T3 : Topologie des espaces vectoriels normés

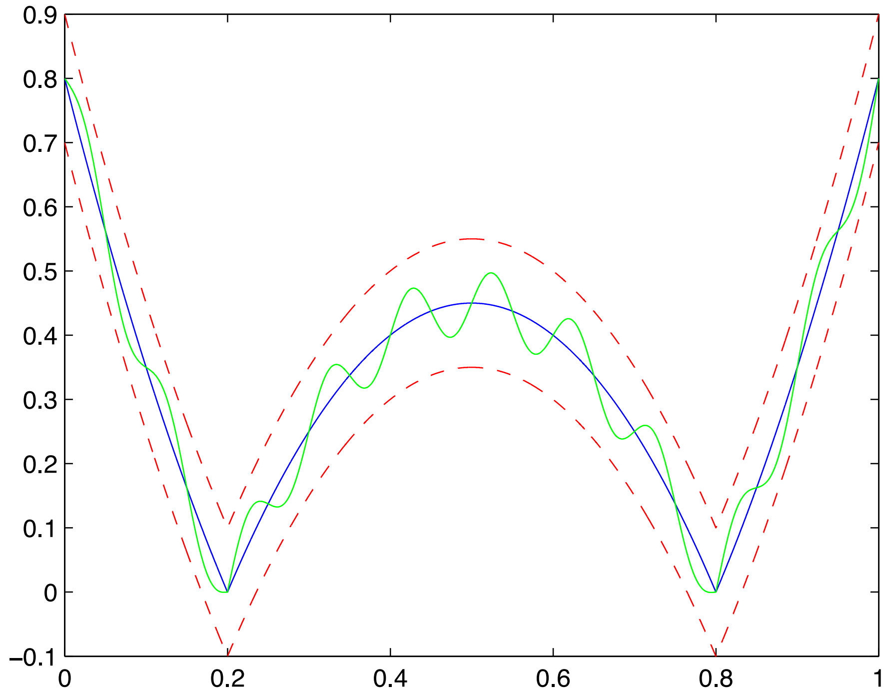

Illustration d'un « voisinage » dans $(C([0,1],\mathbf{R}),\|.\|_\infty)$

I Rappels sur l'intersection et la réunion

Soit E un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de E, I étant un ensemble non vide quelconque. On définit alors l'intersection de la famille des A_i par :

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \forall i \in I \quad x \in A_i$$

et la réunion par :

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \quad \Leftrightarrow \quad \exists i \in I \quad x \in A_i$$

On remarque alors, avec des notations « évidentes » :

$$B \cap \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{i\in I} (B \cap A_i)$$

$$B \cup \bigcap_{i\in I} A_i = \bigcap_{i\in I} (B \cup A_i)$$

II Voisinages

II.1 Définition

Définition : voisinage d'un point dans un evn

Soit (E,N) un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé, a un élément de E. On dit qu'une partie V de E est un voisinage de a lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$B(a,\delta) \subset V$$

où $B(a,\delta)$ est la boule ouverte de centre a et de rayon δ (pour la norme N).

On note souvent $\mathscr{V}(a)$ l'ensemble des voisinages de a.

Remarquons que dire :
« il existe $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subset V$ »
ou
« il existe $\delta > 0$ tel que $B'(a,\delta) \subset V$ »
revient strictement au même. Mais on exprime toujours les voisinages avec des boules ouvertes : il est plus simple de dire « un voisinage de a est une partie qui

contient une boule ouverte centrée en a » que « un voisinage de a est une partie qui contient une boule fermée de rayon non nul centrée en a ».

II.2 Propriétés

— Si V est un voisinage de a, toute partie W qui contient V est un voisinage de a :

$$\big(V \in \mathcal{V}(a)\ ,\ V \subset W\big) \Rightarrow \big(W \in \mathcal{V}(a)\big)$$

— Une réunion de voisinages de a en est un :

$$\big(\forall i \in I \quad V_i \in \mathcal{V}(a)\big) \ \Rightarrow\ \big(\bigcup_{i\in I} V_i \ \in \mathcal{V}(a)\big)$$

— Une intersection **finie** de voisinages en est un :

$$\big(\forall i \in [\![1,p]\!] \quad V_i \in \mathcal{V}(a)\big) \ \Rightarrow\ \big(\bigcap_{i=1}^{p} V_i \ \in \mathcal{V}(a)\big)$$

On peut résumer en disant que l'ensemble des voisinages d'un point est stable par « extension », réunion, et intersection finie.

