Et une application dont toutes les applications composantes sont continues l'est.

Dans le cas général, on est obligé de passer par la caractérisation générale. Encore une fois, faisons la démonstration pour $n = 2$, plus agréable à écrire et qui surtout permet de comprendre l'idée sans se noyer dans une forêt d'indices.
On suppose donc $u : E_1 \times E_2 \to F$ bilinéaire, E_1 et E_2 de dimension finie. On fixe deux bases $(e_1^{(1)}, \dots, e_{d_1}^{(1)})$, $(e_1^{(2)}, \dots, e_{d_2}^{(2)})$ de E_1 et E_2 respectivement. Si $x_1 = \sum_{k=1}^{d_1} x_k^{(1)} e_k^{(1)} \in E_1$ et $x_2 = \sum_{k=1}^{d_2} x_k^{(2)} e_k^{(2)} \in E_2$, par bilinéarité

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^{d_1} \left(\sum_{j=1}^{d_2} x_i^{(1)} x_j^{(2)} u(e_i^{(1)}, e_j^{(2)}) \right)$$

et par inégalité triangulaire

$$\|u(x, y)\|_F \le \sum_{i=1}^{d_1} \left(\sum_{j=1}^{d_2} |x_i^{(1)}|\,|x_j^{(2)}|\ \|u(e_i^{(1)}, e_j^{(2)})\|_F \right)$$

Notons $N^{(1)}(x^{(1)}) = \max_{1 \le k \le d_1} |x_k^{(1)}|$, $N^{(2)}(x^{(2)}) = \max_{1 \le k \le d_2} |x_k^{(2)}|$ Alors

$$\|u(x, y)\|_F \le k\ N^{(1)}(x^{(1)})\ N^{(2)}(x^{(2)})$$

où $k = \sum_{i=1}^{d_1} \left(\sum_{j=1}^{d_2} \|u(e_i^{(1)}, e_j^{(2)})\|_F \right)$. Comme il est clair que $N^{(1)}$ et $N^{(2)}$ définissent respectivement des normes sur E_1 et E_2, la caractérisation du **II.** conclut.

Exemple $\det_{\mathscr{B}}$ est continue sur E^n si E est un **K**-espace vectoriel de dimension n dont B est une base.

Exemple Soit $(E, (.|.))$ un espace euclidien ; l'application $(x, y) \mapsto (x|y)$ est continue sur $E \times E$.
Encore vrai, comme on l'a vu, en dimension quelconque.

IV Un peu de topologie sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$

Comme d'habitude en Analyse, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.
L'ensemble de ce paragraphe est hors-programme, mais...utile.

IV.1 Quelques normes

a. Peu importe la norme...

Rappel Sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, toutes les normes sont équivalentes.

...car $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est de dimension finie.
Cela signifie que les voisinages d'une matrice, les ouverts, les fermés...ne dépendent pas du choix de la norme. De même, si $(A_p)_{p\in\mathbf{N}} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^{\mathbf{N}}$, la convergence de (A_p) vers une matrice A ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.
D'ailleurs (caractérisation par les composantes)

$$\left(A_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} A\right) \Longleftrightarrow \left(\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \qquad (A_p)_{i,j} \xrightarrow[p\to+\infty]{} A_{i,j}\right)$$

b. Trois premières normes sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$

On peut définir, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{i,j}|\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}|a_{i,j}|\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}|a_{i,j}| = \sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|$$
$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|^2}$$
$$\|A\|_\infty = \sup_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}| = \max_{1\leq i,j\leq n}|a_{i,j}|$$

c. Des normes plus intéressantes

Pour des raisons diverses (voir surtout la définition de l'exponentielle de matrices, ou de quelque « série entière matricielle » que ce soit) on aime bien les normes subordonnées sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, car elles vérifient

$$N(I_n) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2 \qquad N(AB) \leq N(A)N(B)$$

et donc (récurrence)

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \qquad N(A^k) \leq (N(A))^k$$

