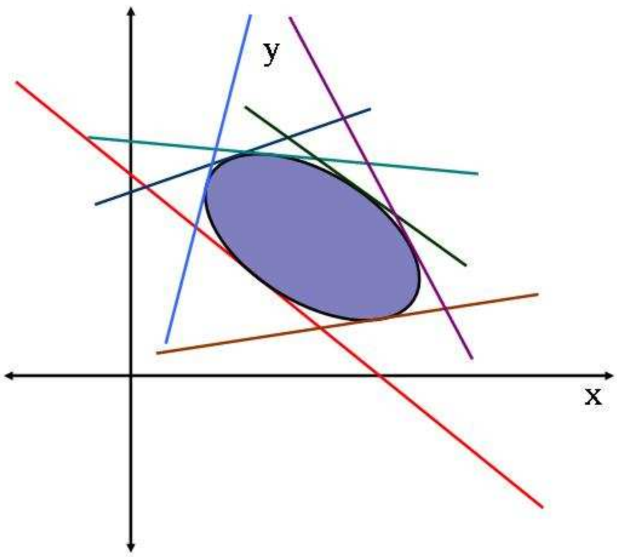
C10 : Convexité



Le théorème de Minkowski (hors programme)

La convexité est très simple à comprendre (on fera beaucoup de dessins pour illustrer ce chapitre), et ses applications sont variées : inégalités, optimisation. . .

I Parties convexes d'un espace vectoriel

Cette notion est très marginale dans le programme ; on doit simplement savoir qu'une boule, dans un **R***-espace vectoriel normé, est convexe.*

I.1 Définitions

a. Segment

Si a et b sont deux éléments d'un **R**-espace vectoriel E, on définit le segment $[a,b]$:

$$[a,b] = \{ta + (1-t)b\ ;\ t \in [0,1]\}$$

On peut critiquer : on définit un segment à partir d'un segment. Certes, mais le segment $[0,1]$ *de* **R** *se définit grâce à la relation d'ordre* $\leq$.
On remarque que $[a,b] = [b,a]$.

b. Partie convexe

On dit qu'une partie C d'un espace vectoriel est convexe lorsque, pour tout couple (a,b) d'éléments de C, le segment $[a,b]$ est inclus dans C, c'est-à-dire lorsque

$$\forall (a,b) \in C^2 \qquad \forall t \in [0,1] \qquad ta + (1-t)b \in C$$

Remarque parfois utile : on peut bien sûr se contenter de $t \in]0,1[$ *dans le deuxième quantificateur.*

I.2 Une caractérisation

Proposition *Hors-programme mais intéressante.*
C est convexe si et seulement si, pour tout $n \geq 1$, pour tout n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels vérifiant

$$\alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0, \dots, \alpha_n \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1\ ,$$

et pour tout n-uplet $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de C, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in C$.

Autrement dit, une partie est convexe si et seulement si elle est stable par « barycentration » à coefficients positifs. Géométriquement, cela signifie que si un polygone a ses sommets dans C, il est tout entier (arêtes, intérieur) inclus dans C.

Démonstration Par récurrence.

L'idée importante est l'associativité de la barycentration : écrire

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

n'est pas tout-à-fait satisfaisant car $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \neq 1$ (sauf si $\alpha_{n+1} = 0$, mais si un des α_i est nul on est directement ramené à l'hypothèse de récurrence). On y remédie comme d'habitude, en forçant les choses à être comme on veut qu'elles soient :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i = s \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{s} x_i + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

où $s =$

Illustration On sait que

$$[x_1, x_2] = \{t_1 x_1 + t_2 x_2 \; ; \; t_1 \geq 0 \, , t_2 \geq 0, \; t_1 + t_2 = 1\}$$

A partir de cela et de la manipulation précédente, dessiner

$$\{t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 \; ; \; t_1 \geq 0 \, , t_2 \geq 0, \; t_3 \geq 0, \; t_1 + t_2 + t_3 = 1\}$$

où les x_i sont dans $\mathbf{R}^2$.

Enveloppe convexe (h.p.) L'intersection de parties convexes est une partie convexe. On en déduit l'existence, étant donnée une partie A d'un espace vectoriel E, d'une plus petite partie convexe contenant A : c'est l'enveloppe convexe de A. Auriez-vous une idée pour décrire l'enveloppe convexe de A ?