II.3 Topologie et probabilités

En probabilités, on ne parle que de réunions et d'intersections finies ou dénombrables. En topologie, il s'agit d'intersections et de réunions quelconques : ci-dessus, I peut être fini ou infini, dénombrable ou non dénombrable.

II.4 « Au voisinage de ... »

On dit qu'une propriété $\mathscr{P}$ est vraie « au voisinage de a » lorsqu'il existe un voisinage de a sur lequel $\mathscr{P}$ est vraie.
Par exemple, cos est strictement positive au voisinage de 0.
Par exemple, si f est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, si $f'(x_0) > 0$, f est strictement croissante au voisinage de x_0.

II.5 Voisinages et comparaison de normes

Proposition : Si N et N' sont deux normes équivalentes, les voisinages de a dans (E, N) et dans (E, N') sont les mêmes.

III Ouverts (parties ouvertes)

III.1 Définition

Définition

Une partie Ω de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dite ouverte lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points.

Autrement dit, si Ω est une partie de E,

$$(\Omega \text{ ouvert}) \Longleftrightarrow (\forall x \in \Omega\ \exists r > 0 \quad B(x, r) \subset \Omega)$$

On formule souvent la définition de la manière suivante :

Reformulation Une partie Ω de E est ouverte lorsque, pour chaque point a de Ω, Ω contient une boule ouverte centrée en a.

On remarque en particulier que $\emptyset$ est ouvert.

III.2 Exemple : les boules ouvertes

Proposition Dans un espace vectoriel normé, toute boule ouverte est un ouvert.

III.3 Propriétés

(i) $\emptyset$ et E sont des ouverts.
(ii) Une réunion **quelconque** d'ouverts est un ouvert : si I est un ensemble quelconque, si chaque Ω_i $(i \in I)$ est ouvert, alors $\bigcup_{i \in I} \Omega_i$ est un ouvert.
(iii) Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert : si $\Omega_1, \ldots, \Omega_p$ sont des ouverts, $\Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_p$ est un ouvert.

III.4 Intérêt

On travaille sur un ouvert pour ne jamais être sur le bord...En effet, un ouvert peut avoir un « bord », mais ce qui est sur le bord n'est pas dans l'ouvert. Par exemple, le « bord » d'une boule ouverte, dans un espace vectoriel normé, est la sphère, mais les points de la sphère ne font pas partie de la boule ouverte.
Exemple d'utilisation : « Si une fonction, dérivable sur un intervalle I et à valeurs réelles, atteint un extremum local en un point a, alors $f'(a) = 0$ » est un résultat faux, mais qui devient vrai si on suppose l'intervalle...
L'intérêt de la notion topologique d'« ouvert » devient plus évidente si on généralise ce résultat aux fonctions de plusieurs variables :

> Si $f\ :\ (x, y) \longmapsto f(x, y)$ est définie sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbf{R}^2$, à valeurs réelles, si f atteint un maximum ou un minimum (local) en $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ et a des dérivées partielles en ce point, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Voir plus tard. Insistons quand même sur l'intérêt ici du vocabulaire topologique : « f atteint un maximum local en $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ » peut de traduire par « au voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathcal{U}$, on a $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ ».

IV Fermés (parties fermées)

IV.1 Définition

Définition

Une partie A d'un espace vectoriel normé (E, N) est fermée (ou : est un fermé) si et seulement si son complémentaire est ouvert. Autrement dit,

$$(A \text{ fermé}) \Longleftrightarrow (A^c \text{ ouvert})$$

On note $A^c = E \setminus A$ le complémentaire de A dans l'espace vectoriel normé E.

IV.2 Topologie et probabilités (encore)

En topologie, on ne notera pas $\overline{A}$ à la place de A^c, car $\overline{A}$ désignera l'adhérence de A (voir plus loin).

