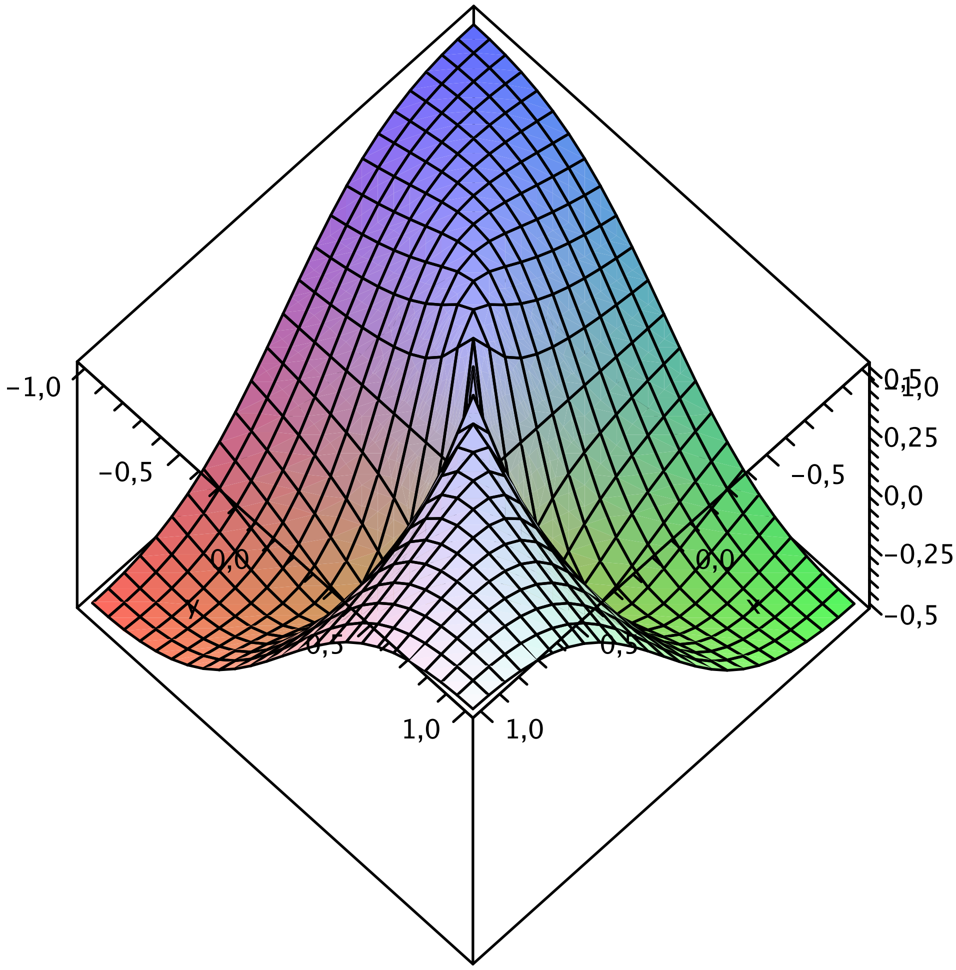
T4 : Limites, continuité



$f : (x, y) \mapsto xy/(x^2 + y^2)$, non continue en $(0,0)$

Jusqu'au **II.5.**, *c'est un chapitre assez simple : on remplace* $|.|$ *sur* **R** *ou sur* **C** *par* $\|.\|$ *sur un espace vectoriel normé. Ce qui est beaucoup plus nouveau, c'est la continuité des applications linéaires.*

I Limites

I.1 Définition

Soit f une application définie sur une partie A d'un espace vectoriel normé E, à valeurs dans un espace vectoriel normé F, et soit a un élément de E adhérent à A (on résumera ces hypothèses en $f\ :\ A \subset E \longrightarrow F\ ,\ a \in \overline{A}$). Soit b un élément de F. On dit que f a pour limite b en a, et on note $\lim_{a} f = b$, ou $\lim_{x \to a} f(x) = b$ lorsque :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \qquad \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \epsilon \ .$$

Remarque 1 (unicité de la limite) : S'il y a une limite, elle est unique.