Points extrémaux (h.p.) Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel E. On dira qu'un point x de C est extrémal lorsque :

$$\forall (a,b) \in C^2 \qquad x \in [a,b] \Longrightarrow \Big(x = a \quad \text{ou} \quad x = b\Big)$$

Dessiner dans $\mathbf{R}^2$ un convexe ayant n points extrémaux, $n \geq 2$.

Dessiner dans $\mathbf{R}^2$ un convexe borné non vide n'ayant aucun point extrémal.

Existe-t-il dans $\mathbf{R}^2$ des parties qui ont un unique point extrémal ?

Algorithmique (h.p.) La détermination de l'enveloppe convexe de n points est un problème d'algorithmique intéressant.

II Fonctions convexes

II.1 Définition générale

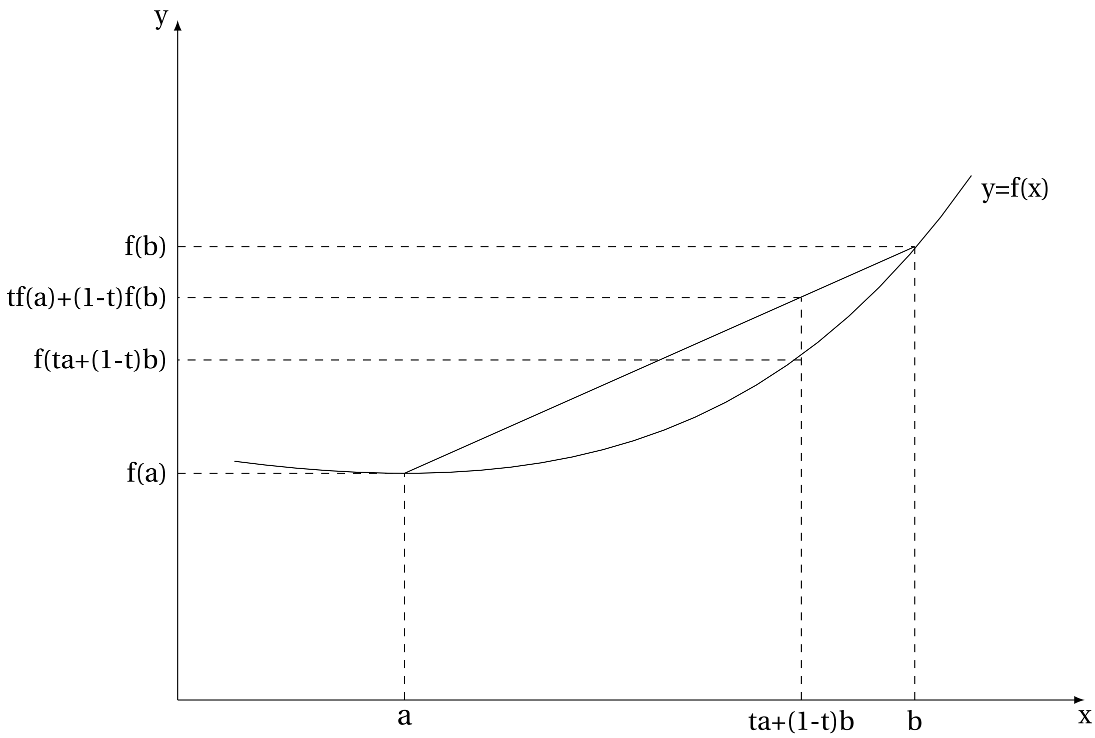
Soit f une application définie sur une partie convexe C d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, à valeurs réelles. On dit que f est convexe lorsque

$$\forall (x,y)\in C^2 \quad \forall t\in[0,1] \qquad f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

On peut se contenter de $t\in]0,1[$.

II.2 Interprétation graphique (variable réelle)

Proposition Soit C est une partie convexe de $\mathbf{R}$, c'est-à-dire un intervalle (qu'on suppose évidemment non vide). La fonction f est convexe sur C si et seulement si son graphe est au-dessous de toutes ses cordes.



II.3 Concavité

Définition *Hors-programme...mais si on rencontre ce vocabulaire, ce serait dommage de ne pas le comprendre.*
On dit que f est concave lorsque $-f$ est convexe.

