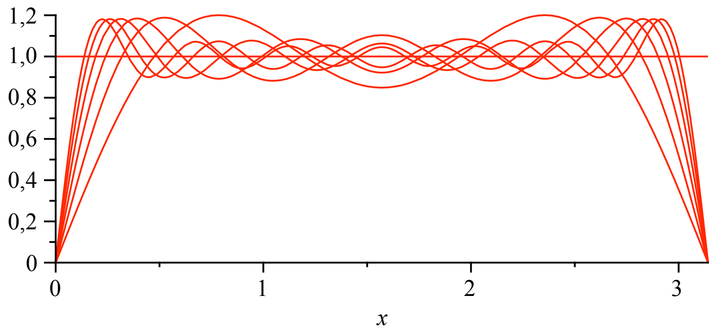
T2 : Espaces vectoriels normés



Le phénomène de Gibbs pour une fonction créneau. Il est beaucoup plus facile pour une série de Fourier de converger en moyenne quadratique (norme N_2) qu'uniformément (norme N_∞) : ces deux normes ne sont pas « équivalentes »

Ce chapitre est surtout un recueil de définitions, qu'il faut bien connaître car elles seront fréquemment utilisées en analyse. La notion de limite (d'une suite, d'une fonction...) est centrale en Analyse. On peut commencer par définir la convergence d'une suite de réels. Puis, plus généralement, on conçoit que « la suite (u_n) converge vers ℓ » lorsque la « distance » de u_n à ℓ tend vers 0. Le tout est donc de définir une notion de distance (entre deux éléments). Dans un espace vectoriel, le plus simple est de définir la « longueur » d'un vecteur, qu'on appellera sa norme. La distance entre deux vecteurs a et b sera alors la norme de leur différence $b-a$.

I Norme sur un espace vectoriel ; distance associée

I.1 Définitions

a. Norme sur un espace vectoriel

On note **K** le corps **R** ou **C**. On désigne par E un espace vectoriel sur le corps **K** (i.e. un **K**-espace vectoriel).
On appelle **norme** sur E une application $N: E \to \mathbf{R}$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E \quad N(x) \geq 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall x \in E \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (H)
3. $\forall (x, y) \in E^2 \qquad N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ (I.T.)
4. $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

$(x = 0_E \Rightarrow N(x) = 0)$ découle de 2. ; 4. est donc une équivalence.
Si on aime les astuces, on peut chercher pourquoi 1. est redondante…néanmoins, quand on doit montrer qu'une application est une norme, on commence par montrer qu'elle est bien définie (dans certains cas ce peut être non évident), et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$.
(H) est l'homogénéité, (I.T.) est l'inégalité triangulaire.

On dit que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

b. Exercice - avertissement

Exercice : Montrer que

$$N : P \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} |P(t)| \, \mathrm{d}t$$

définit une norme sur $\mathbf{K}[X]$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$).

c. Distance associée à une norme

On reprend les notations du paragraphe précédent ; on appelle **distance** associée à N l'application d définie sur E^2 par

$$d(x, y) = N(x - y)$$

Elle vérifie les propriétés suivantes :

1. $d(x, y) \geq 0$
2. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $d(x, y) = d(y, x)$
4. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

(pour tous x, y, z dans E).

Remarque h.p : on peut définir sur un espace vectoriel une distance comme une application qui vérifie les quatre propriétés ci-dessus. Une distance ne découle pas nécessairement d'une norme. Un espace muni d'une distance est appelé espace métrique. Les espaces vectoriels normés sont donc des espaces métriques particuliers.

I.2 Exemples : les trois normes usuelles sur $\mathbf{K}^n$

Proposition : On définit, pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n$,

$$N_1(x) = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad , \quad N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad , \quad N_\infty(x) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

On définit ainsi trois normes sur $\mathbf{K}^n$

Remarque : Pour $n = 1$, on voit qu'il n'y a qu'une norme usuelle sur $\mathbf{K}$. Les autres normes sur $\mathbf{K}$ sont d'ailleurs les $\lambda|.|$, $\lambda > 0$.

Démonstration : Pour N_1 et N_∞, ce n'est pas compliqué. Mais pour N_2, l'inégalité triangulaire n'est pas si facile. . .à voir plus loin.