Remarque 2 (influence du choix des normes) : La définition dépend du choix des normes sur E et sur F. Mais remplacer une norme sur E ou sur F par une norme équivalente ne change pas la définition.

Autres formulations, à l'aide des boules et des voisinages : La définition donnée est équivalente à ;

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in A \qquad x \in B_E(a, \eta) \Longrightarrow f(x) \in B_F(b, \epsilon)$$

ou à :

$$\forall V \in \mathcal{V}_F(b) \quad \exists W \in \mathcal{V}_A(a) \qquad f(W) \subset V$$

où $\mathcal{V}_F(b)$ désigne l'ensemble des voisinages de b dans F.

On n'utilisera pas l'écriture avec les voisinages, mais elle montre bien le rôle « unificateur » de cette notion. On n'utilisera pas non plus l'écriture avec les boules, mais elle est assez « graphique ».

I.2 Caractérisation par les suites

Proposition importante : Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$, $a \in \overline{A}$. Soit b un élément de F. f a pour limite b en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers b.

Ce résultat est très important car très utile : il permet d'abord de déduire des résultats sur les limites de fonctions en utilisant des résultats connus sur les limites de suites. Il intervient aussi dans l'étude de suites $u_{n+1} = f(u_n)$.

Proposition peu importante : Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$, $a \in \overline{A}$. f a une limite en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

I.3 Limites infinies, limites en l'infini

Il arrive, assez souvent, que $E = \mathbf{R}$ ou $F = \mathbf{R}$.

a. Limites en $\pm\infty$

Soit $f : A \subset \mathbf{R} \longrightarrow F$; on suppose $\forall x \in \mathbf{R} \quad [x, +\infty[\cap A \neq \emptyset$ (ce qui signifie : A non majorée). Soit b un élément de F. On définit :

$$\lim_{+\infty} f = b$$

de la manière suivante :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \qquad x \geq M \implies \|f(x) - b\|_F \leq \epsilon\ .$$

Soit $f : A \subset \mathbf{R} \longrightarrow F$; on suppose A non minorée. Soit b un élément de F. On définit :

$\lim_{-\infty} f = b \iff$

b. Limites infinies

Soit $f\ :\ A \subset E \longrightarrow \mathbf{R}\ ,\ a \in \overline{A}$. On définit :

$\lim\limits_{a} f = +\infty \iff$

Soit $f\ :\ A \subset E \longrightarrow \mathbf{R}\ ,\ a \in \overline{A}$. On définit :

$\lim\limits_{a} f = -\infty \iff$

c. Limites infinies en $\pm\infty$

Ne concernent que les fonctions réelles d'une variable réelle : vu dans T1.

d. Unification à l'aide des voisinages

(Parenthèse culturelle hors-programme, mais unifier les différentes écritures de limites était un objectif de Hilbert)
Si A est une partie non majorée de $\mathbf{R}$, on appellera **voisinage de** $+\infty$ dans A toute partie V de A telle qu'il existe M réel vérifiant : $]M, +\infty[\cap A \subset V$. Ainsi, un voisinage de $+\infty$ dans $\mathbf{R}$ est une partie de $\mathbf{R}$ contenant un intervalle non majoré (ou : contenant tous les réels supérieurs ou égaux à un réel donné). On définit de même les voisinages de $-\infty$. La limite de f en a (finie ou infinie) est alors b (fini ou infini) si et seulement si

$$\forall V \in \mathcal{V}_F(b) \quad \exists W \in \mathcal{V}_A(a) \qquad f(W) \subset V\ .$$

On remarque que cette définition contient aussi les limites de suites considérées comme applications de la partie $\mathbf{N}$ de $\mathbf{R}$ à valeurs dans F, avec $a = +\infty$.

I.4 Limite quand la variable tend en norme vers l'infini

Dans **R**, c'est un peu particulier, car on peut naturellement distinguer deux manières particulières de tendre vers l'infini. Mais dans un espace vectoriel normé quelconque, on se contente de dire que x tend vers « l'infini » lorsque $\|x\|$ tend vers $+\infty$.