IV.3 Exemple des boules fermées

Proposition Si $a \in E$ et $r \geq 0$, $B'(a,r)$, boule fermée de centre a et de rayon r, est un fermé.

Cas particulier Un singleton $\{a\}$ est toujours fermé (simple mais très utile)

IV.4 Propriétés

(i) $\emptyset$ et E sont des fermés.
(ii) Une réunion **finie** de fermés est un fermé.
(iii) Une intersection **quelconque** de fermés est un fermé.

IV.5 Caractérisation par les suites

Proposition Une partie A de E est fermée si et seulement si, pour toute suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de A, $\lim(u_n)$ est dans A

Autrement dit, A est fermé si et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge dans E converge dans A.

IV.6 Intérêt

Quand on est dans un fermé, on y reste par passage à la limite.

IV.7 Remarque banale

Une partie n'est en général ni ouverte ni fermée.

IV.8 Un fermé

Exercice : Dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de E qui converge vers une limite ℓ. Montrer que l'ensemble $A = \{u_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\} \cup \{\ell\}$ est fermé en montrant que son complémentaire est ouvert.
Remarque : On utilise plus souvent la caractérisation par les suites, ou l'image réciproque d'un fermé par une application continue (voir T4) pour montrer qu'une partie est fermée.

V Points adhérents à une partie, adhérence

On désigne toujours par $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

V.1 Définition des points adhérents

Soit A une partie de E. On dit que $x \in E$ est adhérent à A lorsque

$$\forall \delta > 0 \qquad B(x, \delta) \cap A \neq \emptyset$$

Autrement dit, être adhérent à A, c'est être dans A, ou sur le bord de A.
Bien écrire la définition avec des boules ouvertes : si on utilise des boules fermées, ça revient au même, mais on peut par mégarde accepter $\delta \geq 0$, et on a alors un problème...

V.2 Caractérisation par les suites

Proposition x est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a.

V.3 Définition de l'adhérence d'une partie

L'adhérence de A est l'ensemble des points adhérents à A. On la note $\overline{A}$.

$$\begin{aligned} b \in \overline{A} &\iff \forall r > 0 \quad B(b, r) \cap A \neq \emptyset \\ &\iff \exists (x_n) \in A^{\mathbf{N}} \quad x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b \end{aligned}$$

V.4 Intérêt

Soit f une fonction définie sur A. Si on veut parler de $\lim_{x \to a} f(x)$, on imposera $a \in \overline{A}$.

V.5 Exemples

Exemple 1 : Dans un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, si $x \in E$ et $r > 0$, l'adhérence de $B(x, r)$ est

Cette propriété est fausse dans un espace métrique, hors programme...mais c'est ce qui explique qu'on ait l'habitude de noter $B'(x,r)$ la boule fermée, surtout pas $\overline{B}(x,r)$ pour ne pas prendre de mauvaises habitudes.

Exemple 2 : Dans $\mathbf{R}$, l'adhérence de $[a,b[$ est

Exemple 3 : Dans $\mathbf{R}$, l'adhérence de $\mathbf{Z}$ est

Exemple 4 : Dans $\mathbf{R}$, l'adhérence de $\mathbf{Q}$ est

Exemple 5 : Dans $\mathbf{R}$, l'adhérence de $\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ est

V.6 Caractérisation : le plus petit fermé...

Proposition

L'adhérence de A est le plus petit fermé contenant A.

Plus explicitement :

Soit A une partie de E, $\overline{A}$ son adhérence.

— $\overline{A}$ est un fermé.
— $A \subset \overline{A}$.
— Si B est un fermé, si $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset B$

V.7 Caractérisation d'un fermé par son adhérence

Proposition Soit A une partie d'un espace vectoriel normé.

$$(A \text{ fermée}) \iff$$

V.8 Caractérisation des points adhérents par la distance

Proposition Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E, $x \in E$.

$$(x \in \overline{A}) \iff \big(d(x, A)$$

V.9 Application à la borne supérieure ou inférieure

Si A est une partie non vide majorée de $\mathbf{R}$, $\sup(A)$ est l'unique majorant de A adhérent à A.