Or les trois normes vues plus haut ne vérifient pas les deux propriétés voulues. On n'a jamais besoin d'expliciter une norme subordonnée à l'aide des coefficients de la matrice. On peut quand même se demander à quoi « ressemble » une telle norme.
Munissons par exemple $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ de la norme $\|.\|_1$ usuelle :

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Déterminer $N(A)$, c'est chercher le plus petit k tel que

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \qquad \|AX\|_1 \leq k\|X\|_1$$

(voir **I.4.** ou se souvenir de la définition d'une borne supérieure). On voit donc ce qu'il faut faire : majorer $\|AX\|_1$ à l'aide de $\|X\|_1$. Allons-y :

$$\begin{aligned} \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^{n} |(AX)_i| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} x_j \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}||x_j| \right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} |x_j| \left(\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}| \right) \end{aligned}$$

Posons $k = \max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$. Alors, pour tout X, on a bien $\|AX\|_1 \leq k\|X\|_1$. De plus, il y a au moins un j_0 tel que

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{i,j_0}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{i,j}|$$

alors, en prenant tous les x_j nuls sauf x_{j_0}, il y a égalité dans toutes les inégalités précédentes, donc k est le plus petit possible, donc $k = N(A)$.

Exercice (pas très important) Expliciter la norme subordonnée à $\|.\|_\infty$.

IV.2 Quelques ouvert, quelques fermés, quelques densités

Proposition L'application det est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Il y a deux manières de justifier cela : la première, très simple, est de dire que $\det(A)$ est polynomiale en les coefficients de A. La deuxième, sophistiquée, est de dire que l'application

$$A \longmapsto (c_1(A), \dots, c_n(A))$$

(où les $c_k(A)$ sont les colonnes de A) est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ car linéaire sur cet espace qui est de dimension finie. Et, si $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, l'application $(c_1, \dots, c_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}(c_1, \dots, c_n)$ est continue sur $(\mathbf{K}^n)^n$ car multilinéaire sur cet espace qui est de dimension finie. La composition de ces deux applications est det, qui est donc continue.

Exercice Montrer que $GL_n(\mathbf{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbf{K})$

Exercice Montrer que $GL_n(\mathbf{K})$ est dense dans $M_n(\mathbf{K})$

Exercice Montrer que $S_n(\mathbf{K})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{K})$

Exercice On définira (chapitre Ab2)

$$S_n^+(\mathbf{R}) = \{A \in S_n(\mathbf{R})\ ;\ \forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad X^T\, A\, X \geq 0\}$$

Montrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{R})$.

Exercice Montrer que, si $1 \leq r \leq n-1$, l'ensemble des matrices de rang r n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice Si $T \in T_n^+(\mathbf{K})$ (triangulaire supérieure), montrer qu'il existe une suite de matrices diagonalisables qui converge vers T. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$.

Exercice L'ensemble des matrices diagonalisables est-il dense dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$?

Exercice On rappelle que le rang d'une matrice A est $\geq r$ si et seulement si il existe I et J de cardinal r tels que $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ est inversible.

En déduire que $\{A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})\ ;\ \mathrm{rg}(A) \geq r\}$ est ouvert dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ (on dit que le rang est semi-continu inférieurement).

Exercice Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Ecrire une formule donnant le coefficient de degré 1 de P_A en fonction de la trace de la comatrice de A. On suggère de commencer par supposer A inversible.

Exercice Ecrire $\mathrm{com}(AB)$ en fonction de $\mathrm{com}(A)$ et $\mathrm{com}(B)$. On pourra commencer par envisager le cas des matrices inversibles.

Exercice Montrer que si deux matrices sont inversibles, leurs comatrices le sont aussi.

IV.3 Quelques continuités

Exercice Montrer que l'application $A \longmapsto \mathrm{Tr}(A)$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Exercice Montrer que l'application

$$u : \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ A & \longmapsto & P_A \end{array}$$

est continue.