On sera attentif au fait que « concave » n'est pas le contraire de « convexe » : une fonction peut être convexe et concave (même si c'est rare), le plus souvent elle n'est ni l'un ni l'autre. Un peu comme les fonctions croissantes et décroissantes...

III Caractérisations de la convexité des fonctions définies sur un intervalle

III.1 Caractérisation 1 (h.p.)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. f est convexe si et seulement si la partie $\mathscr{E}(f)$ du plan située au-dessus du graphe de f est convexe. Cette partie, que l'on appelle aussi épigraphe, est définie par

$$(x,y) \in \mathscr{E}(f) \iff y \geq f(x)\ .$$

Démonstration *Peut d'autant plus être passée qu'on n'est plus dans le programme.*
On s'appuie sur un dessin.
Dans un sens, si l'épigraphe de f est convexe, un segment joignant deux points du graphe, donc de l'épigraphe, est inclus dans l'épigraphe.
Dans le sens réciproque, si f est convexe, pas d'idée à avoir : on vérifie !

III.2 Caractérisation 2 (croissance des pentes)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles. f est convexe si et seulement si, pour tout élément x de I, l'application

$$y \longmapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

est croissante sur $I \setminus \{x\}$.

Démonstration On s'appuie là aussi sur un dessin.
Si l'application...est croissante, un dessin montre qu'il est probablement judicieux, si $x < y$ et $t \in]0,1[$, d'écrire

$$\frac{f(tx+(1-t)y)-f(x)}{tx+(1-t)y-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

Il reste à voir si c'est effectivement une idée qui marche.

Si f est convexe, fixons x, définissons

$$\phi_x \,:\, y \longmapsto \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$$

et examinons trois cas :
Si $x < y < z$, on peut écrire $y = tx+(1-t)z$ avec $t \in]0,1[$. On aimerait montrer $\phi_x(y) \leq \phi_x(z)$, ce qui équivaut à

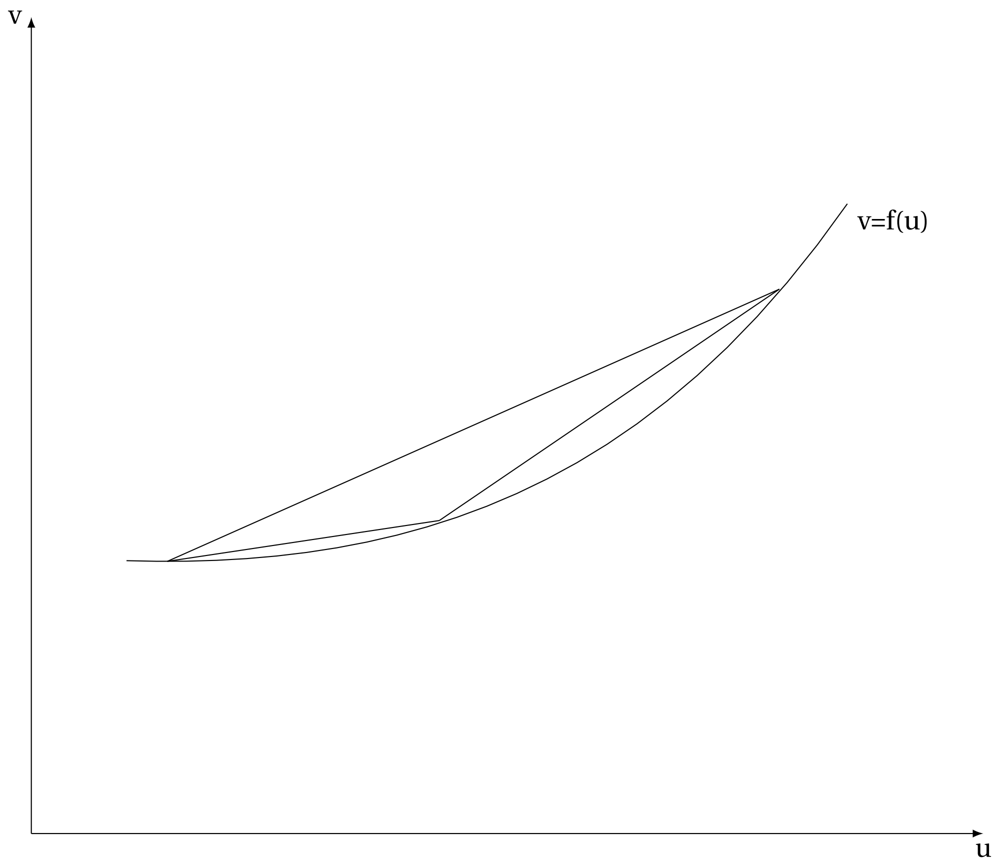
$$\frac{f(tx+(1-t)z)-f(x)}{tx+(1-t)z-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