I.3 Exemples : normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$

Proposition : Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbf{R}$, avec $a<b$. On note $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$ l'espace des fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$. On définit, pour $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$,

$$N_1(f) = \int_a^b |f| \quad , \quad N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f|^2} \quad , \quad N_\infty(f) = \sup_{[a,b]} |f|$$

On définit ainsi trois normes sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$.

Démonstration : On commence par remarquer que $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

I.4 Cas particulier : normes euclidiennes

Les espaces préhilbertiens réels sont étudiés dans le chapitre Ab1.

a. Produit scalaire sur un R-espace vectoriel

Définition Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On appelle produit scalaire sur E toute application

$$\begin{array}{rccc} (.|.) : & E\times E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (x|y) \end{array}$$

bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire vérifiant les propriétés suivantes :

1. $\forall (x,y_1,y_2)\in E^3 \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad (x|y_1+\lambda y_2) = (x|y_1)+\lambda(x|y_2)$
2. $\forall (x_1,x_2,y)\in E^3 \quad \forall \lambda \in \mathbf{R} \quad (x_1+\lambda x_2|y) = (x_1|y)+\lambda(x_2|y)$
3. $\forall (x,y)\in E^2 \quad (y|x) = (x|y)$
4. $\forall x\in E \quad (x|x)\in \mathbf{R}^+$
5. $(x|x) = 0 \Longrightarrow x = 0_E$

Un $\mathbf{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé espace préhilbertien réel.

b. Deux exemples à connaître

A deux éléments quelconques $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ de $\mathbf{R}^n$, on associe

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

On définit ainsi un produit scalaire, appelé produit scalaire canonique sur $\mathbf{R}^n$.

A deux éléments quelconques f et g de l'espace des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs réelles, on associe

$$(f|g) = \int_{[a,b]} fg$$

On définit ainsi un produit scalaire (si $a < b$) sur $\mathscr{C}([a, b], \mathbf{R})$.

c. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit x, y deux éléments d'un espace préhilbertien réel E, λ un nombre réel quelconque. On sait qu'alors

$$(x + \lambda y|x + \lambda y) \in \mathbf{R}^+$$

ce qui donne, en développant par bilinéarité et en utilisant la symétrie,

$$\lambda^2 (y|y) + 2\lambda(x|y) + (x|x) \geq 0$$

Si y n'est pas nul, on obtient un trinôme du second degré qui garde un signe constant sur $\mathbf{R}$. Son discriminant est donc négatif ou nul, ce qui s'écrit

$$(x|y)^2 - (x|x)(y|y) \leq 0$$

ou encore

$$\left|(x|y)\right| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}\ .$$

Cette inégalité, appelée inégalité de Cauchy-Schwarz, est encore vraie si y est nul (c'est alors une égalité).

Remarque : ne pas écrire Schwartz. . .cette démonstration fait partie de la liste ccp. Il y a une version plus astucieuse. . .voir paragraphe précédent.

d. Une démonstration simple

Si x ou y est nul, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est, évidemment, une égalité. Supposons donc x et y non nuls. Développons, si $\epsilon = \pm 1$,

$$\left\| \frac{1}{\|x\|} x + \epsilon \frac{1}{\|y\|} y \right\|^2$$

On obtient du même coup l'inégalité et les cas d'égalité.
Cette démonstration, attribuée à Paul Halmos, est assez peu connue en France, l'expérience montre qu'il est difficile de convaincre certains examinateurs d'oral lorsqu'on sort des méthodes habituelles, il n'est pas recommandé de l'utiliser.

e. Norme associée à un produit scalaire

De l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on déduit que, pour tout couple (x, y) d'éléments de E,

$$\begin{aligned}
(x + y|x + y) &= (x|x) + (y|y) + 2(x|y) \\
&\leq (x|x) + (y|y) + 2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} \\
&\leq \left(\sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)}\right)^2
\end{aligned}$$

et finalement :

$$\sqrt{(x + y|x + y)} \leq \sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)} \; .$$

L'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x|x)}$ est donc une application de E dans $\mathbf{R}^+$ vérifiant les propriétés suivantes (pour tous x et y dans E, λ dans $\mathbf{R}$) :

