P6 : Fonctions génératrices

I Fonction génératrice d'une variable aléatoire

I.1 Définition

Proposition-Définition Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$. On appelle fonction génératrice de X la fonction

$$G_X \,:\, t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\ t^n$$

qui est la somme d'une série entière de rayon de convergence ≥ 1, normalement convergente sur $D'(0,1)$.

Remarque Il y a un peu de « flou » dans la définition : parfois on considère G_X sur $D'(0,1)$ (disque unité fermé dans $\mathbf{C}$), parfois sur $[-1,1]$, parfois sur $]-1,1[$ (si on a envie de dériver, ce qui arrivera), parfois sur un intervalle plus grand (si elle a un rayon de convergence >1), parfois sur $[0,1[$ (où toutes ses dérivées sont positives)...

Remarque Se souvenir que le rayon de convergence est ≥ 1 ne suffit pas : il faut bien remarquer que G_X est définie en 1. Et même (moins important) en tout t tel que $|t|=1$.

I.2 Interprétation comme espérance

Proposition

$$\forall\, t \in [-1,1] \qquad G_X(t) = \mathrm{E}(t^X)$$

Démonstration :

Il faut considérer cette formule comme « seconde définition », d'importance égale à la première.
Là aussi, il se peut que l'égalité soit valable au-delà de $[-1,1]$: il faut se souvenir que t^X est d'espérance finie si et seulement si $\left(P(X=n)\,t^n\right)_{n\geq 0}$ est sommable, i.e. si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} P(X=n)\,t^n$ converge absolument, et le cas échéant $E\left(t^X\right)$ est la somme de cette série.

I.3 Une fonction génératrice détermine la loi

Proposition Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, de fonction génératrice g. La loi de X se retrouve alors à partir des dérivées successives de g :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad P(X=n) =$$

La fonction génératrice de X détermine donc sa loi :

$$(G_X = G_Y) \Longleftrightarrow (X \sim Y)$$

Autrement dit, pour montrer que deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbf{N}$ ont même loi, il suffit de montrer que leurs fonctions génératrices sont égales.

II Fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes

Proposition

Si X et Y sont indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sur $[-1,1]$.
Si $X_1, \ldots, X_p$ sont mutuellement indépendantes, si $S = X_1 + \ldots + X_p$, alors $G_S = \prod_{i=1}^{p} G_{X_i}$ sur $[-1,1]$.

III Fonctions génératrices des lois usuelles

III.1 Loi de Bernoulli

Proposition Si $X \sim \mathscr{B}(p)$,

III.2 Loi binomiale

Proposition Si $X \sim \mathscr{B}(n,p)$,

III.3 Loi géométrique

Proposition Si $X \sim \mathscr{G}(p)$,

III.4 Loi de Poisson

On dit que X suit une loi de Poisson $\mathscr{P}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$ lorsque X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

Proposition Si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$,

Exercice Si $X_1, \ldots, X_p$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes telles que, pour tout k, $X_k \sim \mathscr{P}(\lambda_k)$ $(\lambda_k > 0)$ alors $X_1 + \cdots + X_p \sim$

III.5 Loi binomiale négative

Cette loi est hors-programme. Elle est naturellement associée au Pile ou Face infini.

Exercice On suppose que $X_1, \ldots, X_m$ sont m variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ $(0 < p < 1)$. On définit $Y = X_1 + \cdots + X_m$.

1. Calculer la fonction génératrice de Y.
2. En déduire la loi de Y.
3. Calculer l'espérance et la variance de Y.

IV Intermède

On dispose d'une machine permettant de fabriquer un dé à six faces pipé « à volonté » : on peut choisir les probabilités p_k, $1 \leq k \leq 6$ pour que le lancer de dé donne la face k.
On doit quand même respecter $p_k \geq 0$ pour tout k, et $p_1 + \cdots + p_6 = 1$.
On effectue deux lancers successifs et indépendants du dé, on note Y la somme des deux faces obtenues. Est-il possible de choisir les p_k pour que $Y \sim \mathscr{U}(\{2, 3, 4, \ldots, 12\}$?

V Régularité

Proposition G_X est continue sur $D'(0,1)$, de classe C^∞ sur $]-1,1[$.

(au moins)

VI Fonction génératrice et moments

VI.1 Etude d'une fonction génératrice

La monotonie, la convexité d'une fonction génératrice sur $[0,1]$ ne dépendent pas de la loi étudiée. On peut même tracer l'allure d'une fonction génératrice sur $[0,1]$:

VI.2 Espérance

Proposition X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1. Et lorsque c'est le cas,

$$\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$$

VI.3 Variance

Proposition X admet un moment d'ordre 2 (et donc une variance) si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. Et si c'est le cas,

$$\mathrm{E}(X^2) = \qquad\qquad\qquad , \qquad \mathrm{V}(X) =$$

VI.4 Généralisation (moments)

VII Somme aléatoire de variables aléatoires (h.p.)

