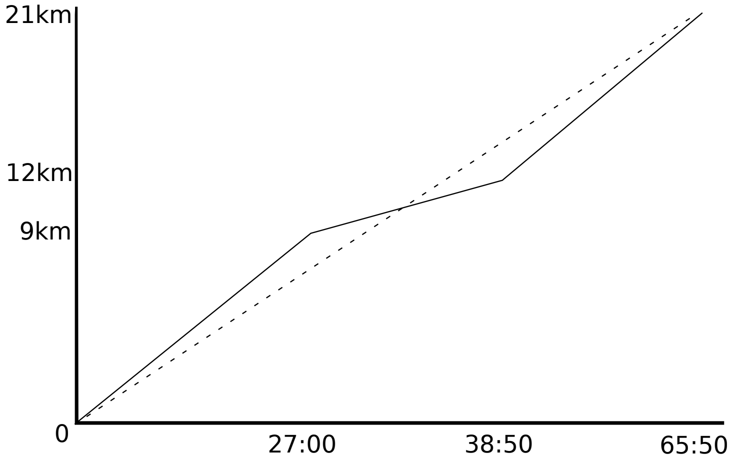
T1 : Limites, continuité (fonctions numériques d'une variable réelle)



Si un (demi-)marathonien parcourt 21 km en 66 minutes, il y a au moins un intervalle de temps de 22 minutes pendant lequel il a parcouru exactement 7 km. Il n'y a pas forcément un intervalle de temps de 44 minutes pendant lequel il a parcouru exactement 14 km (problème des cordes universelles, Paul Levy).

A peu près tous les résultats de ce chapitre sont très couramment utilisés.

I Rappel : au voisinage de...

On dit qu'une propriété est vraie au voisinage de $a \in \mathbf{R}$ lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que la propriété soit vraie au moins sur $[a-\delta, a+\delta]$.
On dit qu'une propriété est vraie au voisinage de $+\infty$ lorsqu'il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que la propriété soit vraie au moins sur $[A, +\infty[$.

II Limites de fonctions numériques : définitions

$$f \ : \ I \subset \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} \text{ ou } \mathbf{C}$$

On désigne par f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. *On dit qu'une telle fonction est « numérique » car les valeurs qu'elle prend sont des nombres, réels ou complexes. Par opposition par exemple à une fonction vectorielle, qui prend ses valeurs dans un espace de vecteurs.*

II.1 Limite finie en un point fini

Soit a un nombre réel. On suppose que a est un élément de I ou une borne de I (*On dira plus tard que a est dans « l'adhérence » de I*). Soit b un nombre réel ou complexe.

Définition : On dit que f a pour limite b en a lorsque :

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad \Big(|x-a| \leq \delta \Big) \implies \Big(|f(x) - b| \leq \epsilon \Big)$$

Autrement dit, à peu près, $f(x)$ est aussi proche de b que l'on veut si l'on impose à x de rester suffisamment proche de a.

Rédaction Si on doit montrer qu'une fonction f est continue en a en utilisant cette phrase avec quantificateurs (ce qui n'est pas fréquent) on commence en général par écrire « Soit $\epsilon > 0$ ». On rajoute parfois « fixé, quelconque » (quelconque, mais > 0 !), mais ce n'est pas nécessaire.

Remarque Si δ convient pour ϵ, il convient aussi pour tout $\epsilon' > \epsilon$. L'existence de δ est donc une condition d'autant plus exigeante que ϵ est petit.

Question Les énoncés

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad \Big(|x-a| \le \delta\Big) \Longrightarrow \Big(|f(x)-b| \le \epsilon\Big) \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}_* \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad \Big(|x-a| \le \delta\Big) \Longrightarrow \Big(|f(x)-b| \le \frac{1}{n}\Big) \tag{2}$$

$$\forall n \in \mathbf{N}_* \quad \exists p \in \mathbf{N}_* \quad \forall x \in I \quad \Big(|x-a| \le \frac{1}{p}\Big) \Longrightarrow \Big(|f(x)-b| \le \frac{1}{n}\Big) \tag{3}$$

sont-ils équivalents ?

Négation Ecrire la négation de (1).

II.2 Limite finie en $\pm\infty$

On ne devrait pas dire « on suppose que $+\infty$ est une borne de I »...mais on le dit quand même. Il vaudrait mieux dire « supposons que I ne soit pas majoré ». Soit b un nombre réel ou complexe.

Définition : On dit que f a pour limite b en $+\infty$ lorsque

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists A \in \mathbf{R} \quad \forall x \in I \quad \Big(x \ge A\Big) \Longrightarrow \Big(|f(x)-b| \le \epsilon\Big)$$

On définit de même une limite finie en $-\infty$ (l'écrire, bien sûr !).