Exercice Montrer que l'application $A \mapsto \pi_A$ (π_A polynôme minimal de A) n'est pas continue.

Exercice Montrer que l'application $A \mapsto \mathrm{rg}(A)$ n'est pas continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

V Quelques solutions

I.3 [Exercice (Oral Centrale)] Il n'est pas du tout évident que $\phi(f) \in E$ si $f \in E$. Il faut le démontrer, et trouver une constante k telle que

$$\forall f \in E \qquad \|\phi(f)\|_1 \leq k\|f\|_1$$

En fait, on peut faire les deux en même temps. Pour une fois, on ne va pas raisonner sur la fonction (intégrabilité) mais sur l'intégrale (absolue convergence), car on a très envie de faire des intégrations par parties vu l'aspect de $\phi(f)$. Essayons; soit $X > 0$, alors (après avoir quand même dit que $\phi(f)$ était continue sur $[0, +\infty[$)

$$\begin{aligned}\int_0^X |\phi(f)|(x)\mathrm{d}x &\leq \int_0^X \left(e^{-ax}\int_0^x e^{at}|f(t)|\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[-\frac{e^{-ax}}{a}\int_0^x e^{at}|f(t)|\mathrm{d}t\right]_{x=0}^{x=X} + \frac{1}{a}\int_0^X |f(x)|\mathrm{d}x \\ &= -\frac{e^{-aX}}{a}\int_0^X e^{at}|f(t)|\mathrm{d}t + \frac{1}{a}\int_0^X |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{a}\|f\|_1\end{aligned}$$

ce qui donne tout à la fois : le fait que $\phi(f) \in E$, et le fait que ϕ est continue, sa linéarité ne posant aucun problème.

I.4.

1. Si $f \in \mathscr{L}_c(E,F)$, il existe k telle que

   $$\forall x \in E \qquad \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$$

   L'ensemble $\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$ est donc majoré; il est évidemment non vide (on a oublié de dire qu'on supposait $E \neq \{0_E\}$, mais c'est quand même assez naturel...). Donc $N(f)$ est bien définie.

2. Il suffit de remarquer que

   $$\left\{\frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\} = \left\{\left\|f\left(\frac{1}{\|x\|_E}x\right)\right\|_F\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$$

   (linéarité de f, homogénéité de la norme). Or

   $$\left\{\frac{1}{\|x\|_E}x\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\} = S(0_E, 1) = \{y \in E\ ;\ \|y\|_E = 1\}$$

ce qui montre bien ce qu'on veut.

3. Les majorants de $\left\{\dfrac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}\ ;\ x \in E \setminus \{0_E\}\right\}$ sont les k tels que

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\} \qquad \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$$

autrement dit les k tels que

$$\forall x \in E \qquad \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$$

Or la borne supérieure est le plus petit majorant.

4. Même type de rédaction que pour une norme de convergence uniforme.
5. Facilement, $N(\mathrm{Id}) = 1$. Et si u et v sont dans $\mathscr{L}_c(E)$,

$$\forall x \in E \qquad \|v(u(x))\|_E \leq N(v)\|u(x)\|_E \leq N(v)N(u)\|x\|_E$$

ce qui montre tout à la fois que $v \circ u$ est continue (on sait depuis longtemps qu'elle est linéaire) et que $N(v \circ u) \leq N(v)N(u)$ (par 4.)

III.

Exercice Montrer que $GL_n(\mathbf{K})$ est ouvert dans $M_n(\mathbf{K})$

C'est $\det^{-1}(\mathbf{K}\setminus\{0\})$: image réciproque d'un ouvert par une application continue.

Exercice Montrer que $GL_n(\mathbf{K})$ est dense dans $M_n(\mathbf{K})$

Si $M \in M_n(\mathbf{K})$, $M - \dfrac{1}{p}I_n \xrightarrow[p\to+\infty]{} M$ et au moins à partir d'un certain rang, $M - \dfrac{1}{p}I_n \in GL_n(\mathbf{K})$ (car le spectre de M est fini).