$\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
$\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0_E$
C'est donc une norme sur E. Un espace préhilbertien réel est donc muni d'une structure d'espace vectoriel normé, la norme précédente est dite associée au produit scalaire ; on parle alors de **norme euclidienne**.

f. Cas particulier des normes N_2

On a défini, pour $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

$$N_2(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2}$$

C'est une norme sur $\mathbf{R}^n$, associée au produit scalaire canonique. C'est donc la norme euclidienne canonique.
De même,

$$N_2(f) = \sqrt{\int_a^b |f|^2}$$

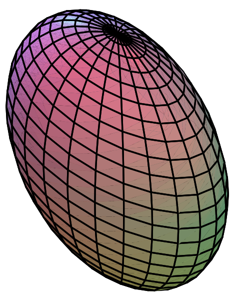
définit une norme euclidienne sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{R})$ $(a<b)$, associée au produit scalaire

$$(f|g) = \int_{[a,b]} fg$$

g. Cas des espaces vectoriels complexes ($\mathbf{K}=\mathbf{C}$)

On peut définir un « produit scalaire hermitien » sur un **C**-espace vectoriel, mais ce n'est pas nécessaire pour montrer que les normes N_2 définies ci-dessus sont encore des normes si on remplace **R** par **C**.

I.5 Boules ouvertes, boules fermées, sphères



Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N ; on note d la distance associée.

La **boule ouverte** de centre x $(x\in E)$ et de rayon r $(r>0)$ est

$$B(x,r) = \{y\in E \ / \ d(x,y)<r\}$$

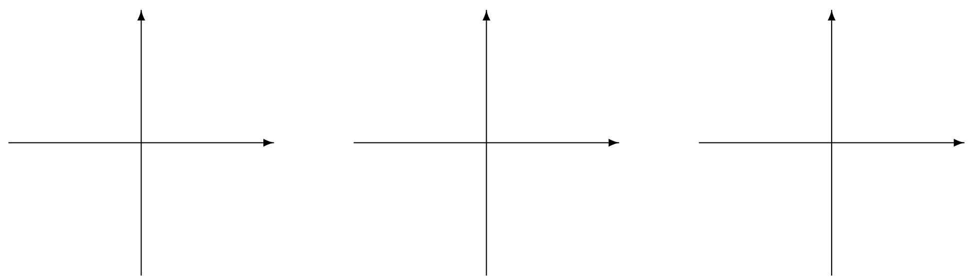
La **boule fermée** de centre x $(x\in E)$ et de rayon r $(r\geq 0)$ est

$$B'(x,r) = \{y\in E \ / \ d(x,y)\leq r\}$$

La **sphère** de centre x ($x \in E$) et de rayon r ($r \geq 0$) est

$$S(x,r) = \{y \in E \ / \ d(x,y) = r\}$$

En particulier, un singleton $\{x\}$ est une boule fermée de rayon 0 (c'est aussi une sphère).
Les propriétés des normes font que deux boules ouvertes (resp. deux boules fermées, deux sphères) se déduisent l'une de l'autre par composition d'une homothétie et d'une translation.
On peut par exemple dessiner les sphères pour les normes usuelles dans $\mathbf{R}^n$ ($n = 2,3$).



Proposition Toute boule est convexe : si B est une boule (ouverte ou fermée), si $(x,y) \in B^2$, alors

$$\forall t \in [0,1] \qquad tx + (1-t)y \in B$$

I.6 Parties bornées, applications bornées

a. Parties bornées

Définition : Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. On dit que A est bornée lorsqu'il existe $M \geq 0$ tel que

$$\forall x \in A \qquad \|x\| \leq M$$

Cela signifie qu'il existe une boule qui contient A.

Remarque : Pour montrer qu'une partie A de $\mathbf{R}$ est bornée, on a le choix entre

— Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que

$$\forall x \in A \qquad a \leq x \leq b$$

— ou montrer qu'il existe un réel M (qui sera nécessairement positif) tel que

$$\forall x \in A \qquad |x| \leq M$$

La seconde méthode est bien préférable : une lettre au lieu de deux, une écriture qui marche sur $\mathbf{C}$ telle quelle et sur n'importe quel evn en remplaçant $|.|$ par $\|.\|$... Bref, borner, c'est majorer en valeur absolue, ou en module, ou en norme.