II.3 Limite infinie en un point

Soit a un nombre réel qui est une borne de I. On suppose que f est à valeurs réelles.

Définition : On dit que f a pour limite $+\infty$ en a lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad \Big(|x-a| \le \delta\Big) \Longrightarrow \Big(f(x) \ge A\Big)$$

Question Pourquoi, si l'énoncé précédent est vérifié, a ne peut-il pas être dans I (i.e. f n'est pas définie en a) ?

Remarque Dans la pratique, on n'impose pas que I soit un intervalle. On utilise aussi beaucoup cette définition dans ce genre de situation :

$$\frac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$$

(la définition de la fonction est ici sur $\mathbf{R}\setminus\{0\}$, pas sur un intervalle donc mais sur une réunion de deux intervalles).

II.4 Limite infinie en $\pm\infty$

On suppose que $+\infty$ est une « borne » de I (bis : il serait plus correct de dire qu'on suppose I non majoré). On suppose ici que f est à valeurs réelles.

Définition : On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ lorsque

$$\forall A\in\mathbf{R}\quad \exists B\in\mathbf{R}\quad \forall x\in I\quad \Big(x\geq B\Big) \Longrightarrow \Big(f(x)\geq A\Big)$$

Les autres limites infinies (avec différentes combinaisons de signes) s'écrivent de manière analogue.
On remarquera (c'est utile dans la pratique) que, dans le cas où b est « fini », f a pour limite b en a si et seulement si $f(x)-b$ a pour limite 0 en a.

II.5 Continuité

Définition : On dit que f est continue en a (a étant un point de I) lorsque f a pour limite $f(a)$ en a, ce qui s'écrit simplement

$$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} f(a)$$

ce qui revient à dire que f a une limite finie en a (la définition vue précédemment fait que cette limite, si elle existe, ne peut être qu'égale à $f(a)$). La définition de la continuité de f en a s'écrit donc :

$$\forall\epsilon>0\quad \exists\delta>0\quad \forall x\in I\quad \Big(|x-a|\leq\delta\Big) \Longrightarrow \Big(|f(x)-f(a)|\leq\epsilon\Big)$$

II.6 Partie réelle, partie imaginaire

Proposition : Soit $f\,:\,I\longrightarrow\mathbf{C}$, $a\in\overline{\mathbf{R}}$, soit $b\in\mathbf{C}$. Alors

$$f(x)\xrightarrow[x\to a]{} b \iff \Big[\mathrm{Re}\big(f(x)\big)\xrightarrow[x\to a]{}\mathrm{Re}(b)\quad\text{et}\quad \mathrm{Im}\big(f(x)\big)\xrightarrow[x\to a]{}\mathrm{Im}(b)\Big]$$

Remarque sur le parenthésage : on peut aussi bien écrire $\mathrm{Re}\big(f(x)\big)$ que $\mathrm{Re}(f)(x)$.

II.7 A droite, à gauche

a. Notations

Les $\lim\limits_{a^+}$ ou $\lim\limits_{x\to a^+}$ ne sont explicites que si $a \notin I$. Par exemple, doit-on dire

$$\lim_{x\to 1^-}(\lfloor x \rfloor) = 0 \qquad ?$$

c'est ambigu, car si on a bien

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}(\lfloor x \rfloor) = 0$$

en revanche $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x\leq 1}}$ n'existe pas.

b. En un mot

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\big(f(x)\big)$ est, si elle existe, la limite en a de la restriction de f à $]a,+\infty[$.
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\geq a}}\big(f(x)\big)$ est, si elle existe, la limite en a de la restriction de f à $[a,+\infty[$.
On définit identiquement les limites à gauche. Et f est continue à droite en a si et seulement si

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\big(f(x)\big) = f(a) \qquad \lim_{\substack{x\to a\\ x\geq a}}\big(f(x)\big) = f(a)$$

(rayer la mention inutile, ou encadrer « la » bonne écriture).

c. Avec des quantificateurs

$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\big(f(x)\big) = b$ s'écrit

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad \Big(a < x \leq a+\delta\Big) \Longrightarrow \Big(\big|f(x)-b\big| \leq \epsilon\Big)$$

d. Remarque

On n'écrit pas forcément $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}(\ln(x)) = +\infty$, on se contente en général d'écrire $\lim\limits_{x\to 0}(\ln(x)) = +\infty$

III Opérations

Pour les fonctions à valeurs réelles ou complexes, il y a beaucoup d'opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient. Pour les fonctions à valeurs vectorielles, on aura moins de résultats. Il faut savoir répondre aux questions suivantes :