VI Densité

a. Définition

Définition Une partie A de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$ est dite dense dans E lorsque $\overline{A} = E$.

Traduction1 A est dense dans E si et seulement si tout élément de E est limite d'une suite d'éléments de A.

Traduction 2 A est dense dans E si seulement si toute boule ouverte dans E contient un élément de A :

$$\forall x \in E \quad \forall r > 0 \qquad B(x, r) \cap A \neq \emptyset$$

Attention : la traduction 1, qu'on a tendance à privilégier, n'est pas toujours la meilleure.

b. Densités au programme

Proposition 1 $\mathbf{Q}$ est dense dans $\mathbf{R}$

Autrement dit, tout réel est limite d'une suite de rationnels. Ou : tout intervalle $]a, b[$ avec $a < b$ contient au moins un rationnel (ce qui revient à dire qu'il en contient une infinité).

Démonstration 1 Une idée simple : approcher un réel par la suite de ses approximations décimales par défaut. Par exemple, π est limite de la suite

$$u_0 = 3 \quad u_1 = 3,1 \quad u_2 = 3,14 \quad u_3 = 3,141 \quad u_4 = 3,1415\ldots\ldots$$

Sur cette idée, étant donné un réel x, on peut l'approcher par la suite

$$u_0 = \lfloor x \rfloor \quad , u_1 = \frac{\lfloor \quad \rfloor}{}$$

Et on a même fait mieux : tout réel est limite d'une suite de nombres décimaux (un nombre décimal est un nombre qui, multiplié par une puissance de 10 convenable, donne un entier). La base 10 étant d'ailleurs assez arbitraire, on peut aussi bien dire que tout réel est limite d'une suite de nombres dyadiques (on remplace 10 par 2), etc. . .

Démonstration 2 Pas très compliquée, elle est beaucoup plus utile que la précédente, car elle est le premier pas vers un résultat plus général : un sous-groupe de $(\mathbf{R},+)$ est discret ou dense dans $\mathbf{R}$ (voir exercice).

On utilise plutôt la deuxième caractérisation de la densité (« il y a des rationnels partout »). Soit donc $a<b$, on cherche un p/q dans $]a,b[$. Pour être sûr qu'il y en aura un, on choisit q tel que...

Exercice d'application Montrer que l'ensemble des racines de l'unité dans $\mathbf{C}$ est dense dans $\mathbf{U}$ (utilisé dans un exercice d'oral ens).

Proposition 2 (Théorème de Weierstrass) Le sous-espace des fonctions polynomiales est dense dans $\big(C([a,b],\mathbf{K}),\|.\|_\infty\big)$ ($\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$)...

...et donc a fortiori dans $(C([a,b],\mathbf{K}),\|.\|_1)$ ou dans $(C([a,b],\mathbf{K}),\|.\|_2)$.

Remarque : Il peut paraître intuitivement surprenant qu'un sous-espace « strict » soit dense dans l'espace. En effet, en dimension finie, c'est impossible, car un sous-espace de dimension finie est fermé (voir plus tard).

Proposition 3 On prend $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{K}=\mathbf{C}$. Alors $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{K})$, espace des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$, est dense dans $\big(C_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbf{K}),\|.\|_\infty\big)$... (et donc a fortiori, etc...)

Démonstration Un dessin suffit presque...mais la continuité uniforme d'une fonction continue sur un segment est bien utile.

c. Une densité très classique

Proposition 4 (h.p.) Pour $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, $GL_n(\mathbf{K})$ est dense dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ (celui-ci étant muni d'une norme quelconque : elles sont toutes équivalentes). Ce n'est pas un résultat du programme, c'est un exercice très, très classique, dont une démonstration est simple mais pas forcément intuitive, à connaître donc.

d. Un exercice

Exercice : On considère E le $\mathbf{R}$-espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, ayant pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$. On le munit de $\|.\|_\infty$ (toute fonction continue sur $\mathbf{R}$ ayant des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ est bornée sur $\mathbf{R}$). On considère F le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions à support compact : f est à support compact si et seulement si il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R} \setminus [-M, M] \qquad f(x) = 0$$

Montrer que F est dense dans E.