ce qui rappelle un calcul déjà fait.
Si $z < y < x$, pareil.
Si $y < x < z$, pourquoi ne pas essayer le même genre de chose...

III.3 Corollaire (inégalité des trois pentes)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, convexe. Alors, pour tous x, y, z de I tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$



En fait c'est une caractérisation, mais on ne s'en sert pas comme telle.

III.4 Caractérisation 3 (fonctions dérivables une ou deux fois)

Proposition Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, dérivable sur I. f est convexe si et seulement si f' est croissante.

Proposition Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, dérivable sur I, convexe. Le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes.

Corollaire de la première proposition Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, deux fois dérivable sur I. f est convexe si et seulement si f'' est positive.

III.5 Exemples de fonctions convexes

La fonction exp est convexe sur $\mathbf{R}$.
La fonction ln est concave sur $\mathbf{R}_*^+$
Sur $\mathbf{R}_*^+$, $t \mapsto t^\alpha$ est

sin est convexe sur
sin est concave sur
tan est convexe sur

IV Inégalités de convexité

IV.1 Principe

f est convexe si et seulement si, pour tout $n \geq 1$, pour tout n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de réels vérifiant

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \in [1, \dots, n] \quad \alpha_i \geq 0\,,$$

pour tout n-uplet $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ d'éléments de C,

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i) \tag{1}$$

(appelée inégalité de Jensen).

Utilisation : La plupart du temps, on part d'une fonction qu'on sait être convexe (voir les caractérisations précédentes), et on écrit l'inégalité (1) avec tous les α_i sont égaux à $1/n$, elle s'écrit alors

$$f\Big(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\Big) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \tag{1'}$$

qui est donc vraie pour toute fonction convexe f.

(1), et (1′) qui en est un cas particulier, sont appelées inégalités de convexité.

Savoir reconnaître une inégalité de convexité est une compétence intéressante. C'est souvent assez facile. Mais quand l'inégalité se présente avec des produits, et qu'il faut prendre le logarithme pour avoir des sommes, cela peut demander un petit peu de perspiacité.

La notion de stricte convexité (la courbe ne touche ses cordes qu'aux extrémités) n'est pas au programme. Signalons simplement que la plupart des applications convexes que l'on rencontre sont strictement convexes.

Les fonctions convexes servent à obtenir des inégalités de convexité, et à obtenir des résultats d'unicité d'extremums (dans le cas de stricte convexité), l'existence étant en général donnée par des arguments de continuité-compacité.

Exemple : On considère des réels positifs $x_1, \dots, x_n$. Comparer leur moyenne géométrique :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}$$

et leur moyenne arithmétique :

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n)$$

V Trois inégalités

Voici deux inégalités du programme :

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad e^x \geq 1+x$$

et une inégalité moins utilisée mais qui parfois sert :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \sin x \geq \frac{2}{\pi} x$$

Ces trois inégalités se montrent sans difficulté avec des études de fonctions, qui ne nécessitent pas l'utilisation du programme de prépa. Les prouver en utilisant la convexité permet une rédaction plus élégante et plus efficace.

VI Que faut-il savoir faire ?

• Savoir démontrer qu'une fonction dérivable ou deux fois dérivable est convexe.
• Reconnaître une inégalité de convexité, sous forme de somme ou de produit (et donc d'abord écrire l'inégalité « générique », avec les $1/n$ (surtout) ou avec les α_i (un peu quand même).
• Savoir traduire par une inégalité le fait que le graphe d'une fonction convexe est en-dessus de ses tangentes.
• Savoir que $\ln(1+x) \leq x$ si $x \geq -1$.
• Savoir passer de la « convexité pour 2 » à la « convexité pour n ».
• Savoir dessiner une fonction convexe...

Table des matières