Exercice Montrer que $S_n(\mathbf{K})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{K})$

$\phi\ :\ A \mapsto A - A^T$ est linéaire donc continue sur $M_n(\mathbf{K})$ qui est de dimension finie. Donc $\phi^{-1}(\{(0)\})$ est fermé.

Exercice On définira (chapitre Ab2)

$$S_n^+(\mathbf{R}) = \{A \in S_n(\mathbf{R})\ ;\ \forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R}) \quad X^T\ A\ X \geq 0\}$$

Montrer que $S_n^+(\mathbf{R})$ est fermé dans $M_n(\mathbf{R})$.

Linéaire sur un espace de dimension finie, $\psi_X\ :\ A \longmapsto X^T\ A\ X$ est continue pour toute colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})$, donc $\phi^{-1}(\{(0)\}) \cap \bigcap\limits_{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbf{R})} \psi_X^{-1}(\mathbf{R}^+)$, intersection de fermés (comme images réciproques de fermés par des applications continues), est un fermé.

Exercice Montrer que, si $1 \leq r \leq n-1$, l'ensemble des matrices de rang r n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

Notant J_r la matrice canonique de rang r, $J_r + \dfrac{1}{p}(I_n - J_r)$ est de rang n (matrice diagonale à coefficients tous non nuls), et

$$J_r + \frac{1}{p}(I_n - J_r) \xrightarrow[p \to +\infty]{} J_r$$

donc l'ensemble des matrices de rang r n'est pas ouvert (son complémentaire n'est pas fermé). Mais aussi

$$\frac{1}{p} J_r \xrightarrow[p \to +\infty]{} (0)$$

donc l'ensemble des matrices de rang r n'est pas fermé.
Beaucoup d'autres manières de résoudre cette question.

Exercice Si $T \in T_n^+(\mathbf{K})$ (triangulaire supérieure), montrer qu'il existe une suite de matrices diagonalisables qui converge vers T. En déduire que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$.

Il est « évident » qu'on peut trouver, aussi « près » qu'on veut de T, une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux tous distincts, qui sera donc diagonalisable, mais ce n'est pas très facile à écrire. On peut par exemple utiliser la matrice

$$T_p = T + \mathrm{diag}\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{n}{p}\right)$$

Il est clair que (T_p) converge vers T. Deux coefficients diagonaux de T_p sont égaux si et seulement si il existe $i \neq j$ tels que

$$t_{i,i} - t_{j,j} = \frac{j-i}{p}$$

ce qui ne peut plus se produire à partir d'un certain rang (on peut par exemple dire que

$$\left\{ \frac{t_{i,i} - t_{j,j}}{j-i} \ ; \ i \neq j \right\}$$

est un ensemble fini).

Soit maintenant $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$. On trigonalise M : $M = QTQ^{-1}$. On considère une suite de matrices diagonalisables (T_p) qui converge vers T. Alors

$$QT_pQ^{-1} \xrightarrow[p\to+\infty]{} M$$

et les QT_pQ^{-1} sont diagonalisables.

Exercice L'ensemble des matrices diagonalisables est-il dense dans $\mathcal{M}_2(\mathbf{R})$?

Non. Prenons par exemple la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(rotation d'angle $\pi/2$). Si (M_p) converge vers A, alors $\mathrm{Tr}(M_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ et $\det(M_p) \xrightarrow[p\to+\infty]{} 1$. A partir d'un certain rang, on aura

$$\mathrm{Tr}(M_p)^2 - 4\det(M_p) < 0$$

ce qui empêchera M_p d'être diagonalisable (son polynôme caractéristique ne sera pas scindé).

Exercice On rappelle que le rang d'une matrice A est $\geq r$ si et seulement si il existe I et J de cardinal r tels que $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ est inversible.
En déduire que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})\ ;\ \mathrm{rg}(A) \geq r\}$ est ouvert dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (on dit que le rang est semi-continu inférieurement).