1. Si f et g ont pour limites respectives b et c (éléments de $\mathbf{C}$) en a ($\in \mathbf{R} \cup \pm\infty$), que peut-on dire de $\alpha f + \beta g$?
2. Si f a pour limite $+\infty$ en a ($\in \mathbf{R} \cup \pm\infty$), si g a une limite finie ou a pour limite $+\infty$ en a, ou plus généralement si g est minorée au voisinage de a, que peut-on dire de $f + g$?
3. Si f et g ont pour limites respectives b et c ($\in \mathbf{C}$) en a ($\in \mathbf{R} \cup \pm\infty$), que peut-on dire de fg?
4. Si f et g ont pour limites respectives b et c ($\in \mathbf{C}$) en a ($\in \mathbf{R} \cup \pm\infty$), et si $c \neq 0$, que peut-on dire de f/g?
5. Si f a pour limite $+\infty$ en a ($\in \mathbf{R} \cup \pm\infty$), si g est minorée par un réel strictement positif au voisinage de a (ce qui est par exemple le cas si g a en a une limite strictement positive, finie ou infinie), que peut-on dire de fg?

IV Limites et comparaisons

IV.1 Limite nulle par majoration de |.|

Proposition Si $|f(x)| \leq g(x)$ au voisinage de a et si g a une limite nulle en a, alors f a aussi une limite nulle en a.

Une erreur classique est d'oublier les |.|

IV.2 Théorème d'encadrement

Proposition Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a, et si f et h ont même limite b en a, alors g a pour limite b en a *(on invoquera le théorème "des gendarmes" ou on dira "par encadrement")*.

IV.3 Passage des inégalités larges à la limite

Proposition Si $f(x) \leq g(x)$ au voisinage de a, si f et g ont des limites respectives b et c en a, alors $b \leq c$. On dit parfois que les inégalités larges passent à la limite. Les inégalités strictes ne passent pas telles quelles à la limite : elles deviennent larges.

V Composition

Proposition : Si f a pour limite b en a, si g a pour limite c en b, l'application $x \mapsto g(f(x))$ a pour limite c en a.

VI Deux résultats utiles

1. Une fonction qui admet une limite (finie, bien entendu) en un point est bornée au voisinage de ce point.
2. Une fonction f qui admet une limite strictement positive ℓ en un point a est minorée au voisinage de ce point par un réel strictement positif (par exemple, il existe $\eta > 0$ tel que, sur $[a-\eta, a+\eta]$, $f(x) \geq \frac{\ell}{2}$).

VII « Caractérisation séquentielle » des limites

Proposition : f a pour limite b en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n) \in I^{\mathbf{N}}$,

$$\left[u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a\right] \Longrightarrow \left[f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} b\right]$$

(dans l'énoncé de cette première proposition, a et b peuvent être « finis ou infinis »)

Proposition bis : f est continue en $a \in I$ si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui converge vers a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

Ces énoncés sont très utilisés. Leurs démonstrations sont intéressantes. Rien à voir avec les deux suivants, qu'on peut presque oublier (ils serviront très rarement), mais qui peuvent exceptionnellement être utiles :

Remarque : f a une limite (finie ou infinie) en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui a pour limite a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ a une limite, finie ou infinie.

Remarque bis : f a une limite finie en a si et seulement si, pour toute suite (u_n) d'éléments de I qui a pour limite a, la suite $\big(f(u_n)\big)$ converge.

On se contentera de remarquer que les preuves de ces remarques sont faciles mais un tout petit peu astucieuses.

♢ La proposition et la proposition bis ont un très grand intérêt : elles permettent de travailler sur les limites et la continuité des fonctions en se ramenant à des suites, ce qui est beaucoup plus simple. On peut ainsi se dispenser la plupart du temps de revenir aux énoncés « avec ϵ et η », qu'on cherche au maximum à éviter quand on parle de limites et de continuité. En effet, ce formalisme (dû entre autres à Weierstrass) est rigoureux mais pas si facile à manipuler.
♢ La propositions bis a déjà été utilisée pour l'étude des suites récurrentes : une suite est définie par son premier terme et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$; si l'on parvient à démontrer que la suite converge (par exemple en montrant qu'elle est croissante majorée, ou décroissante minorée, ou autre), et si sa limite est un point ℓ en lequel f est continue, alors ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$

VIII Limites de fonctions monotones

Ici, bien entendu (comme dès que l'on parle de + ou $-\infty$ ou de monotonie), les fonctions considérées sont d'une variable réelle **à valeurs réelles**.

Proposition : Soit f croissante sur $[a, b[$; si f est majorée sur $[a, b[$, alors f a une limite finie en b, et

$$\lim_b(f) = \operatorname*{Sup}_{[a,b[} f = \operatorname{Sup}\left(\{f(x)\ ;\ x \in [a, b[\}\right)\ ;$$

si f n'est pas majorée sur $[a, b[$, f a pour limite $+\infty$ en b.