VII Points intérieurs à une partie, intérieur

VII.1 Définition des points intérieurs à une partie

Définition Soit $(E, \|.\|)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
On dit que a est intérieur à A lorsque A est voisinage de a, c'est-à-dire lorsqu'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$.

Autrement dit, être intérieur à A, c'est être dans A mais pas sur le bord.

VII.2 Définition de l'intérieur d'une partie

Définition L'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble des points intérieurs à A.
Autrement dit,

$$\left(x \in \overset{\circ}{A}\right) \iff \left(\exists r > 0 \quad B(x, r) \subset A\right)$$

VII.3 Caractérisation : le plus grand ouvert...

Proposition $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.
Plus explicitement,

(i) $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert,

(ii) $\overset{\circ}{A} \subset A$,

(iii) Si B est un ouvert inclus dans A, alors $B \subset \overset{\circ}{A}$.

VII.4 Caractérisation d'un ouvert par son intérieur

Proposition

$$(A \text{ ouvert}) \iff$$

VIII Frontière d'une partie, point frontière

Définition Soit A une partie de l'espace vectoriel normé E. On appelle frontière de A l'ensemble

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$$

On appelle point frontière de A un point qui est dans la frontière de A, c'est-à-dire un point qui est dans l'adhérence de A mais pas dans son intérieur.

Nature topologique La frontière d'une partie A de E est toujours

Rappelons qu'en général, une partie d'un espace vectoriel normé n'a aucune raison d'être ouverte ou fermée.

Exemple 1 : La frontière de E est

Exemple 2 : Dans $\mathbf{R}$, la frontière de $\mathbf{Z}$ est

Exemple 3 : Dans $\mathbf{R}$, la frontière de $\mathbf{Q}$ est

Exemple 4 : Dans $\mathbf{R}$, la frontière de $]0,2[\cup]2,3[$ est

Exemple 5 : Dans un espace vectoriel normé, la frontière d'une boule est

Exemple 6 : Dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, la frontière de $\mathscr{GL}_n(\mathbf{K})$ est

IX Topologie induite

IX.1 Norme induite sur un sev d'un evn

Ce qui suit est un ensemble de considérations qui ne sont pas dans le programme, mais peuvent aider à comprendre les définition de la topologie induite.

Si $(E, \|.\|)$ est un **K**-espace vectoriel normé, si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction de $\|.\|$ à F est assez évidemment une norme sur F. Et fait de $(F, \|.\|)$ un espace vectoriel normé (on note de la même manière la norme sur E et sa restriction à F).
Restons sur F. La boule ouverte **dans** F de centre $x \in F$ et de rayon $r > 0$ sera

$$B_F(x, r) = \left\{y \in F\ ;\ \|y - x\| < r\right\}$$

Rien de bien compliqué, sauf que cette boule n'est pas ouverte dans E, d'ailleurs, dans E, elle ne ressemble pas du tout à une boule. On voit ici tout simplement les difficultés posées par la « topologie induite » (terminologie hors-programme). On dira que $B_F(x, r)$ est un ouvert « relatif » de F. Ou, tout simplement, un ouvert **de** F. Remarquons que

$$B_F(x, r) = F \cap B(x, r)$$

où comme d'habitude $B(x, r)$ désigne la boule de centre x et de rayon r dans E.

IX.2 Distance induite sur une partie quelconque d'un evn

Même remarque que le paragraphe précédent.

Si A est une partie de E qui n'est pas un sous-espace vectoriel, restreindre $\|.\|$ à A n'a pas vraiment d'intérêt car les propriétés de la norme ne peuvent pas être écrites en restant dans A ($\|\lambda x\| = \ldots$, $\|x + y\| \leq \ldots$). En revanche on peut restreindre la distance d (associée à $\|.\|$) à $A \times A$, et elle a toujours les propriétés d'une distance :
$d(x, y) \geq 0$
$d(x, y) = d(y, x)$

$d(x,y)=0 \iff x=y$
$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z)$
(rappelons que la définition d'une distance comme application vérifiant ces conditions n'est pas au programme). Et rien n'empêche de définir les boules comme pour un sous-espace vectoriel.