Remarque : Une partie peut être bornée pour une norme et non bornée pour une autre norme ; par exemple, on peut munir l'espace $\mathbf{K}[X]$ de deux normes définies par, si $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$:

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{d} |a_k| \qquad N_\infty(P) = \max_{0 \leq k \leq d} |a_k|$$

Alors l'ensemble A des polynômes dont tous les coefficients sont égaux à 0 ou à 1 est borné pour la norme mais pas pour la norme . On verra qu'en dimension finie, une telle chose ne peut pas arriver. Mais si E n'est pas de dimension finie, il faut donc dire « A est bornée pour la norme N » ou « A est bornée dans (E, N) ».

Remarque : Pour montrer qu'une partie n'est pas bornée, on peut trouver une suite (x_n) d'éléments de cette partie telle que la suite $(\|x_n\|)$ tende vers $+\infty$. Ou, pour tout réel M, montrer qu'il existe un élément x de la partie tel que $\|x\| > M$.

b. Applications bornées

Définition Soit X un ensemble (non vide), (E, N) un espace vectoriel normé. On dit qu'une application $f : X \to E$ est bornée lorsqu'il existe M tel que

$$\forall x \in X \qquad N\big(f(x)\big) \leq M$$

Ce qui revient à dire que l'ensemble des valeurs prises par f, c'est-à-dire l'ensemble $f(X) = \{f(x)\ ;\ x \in X\}$, est borné.

Vocabulaire Soit Y une partie de X. Si la restriction de f à Y est bornée, on dit que f est bornée sur Y.

c. Evn des applications bornées

Proposition - Définition Soit X un ensemble (non vide), $(E, \|.\|)$ un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé. On note $\mathscr{B}(X,E)$ l'ensemble des applications bornées de X dans E. Si $f \in \mathscr{B}(X,E)$, l'ensemble $\{\|f(x)\|\ ;\ x \in X\}$ est non vide majoré, et admet donc une borne supérieure. On note $N_\infty(f)$ cette borne supérieure :

$$N_\infty(f) = \mathrm{Sup}\Big(\{\|f(x)\|\ ;\ x \in X\}\Big) = \mathop{\mathrm{Sup}}_{x \in X}\Big(\|f(x)\|\Big) = \mathop{\mathrm{Sup}}_{X}\big(\|f\|\big)$$

Alors

$$\big(\mathscr{B}(X,E), N_\infty\big) \text{ est un } \mathbf{K}\text{-espace vectoriel normé}$$

Remarquons que X est un ensemble quelconque ; en particulier, on peut prendre $X = \mathbf{N}$, ce qui permet de définir des espaces vectoriels normés de suites bornées, voir plus loin.

I.7 Vecteur unitaire associé à un vecteur non nul

Définition : Si x est un vecteur non nul de E, le vecteur unitaire associé à x est $\frac{1}{\|x\|}x$.

Remarque d'écriture : Dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, si $\lambda \in \mathbf{K}$ et $x \in E$, on définit $\lambda.x$, que l'on note souvent λx en omettant le . de la loi externe. En particulier, si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ on définit $\frac{1}{2}x$. Le noter $\frac{x}{2}$ est un abus de notation assez peu gênant en général, mais qui le devient dans certains cas particuliers ; par exemple, si E est un espace vectoriel de matrices, on note assez peu $\frac{A}{2}$ où A est une matrice ($\frac{1}{2}A$ est préférable). Néanmoins, même s'il est plus orthodoxe et plus prudent de noter $\frac{1}{\|x\|}x$, la notation $\frac{x}{\|x\|}$ est utilisée dans de nombreux énoncés et risque peu de choquer un correcteur.

I.8 Distance d'un point à une partie non vide

Définition : Soit A une partie non vide de E, x un élément de E. On définit la distance de x à A :

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a)\ ;\ a \in A\}$$

Comme on le verra plus loin, $d(x,A) = 0$ ne signifie pas que $x \in A$, mais plutôt $x \in \overline{A}$ (adhérence de A, voir chapitre sur la topologie des evn.