On utilisera fréquemment (plus tard) le raisonnement suivant : On donne une fonction f (par exemple comme somme d'une série de fonctions), qui est croissante sur $[a, b[$, $a < b$. On veut montrer que f a pour limite $+\infty$ en b. Pour cela on raisonne par l'absurde : si f avait une limite finie ℓ en b, elle serait majorée par ℓ sur $[a, b[$. Et donc ses sommes partielles aussi, si par chance elle est somme d'une série de fonctions positives. Et donc. . .voir séries entières, séries de fonctions.

Proposition : Supposons que f soit croissante sur $]a, b]$; si f est minorée sur $]a, b]$, alors f a une limite finie en a, et

$$\lim_a(f) = \operatorname*{Inf}_{]a,b]} f\ ;$$

si f n'est pas minorée sur $]a, b]$, f a pour limite $-\infty$ en a.

Des énoncés analogues peuvent être écrits dans les cas de décroissance.

IX Fonctions continues sur des intervalles

Les fonctions sont ici encore **à valeurs réelles**.

Proposition : Si f est continue sur un intervalle I, sa restriction à tout intervalle J inclus dans I est également continue.

Proposition : Si f est continue sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, elle est continue sur $[a,c]$.

(Est-ce encore vrai si f est continue sur $[a,b[$ et sur $[b,c]$?)

Proposition (prolongement par continuité) : Si a est une borne (réelle, bien sûr) de I en laquelle f admet une limite finie b, on peut prolonger f par continuité en a en définissant $f(a) = b$.

Théorème des valeurs intermédiaires, formulation générale :
L'image d'un intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est un intervalle. Autrement dit, si $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et I est un intervalle, alors $f(I)$ est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires, formulation « pratique » :
Soit $(a,b) \in \mathbf{R}^2$. Si f est continue sur $[a,b]$, si d est un élément de $[f(a), f(b)]$, il existe un élément c de $[a,b]$ tel que $f(c) = d$.

Ce théorème sera généralisé dans le chapitre sur la connexité par arcs.

Théorème (image continue d'un segment, formulation générale) : L'image d'un segment par une fonction continue sur ce segment est un segment. Autrement dit, si $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ est continue et I est un segment, alors $f(I)$ est un segment.

Théorème (image continue d'un segment, conséquence « pratique ») : Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Dans le théorème sur l'image continue d'un segment, on ajoute au théorème des valeurs intermédiaires (qu'on a omis dans la conséquence pratique) un résultat qui sera généralisé dans le chapitre sur la « compacité ».

Théorème (de la « bijection monotone ») : Soit f une fonction continue sur un intervalle I, à valeurs réelles, strictement monotone. Soit J l'intervalle $f(I)$. Alors f est une bijection de I sur J, et la bijection réciproque f^{-1} est continue.

Théorème : Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.

Théorème (bis) : Soit f une fonction continue sur un intervalle. Elle est injective si et seulement si elle est strictement monotone.

Attention à ne pas oublier, dans les résultats précédents, le fait qu'on est sur un intervalle…

X Continuité uniforme

X.1 Définition

Soit f définie sur une partie A de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On sait que f est continue sur A si et seulement si

$$\forall a \in A \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in A \qquad |x-a| \leq \delta \implies |f(x)-f(a)| \leq \epsilon$$

Pour un a donné et un ϵ donné, il existe δ...qui dépend ainsi de a et de ϵ. Imposer qu'il ne dépende pas de ϵ n'est pas raisonnable (essayez de voir pourquoi!). En revanche, imposer qu'il ne dépende pas de a, c'est-à-dire qu'on puisse faire, pour un $\epsilon > 0$ donné, un choix de $\delta > 0$ uniforme en a, est intéressant. On dira donc que f est uniformément continue sur A lorsque

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall a \in A \quad \forall x \in A \qquad |x-a| \leq \delta \implies |f(x)-f(a)| \leq \epsilon$$

ou encore

Définition On dit que f est uniformément continue sur A lorsque

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall (x,y) \in A^2 \qquad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \epsilon$$

X.2 Un exemple

Proposition Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

...c'est bien de savoir le démontrer (pas difficile).

X.3 Théorème de Heine

Rappel De toute suite (x_n) d'éléments d'un segment $[a,b]$ on peut extraire une suite $(x_{\phi(n)})$ qui converge dans $[a,b]$ (Bolzano-Weiesrtrass).

Théorème (Heine) : Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment

Démonstration Intéressante, car utilisant un procédé de compacité très classique. On raisonne par l'absurde, on fait apparaître des suites, on extrait une suite convergente...

X.4 Quelques questions

Les fonctions suivantes sont-elles uniformément continues ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin(1/x) \end{array}$$

$$f_5 : \begin{array}{ccc}]0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x\sin(1/x) \end{array}$$

Table des matières