Soit $f\ :\ A \subset E \longrightarrow F$; on suppose A non bornée. Soit b un élément de F. On définit $\lim_{\|x\|_E \to +\infty} f(x) = b$ par

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists M \in \mathbf{R} \quad \forall x \in A \qquad \|x\|_E \geq M \Longrightarrow \|f(x) - b\|_F \leq \epsilon\ .$$

On définit de même, si f est à valeurs réelles, $\lim_{\|x\|_E \to +\infty} f(x) = \pm\infty$.

I.5 Opérations sur les limites

a. Combinaison linéaire

Soit f, g deux applications d'une partie A d'un **K**-espace vectoriel normé E vers un **K**-espace vectoriel normé F, et soit $a \in \overline{A}$.

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} c$, si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, alors

$$\lambda f(x) + \mu g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \lambda b + \mu c$$

b. Produit par une fonction à valeurs scalaires

On considère deux **K**-espaces vectoriels normés E et F, $A \subset E$, $a \in \overline{A}$.
Si $\lambda\ :\ A \subset E \to \mathbf{K}$, vérifie $\lambda(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha$,
Si $f\ :\ A \subset E \to \mathbf{F}$, vérifie $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$,
alors
$(\lambda.f)(x) = \lambda(x).f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \alpha.b$.

Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0_F$ et si λ est bornée au voisinage de a, ou
Si $\lambda(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$ et si f est bornée au voisinage de a, alors
$(\lambda.f)(x) = \lambda(x).f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0_F$.

I.6 Limite suivant une partie

Soit $f\ :\ A \subset E \longrightarrow F$, $a \in \overline{A}$, soit P une partie de A telle que a soit adhérent à P. La limite de f en a suivant P est, si elle existe, la limite en a de la restriction de f à P. Si A est une partie de $\mathbf{R}$, la limite en a suivant $[a,+\infty[\cap A$ ou $]a,+\infty[\cap A$ est (bien sûr si elle existe) la **limite à droite** en a, notée $\lim\limits_{a^+}$ ou plus explicitement $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\geq a}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}$ respectivement. On définit de même les limites à gauche. On considère aussi parfois la limite en a suivant $A\setminus\{a\}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\neq a}}$.

I.7 Caractérisation par les composantes

Proposition Soit $f\ :\ A \subset E \longrightarrow F$, $a \in \overline{A}$. On suppose $\dim(F) < +\infty$, $(e_1,\ldots,e_p)$ une base de F. On note, pour tout $x \in A$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x)e_k$$

Soit $\ell = \sum\limits_{k=1}^{p} \ell_k e_k \in F$. Alors

$$\left(f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell\right) \Longleftrightarrow \left(\forall k \in [\![1,p]\!] \quad f_k(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_k\right)$$

I.8 Limite d'une application à valeurs dans un espace produit

Proposition

Soit $f\ :\ A \subset E \longrightarrow F_1\times\cdots\times F_p$, $a \in \overline{A}$; on note, pour tout x,

$$f(x) = \big(f_1(x),\ldots,f_n(x)\big)$$

On définit ainsi des applications $f_i\ :\ A \subset E \longrightarrow F_i$. Alors f a pour limite $(b_1,\ldots,b_n)$ en a si et seulement si chaque f_i a pour limite b_i en a.

II Continuité

II.1 Définition

Définition : Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$, $a \in A$. On dit que f est continue en a lorsque

$$f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$$

ou, ce qui est équivalent, lorsque f a une limite en a (cette limite ne peut alors être autre que $f(a)$).

On dit que f est continue sur A lorsque f est continue en tout point de A.

Remarque : La continuité en un point est une propriété locale : si deux applications coïncident au voisinage d'un point, la continuité de l'une en ce point équivaut à celle de l'autre.

Exemple : Toute fonction lipschitzienne est continue.

II.2 Caractérisation de la continuité par les suites

Proposition : f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge (vers $f(a)$).

II.3 Opérations sur les fonctions continues

E, F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels.

Proposition

Si $f : A \subset E \to F$ et $g : A \subset E \to F$ sont continues en a, si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue en a.