I.9 Applications lipschitziennes

a. Définition

Soit f une application définie sur une partie A d'un evn (E,N), à valeurs dans un evn $(F,\|.\|)$. On dira que f est k-lipschitzienne ($k \in \mathbf{R}^+$) lorsque :

$$\forall (x,y) \in A^2 \quad \|f(x) - f(y)\| \leq kN(x-y)$$

On dira que f est lipschitzienne lorsqu'il existe un $k \geq 0$ pour lequel elle est k-lipschitzienne.

Donc, si la distance de x à y est « petite », la distance de $f(x)$ à $f(y)$ est « petite » : une application lipschitzienne est continue, elle est même uniformément continue : voir plus loin

b. Exemple : la norme

Proposition : Soit (E,N) un $\mathbf{K}$-evn. Alors l'application $N : E \to \mathbf{R}$ est 1-lipschitzienne.

c. Exemple : $x \mapsto d(x,A)$

Proposition : Soit (E,N) un $\mathbf{K}$-evn, A une partie non vide de E. Alors l'application

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & d(x,A) \end{array}$$

est 1-lipschitzienne.

Exercice de style sur les bornes inférieures. D'un intérêt moyen, mais on peut le retrouver dans un énoncé...

d. Exemple : applications C^1 sur un segment

Proposition : Soit f une application de classe C^1 sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, telle que f' soit bornée. Alors f est lipschitzienne.

En particulier, une application de classe C^1 sur un segment est lipschitzienne.

e. Opérations sur les applications lipschitziennes

Rien n'est au programme à ce sujet, il faudra donc savoir démontrer des choses pas trop techniques. Par exemple :

Exercice : Une combinaison linéaire, une composée d'applications lipschitziennes est lipschitzienne.
Exercice : Si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, elle est lipschitzienne sur $[a,c]$.

II Suites dans un evn; équivalence des normes

II.1 Convergence, divergence des suites

a. Définitions

Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$. On dit que la suite (x_n) a pour limite $\ell \in E$ lorsque la suite $\left(\|x_n - \ell\|\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0, ou encore lorsque la suite $\left(d(x_n, \ell)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

$$\left(x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\right) \Longleftrightarrow \left(\|x_n - \ell\| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right)$$

Si une suite a une limite, elle n'en a qu'une (autrement dit : la limite, si elle existe, est unique). On dit que la suite converge (ou : est convergente).
Une suite divergente est une suite qui n'a pas de limite, autrement dit une suite qui ne converge pas.

b. Ecriture avec quantificateurs

(x_n) converge vers ℓ si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbf{N} \qquad \forall n \geq N \quad \|x_n - \ell\| \leq \epsilon$$

c. Interprétation géométrique

« (x_n) a pour limite ℓ » équivaut à « pour toute boule centrée en ℓ de rayon non nul, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite (x_n) restent dans cette boule » (que la boule soit ouvert ou fermée n'importe pas; ne pas oublier qu'il faut que le rayon soit non nul).

d. Convergence(s) dans $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$, i.e. une suite de fonctions continues sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbf{K}$. Soit f un élément de $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$.

On dit que (f_n) converge vers f **en moyenne** lorsque (f_n) converge vers f pour la norme N_1, i.e. lorsque

$$\int_a^b |f_n - f| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On dit que (f_n) converge vers f **en moyenne quadratique** lorsque (f_n) converge vers f pour la norme N_2, i.e. lorsque

$$\int_a^b |f_n - f|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On dit que (f_n) converge vers f **uniformément** sur $[a, b]$ lorsque (f_n) converge vers f pour la norme N_∞, i.e. lorsque

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cette dernière définition peut s'écrire :

$$\forall \epsilon > 0 \qquad \exists N \in \mathbf{N} \qquad \forall n \geq N \qquad \forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

II.2 Opérations

a. Combinaison linéaire de suites convergentes

Dans un espace vectoriel quelconque, il n'y a pas en général de produit, de quotient…On se contentera donc, pour tout résultat sur les suites convergentes, de :

Proposition Si (u_n) et (v_n) convergent dans l'espace vectoriel normé (E, N) respectivement vers ℓ et ℓ', si α et β sont deux éléments de $\mathbf{K}$, alors la suite $(\alpha u_n + \beta v_n)$ converge vers $\alpha\ell + \beta\ell'$.