Soit A de rang $\geq r$, I et J comme ci-dessus. L'application
$\phi\ :\ M \longmapsto \det\Big(\left(m_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}\Big)$ est continue, $\phi^{-1}(\mathbf{K}\setminus\{0\})$ est un ouvert contenant A et inclus dans l'ensemble des matrices de rang $\geq r$. Ce qui conclut.

Exercice Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Ecrire une formule donnant le coefficient de degré 1 de P_A en fonction de la trace de la comatrice de A. On suggère de commencer par supposer A inversible.

Supposons A inversible :

$$\begin{aligned}
P_A(X) &= \det(XI_n - A)\\
&= X^n \det\left(I_n - \frac{1}{X}A\right)\\
&= X^n \det(A)\det\left(A^{-1} - \frac{1}{X}I_n\right)\\
&= (-1)^n X^n \det(A)\det\left(\frac{1}{X}I_n - A^{-1}\right)\\
&= (-1)^n X^n \det(A) P_{A^{-1}}\left(\frac{1}{X}\right)
\end{aligned}$$

Donc

$$P_A(X) = (-1)^n \det(A) + (-1)^{n+1}\det(A)\mathrm{Tr}(A^{-1})X + \cdots$$

Le coefficient cherché est donc $(-1)^{n+1}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{com}(A))$. Mais si on note $\alpha(A)$ le coefficient de degré 1 de P_A, α est continue car fonction polynomiale des coefficients de A (justifiable grâce à la formule

$$P_A(X) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}} \dots \qquad)$$

L'application $A \mapsto (-1)^{n+1}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{com}(A))$ est continue pour les mêmes raisons, or $GL_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on conclut donc

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \qquad \alpha(A) = (-1)^{n+1}\mathrm{Tr}\,(\mathrm{com}(A))$$

Exercice Ecrire $\mathrm{com}(AB)$ en fonction de $\mathrm{com}(A)$ et $\mathrm{com}(B)$. On pourra commencer par envisager le cas des matrices inversibles.

Si A et B sont inversibles,

$$\begin{aligned}\mathrm{com}(AB) &= \det(A) \times \det(B) \times \left((AB)^{-1}\right)^T \\ &= \det(A)\ (A^{-1})^T \times \det(B)\ (B^{-1})^T \\ &= \mathrm{com}(A) \times \mathrm{com}(B)\end{aligned}$$

Supposons maintenant A seulement inversible. Les applications $B \longmapsto \mathrm{com}(AB)$ et $B \longmapsto \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$ sont continues (les coefficients de $\mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$ sont polynomiaux en les coefficients de B), et coïncident sur $GL_n(\mathbf{K})$ qui est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, donc sont égales. On fixe alors B quelconque, et on tient les mêmes propos sur $A \longmapsto \mathrm{com}(AB)$ et $A \longmapsto \mathrm{com}(A)\mathrm{com}(B)$, on conclut donc que pour tout couple (A, B) de matrices,

$$\mathrm{com}(AB) = \mathrm{com}(A) \times \mathrm{com}(B)$$

Exercice Montrer que l'application $A \longmapsto \mathrm{Tr}(A)$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Elle est linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ qui est de dimension finie.

Exercice Montrer que l'application

$$u: \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ A & \longmapsto & P_A \end{array}$$

est continue.

Ses composantes dans la base canonique de l'espace d'arrivée (i.e. les coefficients de P_A) sont fonctions polynomiales des coefficients de A.

Exercice Montrer que l'application $A \mapsto \pi_A$ (π_A polynôme minimal de A) n'est pas continue.

Prenons $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Alors $\frac{1}{p}N \xrightarrow[p\to+\infty]{} (0)$, pourtant $\pi_{\frac{1}{p}N} = X^n$, et la suite (X^n) ne converge pas vers X quand $p \to +\infty$.

Exercice Montrer que l'application $A \mapsto \mathrm{rg}(A)$ n'est pas continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

L'exemple précédent marche encore ici.

Table des matières