Proposition

Si $f : A \subset E \to F$ et $g : A \subset E \to F$ sont continues sur A, si $(\lambda, \mu) \in \mathbf{K}^2$, $\lambda f + \mu g$ est continue sur A.

Proposition

Si $f : A \subset E \to F$ et $\lambda : A \subset E \to \mathbf{K}$ sont continues en a (resp. sur A), $x \longmapsto \lambda(x) f(x)$ est continue en a (resp. sur A).

$\mathscr{C}\big(A, F\big)$ est donc un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $\mathscr{C}\big(A, \mathbf{K}\big)$ est une $\mathbf{K}$-algèbre ($\mathbf{K}$-espace vectoriel, anneau, et $\alpha(f \times g) = (\alpha f) \times g = f \times (\alpha g)$).

Proposition

Si f est continue en x et g est continue en $f(x)$, $g \circ f$ est continue en x.
Si f est continue sur A et g est continue sur $f(A)$, $g \circ f$ est continue sur A.

II.4 Caractérisation par les composantes

Proposition Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$, $a \in \overline{A}$. On suppose $\dim(F) < +\infty$, $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de F. On note, pour tout $x \in A$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{p} f_k(x) e_k$$

Alors f est continue en a (resp. sur A) si et seulement si chaque f_k l'est.

II.5 Continuité d'une application à valeurs dans un espace produit

Proposition : Soit $f : A \subset E \longrightarrow F_1 \times \cdots \times F_p$, $a \in A$. On définit les applications $f_i : A \subset E \longrightarrow F_i$ comme dans **8.**. Alors f est continue en a (respectivement sur A) si et seulement si chaque f_i l'est.

II.6 Continuité et densité

a. Le résultat

Proposition : Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ et $g : A \subset E \longrightarrow F$ deux applications. On suppose

(i) f et g continues sur A

(ii) D dense dans A

(iii) $\forall x \in D \qquad f(x) = g(x)$

Alors $f = g$ (i.e. $\forall x \in A \quad f(x) = g(x)$).

Autrement dit, deux applications continues qui coïncident sur une partie dense sont égales.

b. L'exercice classique

On cherche les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continues et vérifiant

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2 \qquad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(On peut rencontrer à l'oral des équations fonctionnelles analogues).

1. Montrer $\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall m \in \mathbf{Z} \qquad f(mx) = mf(x)$.
2. Montrer $\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall r \in \mathbf{Q} \qquad f(rx) = rf(x)$.
3. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\forall x \in \mathbf{R} \quad f(x) = \alpha x$.

II.7 Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé

Proposition : Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$ une application continue. Alors l'image réciproque par f de tout ouvert (de F) est un ouvert de A (i.e. un ouvert « relatif » de A). L'image réciproque par f de tout fermé (de F) est un fermé de A.
Autrement dit, soit $X \subset F$.
Si X est ouvert, $f^{-1}(X)$ est un ouvert de A.
Si X est fermé, $f^{-1}(X)$ est fermé de A.

C'est un résultat très utile ! Par exemple, si f et g sont deux fonctions continues sur A à valeurs réelles,
$\{x \in A\ ;\ f(x) = g(x)\}$ est
$\{x \in A\ ;\ f(x) < g(x)\}$ est
$\{x \in A\ ;\ f(x) \neq g(x)\}$ est

On verra beaucoup d'exemples d'applications de ce résultat.

Exercice culturel : Soit $f : A \subset E \longrightarrow F$. On suppose que l'image réciproque par f de tout ouvert de F est un ouvert de A. Montrer que f est continue.
Bien que ce soit complètement hors-programme, on pourra être intéressé(e) par le fait que c'est ici la définition générale de la continuité d'une application : une application est continue si et seulement si l'image réciproque par cette application de tout ouvert est un ouvert.

II.8 Continuité uniforme

La fonction $f : A \subset E \longrightarrow F$ est uniformément continue sur A lorsque

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall (x, y) \in A^2 \qquad \|y - x\|_E \leq \eta \implies \|f(y) - f(x)\| \leq \epsilon$$

Les applications lipschitziennes, entre autres, sont uniformément continues.

Table des matières