Démonstration Il suffit d'écrire l'inégalité triangulaire et l'homogénéité :

$$N\big(\alpha u_n + \beta v_n - \big(\alpha\ell + \beta\ell'\big)\big) \leq |\alpha| N(u_n - \ell) + |\beta| N(v_n - \ell')$$

et ainsi on se ramène à un résultat connu sur les suites réelles : une combinaison linéaire de suites réelles qui converge vers 0 converge vers 0.

b. Produit d'une suite vectorielle par une suite scalaire

Proposition Si (u_n) converge vers ℓ dans le $\mathbf{K}$-espace vectoriel normé $(E, \|.\|)$, si (λ_n) converge vers α dans $\mathbf{K}$, alors

$$\lambda_n u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \alpha \ell$$

Proposition Si $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0_E$ et (λ_n) est bornée, ou si $\lambda_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0_E$ et (u_n) est bornée, alors

$$\lambda_n u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0_E$$

II.3 Convergence et bornitude

Proposition toute suite convergente est bornée.

II.4 Comparaison de normes ; normes équivalentes

a. Introduction

Soit N, $\|.\|$ deux normes sur un espace vectoriel E. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$N \leq \alpha \|.\|$$

ce qui signifie que

$$\forall x \in E \qquad N(x) \leq \alpha \|x\|$$

Il est alors simple de voir que, si une suite $(u_n)_n$ d'éléments de E converge vers une limite $\ell \in E$ pour , elle converge aussi vers ℓ pour .
Etudions la réciproque par contraposée : supposons qu'il n'existe pas de $\alpha > 0$ tel que

$$N \leq \alpha \|.\|$$

Alors, pour tout $\alpha > 0$, il existe $x \in E$ tel que

$$N(x) > \alpha \|x\|$$

Comme il est question de suites, écrivons ce résultat pour $\alpha \in \mathbf{N}_*$: pour tout $n \in \mathbf{N}_*$, il existe $x_n \in E$ tel que

$$N(x_n) > n \|x_n\|$$

On peut construire alors à partir de la suite (x_n) une suite qui converge vers 0_E pour la norme $\|.\|$ mais pas pour la norme N.
On a ainsi montré que la propriété

> $(\mathscr{P})$ « pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de E, si (u_n) converge vers la limite ℓ pour la norme $\|.\|$, alors (u_n) converge vers la limite ℓ pour la norme N »

est équivalente à la propriété

> $(\mathscr{Q})$ « Il existe $\alpha > 0$ tel que $N \leq \alpha\|.\|$ »

b. Normes équivalentes

Définition On dit que les deux normes N et $\|.\|$ sur E sont équivalentes lorsqu'il existe deux constantes $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ telles que

$$N \leq \alpha\|.\| \qquad \text{et} \qquad \|.\| \leq \beta N$$

c'est-à-dire telles que

$$\forall x \in E \qquad N(x) \leq \alpha\|x\| \qquad \text{et} \qquad \|x\| \leq \beta N(x)$$

Proposition Si deux normes N et $\|$ sont équivalentes, alors, pour toute suite $(u_n)_n$ d'éléments de E, pour tout $\ell \in E$,
« $(u_n)_n$ converge vers ℓ pour N » équivaut à « $(u_n)_n$ converge vers ℓ pour $\|.\|$ »

c. Comparer deux normes

Comparer N et N', c'est regarder s'il existe α tel que $N \leq \alpha N'$ et regarder s'il existe β tel que $N' \leq \beta N'$.
Pour montrer qu'il existe α tel que $N \leq \alpha N'$, on trouve un tel α, ou on dit qu'on est en dimension finie, ce qui résout tout (voir plus loin).
Pour montrer qu'il n'existe pas un tel α, on cherche le plus souvent une suite (x_n) d'éléments tels que $N'(x_n)$ reste à peu près constant alors que $N(x_n)$ tend vers $+\infty$.

d. Comparaison des normes usuelles sur $\mathbf{K}^n$

Elles sont équivalentes...et il y a même mieux :

e. Cas de la dimension finie

Proposition Sur un espace de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

Démonstration dans le chapitre sur la compacité. Dans un espace de dimension finie, la phrase « $(u_n)_n$ converge vers ℓ » a donc un sens intrinsèque, indépendant du choix d'une norme, ce qui conforte notre intuition géométrique.