IX.3 Notation

Si A est une partie de l'espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$, si $a\in A$, si $r>0$, on notera

$$B_A(a,r)=A\cap B(a,r)=\{x\in A\ ;\ \|x-a\|<r\}$$

IX.4 Voisinages « relatifs »

Définition Soit A une partie (non vide) d'un espace vectoriel normé $(E,\|.\|)$. Soit $a\in A$. Un « voisinage relatif » de a dans A est une partie V de A vérifiant :

$$\exists r>0 \quad B_A(x,r)\subset V$$

ou encore

$$\exists r>0 \quad \forall x\in A \quad \|x-a\|<r \implies x\in V$$

Vocabulaire Un « voisinage relatif » de a dans A est parfois appelé un voisinage de a pour la topologie induite sur A, ou un voisinage **dans** A de a.

Caractérisation Les voisinages relatifs de a dans A sont les intersections avec A des voisinages de a. Plus précisément : soit V une partie de A, a un élément de A. Alors V est un voisinage de a **dans** A si et seulement si il existe un voisinage W de a (sous-entendu dans E) tel que $V=W\cap A$.

Autrement dit : les voisinages de a **dans** A sont les intersections avec A des voisinages de a (dans E).

Exemple : On retrouve surtout le fait que $B_A(a,r)=A\cap B(a,r)$ $(r>0)$ est un voisinage relatif de a dans A, car $B(a,r)$ est un voisinage de a dans E.

IX.5 Ouverts « relatifs »

Définition Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, B une partie de A. On dit que B est ouvert relatif dans A lorsqu'il est voisinage de chacun de ses points dans A.
Autrement dit lorsque, pour tout $b \in B$, il existe $r > 0$ tel que $B_A(b, r) \subset B$.
Autrement dit encore, B est ouvert relatif de A si et seulement si, pour tout $b \in B$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall a \in A \qquad (\|b - a\| < \delta) \implies (a \in B)$$

Proposition Les ouverts relatifs de A sont les intersections avec A des ouverts de E.

Cette proposition est plus utilisée que la définition.

Exemple Dire si les parties suivantes sont des ouverts de $[0, 1]$:
$[0, 1]$, $\{0\}$, $[0, 1/2]$, $[0, 3/4[$, $[0, 1] \setminus [1/2, 3/4]$, $]0, 1[$, $]0, 1/2[$.

Cas particulier simple Si A est un ouvert (de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$), une partie B de A est un ouvert relatif de A si et seulement si

Vocabulaire On dit plutôt « ouvert **dans** A » ou « ouvert **de** A » : le terme « relatif », quoiqu'au programme, n'est guère usité.

IX.6 Fermés « relatifs », caractérisation séquentielle

Définition Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, B une partie de A. On dit que B est un fermé relatif dans A lorsque $A \setminus B$ est ouvert relatif dans A.

Proposition Les fermés relatifs de A sont les intersections avec A des fermés de E.

Caractérisation B est fermé relatif dans A si et seulement si pour toute suite (b_n) d'éléments de B convergeant dans A, $\lim(x_n) \in B$.

Cas particulier simple Si A est une partie fermée de l'espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, si B est une partie de A, B est un fermé relatif de A si et seulement si

Exemple $]-\infty, 0[$ est-il ouvert relatif de $\mathbf{R}_*$? est-il fermé relatif de $\mathbf{R}_*$?

Soit, dans $E = \mathbf{R}^2$, $a = (1,1)$, $0_E = (0,0)$, et soit $A = B(0_E, 1/4) \cup B(a, 1/4)$ (boules ouvertes comme la notation l'indique). Trouver 4 parties de A qui sont à la fois des ouverts relatifs et des fermés relatifs de A.

IX.7 Densité de B dans A

La partie B de A est dite dense dans A lorsque tout élément de A est limite d'une suite d'éléments de B.
Par exemple, $\mathbf{Q} \cap [0,1[$ est dense dans $[0,1[$.

Table des matières