Supposons que $(X_n)_{n\geq 0}$ soit une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbf{N}$. Et que N soit une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $\mathbf{N}$. Rien n'empêche de s'intéresser à

$$Y = X_0 + \cdots + X_N$$

définie sur Ω par

$$Y(\omega) = X_0(\omega) + \cdots + X_{N(\omega)}(\omega)$$

Y est une application définie sur Ω, à valeurs dans $\mathbf{N}$. Pour qu'elle soit une variable aléatoire discrète, il suffit que $Y^{-1}(\{m\})$ soit, pour tout $m \in \mathbf{N}$, un élément de $\mathscr{A}$, qu'on notera $(Y = m)$. Or on peut l'assurer assez simplement (en sachant que chaque $S_n = X_0 + \cdots + X_n$ est une variable aléatoire) :

$$(Y = m) =$$

On peut donc tenter le calcul de G_Y, fonction génératrice de Y, définie au moins sur $[-1, 1]$. Pour cela, on fera l'hypothèse que les X_n ($n \in \mathbf{N}$) et N sont mutuellement indépendantes. Ou, si l'on veut être plus clair, que la famille $(X_n)_{n\geq -1}$ où l'on a posé $X_{-1} = N$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On fera aussi l'hypothèse que les X_n, $n \geq 0$, ont toutes même loi (cela peut paraître monstrueusement réducteur, mais dans les « grandes » applications cette hypothèse apparaît naturellement). Soit alors $t \in [-1, 1]$;

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= \sum_{m=0}^{+\infty} P(Y = m)\, t^m \\ &= \sum_{m=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = m, N = n)\, t^m \right) \end{aligned}$$

On voit le travail à faire : détailler un peu les $P(Y = m, N = n)$, puis sans doute intervertir des sommes avec un argument de sommabilité.

VIII Annexe : classe de la fonction génératrice et existence des moments

Proposition 1 Si $E(X) < +\infty$, G_X est dérivable en 1.

Démonstration On définit, sur $[0,1]$,

$$\phi_n : t \mapsto P(X = n)\,t^n$$

Les ϕ_n $(n \geq 1)$ sont de classe C^1, et l'hypothèse donne la convergence normale, donc uniforme, de $\sum \phi'_n$ sur $[0,1]$. On peut alors appliquer le théorème sur les séries de fonctions de classe C^1. Et G_X est donc de classe C^1 sur $[0,1]$.

Seule cette démonstration est au programme, même si le résultat suivant l'est.

Proposition 2 Si G_X est dérivable en 1, alors $E(X) < +\infty$.

Démonstration G'_X est croissante sur $[0,1[$ (signe de G''_X). Si elle est majorée, alors elle a une limite réelle en 1 et G_X est dérivable en 1 par théorème limite de la dérivée. Si elle ne l'est pas, alors elle a pour limite $+\infty$ en 1 et le graphe de G_X a au point $(1,1)$ une demi-tangente verticale (même théorème). Donc, si G_X est dérivable en 1, G'_X est majorée (disons par M) sur $[0,1[$. Et, par positivité des termes, pour tout N, pour tout $t \in [0,1[$,

$$\sum_{k=1}^{N} kP(X = k)\,t^{k-1} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} kP(X = k)\,t^{k-1} \leq M$$

Les inégalités larges passent à la limite (limite prise pour la somme finie), on obtient que

$$\sum_{k=1}^{N} kP(X = k) \leq M$$

et une série à termes réels positifs dont la suite des sommes partielles est majorée converge.

Proposition 3 Si $E(X^2) < +\infty$, G_X est deux fois dérivable en 1.

Démonstration On reprend les ϕ_n de la proposition 1, l'hypothèse donne la convergence normale, donc uniforme, de $\sum \phi''_n$ sur $[0,1]$. Il ne reste qu'à appliquer deux fois le théorème sur les séries de fonctions de classe C^2.

Proposition 4 Si G''_X est dérivable en 1, alors $E(X^2) < +\infty$.

Démonstration Déjà, en appliquant la proposition 2, $E(X) < +\infty$, et donc (proposition 1) G_X est C^1 sur $[0,1]$. On peut alors reprendre la démonstration de la proposition 2 en remplaçant G_X par G'_X.

Table des matières