f. Convergence d'une suite en dimension finie

Proposition (caractérisation par les composantes) Soit $(e_1,\dots,e_p)$ une base d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in E^{\mathbf{N}}$. On note, pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$u_n = \sum_{k=1}^{p} u_n^{(k)} e_k$$

Soit $\ell = \sum_{k=1}^{p} \ell_k e_k \in E$. Alors

$$\left(u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\right) \Longleftrightarrow \left(\forall k\in[\![1,p]\!] \quad u_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k\right)$$

Le résultat qui dit qu'une suite complexe converge si et seulement si les suites des parties réelles et des parties imaginaires convergent est un cas particulier de ce résultat plus général.

g. Comparaison des normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$

Elles ne sont pas équivalentes, mais elles sont « classables ».

h. Un autre exemple

La comparaison des normes usuelles sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbf{K})$ est à comprendre et à connaître, mais il est intéressant aussi de comprendre la comparaison suivante :
Exercice : Montrer que l'application

$$N\ :\ f\longmapsto |f(0)|+\sup_{x\neq y}\left(\frac{|f(y)-f(x)|}{|x-y|}\right)$$

définit une norme sur l'espace vectoriel des applications lipschitiziennes sur $[0,1]$, à valeurs réelles. La comparer à $\|.\|_\infty$.

i. Interprétation géométrique (boules)

III Un exemple « frappant » de non équivalence

(Posé à l'écrit CCP 2016)

1. Montrer que l'application

$$N\ :\ P \longmapsto \sup_{x\in[-2,-1]} \left(\left|\widetilde{P}(x)\right|\right)$$

définit une norme sur $\mathbf{R}[X]$.
On démontre de même (on ne demande pas de l'écrire) que

$$N'\ :\ P \longmapsto \sup_{x\in[1,2]} \left(\left|\widetilde{P}(x)\right|\right)$$

définit une norme sur $\mathbf{R}[X]$.

2. On considère l'application f définie sur $[-2,2]$ par

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad -2 \leq x < -1 \\ x & \text{si} \quad -1 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Justifier l'existence d'une suite de fonctions polynômes convergeant uniformément vers f sur $[-2,2]$.

3. Montrer l'existence d'une suite d'éléments de $\mathbf{R}[X]$ convergeant pour N et N' vers deux limites distinctes.

IV Espace $\ell^\infty(\mathbf{N},\mathbf{K})$

Définition On note parfois $\ell^\infty(\mathbf{N},\mathbf{K})$ l'espace des suites bornées d'éléments de $\mathbf{K}$, c'est-à-dire l'espace vectoriel normé $\mathscr{B}(\mathbf{N},\mathbf{K})$, muni de la norme usuelle définie par $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbf{N}} |u_n|$.

On note aussi usuellement $\ell^1(\mathbf{N},\mathbf{K})$ l'espace des suites sommables d'éléments de $\mathbf{K}$, i.e. l'espace des suites u telles que $\sum |u_n|$ converge. On le munit de la norme définie par $\|u\|_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. On devine ce que peut être $\ell^2(\mathbf{N},\mathbf{K})$. Mais comme c'est un espace préhilbertien (il y a un produit scalaire), voir plus loin.

V Espace vectoriel normé produit

V.1 Norme sur un produit d'espaces vectoriels normés

On considère p espaces vectoriels normés (E_i, N_i) sur le corps $\mathbf{K}$. Si $x = (x_1,\dots,x_p)$ est un élément de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, on définit

$$N(x) = \max_{1\le i\le p} N_i(x_i)$$

N est alors une norme sur $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$; l'espace vectoriel normé $(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p, N)$ est appelé espace vectoriel normé produit des $(E_i, N_i)_{1\le i\le p}$.

V.2 Remarque

La norme construite ci-dessus a la propriété suivante :
Soit (x_n) une suite d'éléments de $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$, on peut écrire pour tout n

$$x_n = \left(x_n^{(1)},\dots,x_n^{(p)}\right)$$

Alors la suite (x_n) converge vers $(\ell_1,\dots,\ell_p)$ si et seulement si, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$,

$$x_n^{(k)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_k$$

ce qui est bien naturel. Ce n'était pas le seul choix possible : remplacer max par + marche bien.

Table des matières