P5 : Familles de variables aléatoires

I Couple de variables aléatoires

I.1 Définitions (loi conjointe, lois marginales)

Proposition Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, le « couple »

$$(X, Y)\ :\ \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

est lui aussi une variable aléatoire discrète.

Définition Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans E et F respectivement. La « loi conjointe » de X et Y est la loi du couple (X, Y) (qui est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E \times F$).

Définition « Inversement », avec les notations précédentes, les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y.

Proposition La loi conjointe détermine les lois marginales, la réciproque est fausse.

Démonstrations
D'abord, si $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis ou dénombrables, $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ l'est, or (X, Y) est à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ (attention à ne pas confondre $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ avec $(X, Y)(\Omega)$).
Et, si $(a, b) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on peut écrire $((X, Y) = (a, b))$ (c'est-à-dire $(X, Y)^{-1}((a, b))$, notation non usitée) à l'aide de $(X = a)$ et $(Y = b)$, d'une manière qui prouve que $(X, Y) = (a, b)$ est un évènement :

On conclut bien que (X,Y) est une variable aléatoire discrète.

Si on connaît la loi conjointe, on connaît les lois marginales :
définissons $X(\Omega)=\{x_i\}_{i\in I}$ et $Y(\Omega)=\left\{y_j\right\}_{j\in J}$ (I et J sont deux ensembles finis ou dénombrables), on remarque que $(Y=y_j)_{j\in J}$ est un système complet d'événements, ce qui permet d'écrire (même si certains de ces événements sont de probabilité nulle)

$$\forall i\in I \qquad P(X=x_i)=\sum_{j\in J}P(X=x_i\ ,\ Y=y_j)$$

d'où la loi marginale de X connaissant la loi conjointe et, de même,

$$\forall j\in J \qquad P(Y=y_j)=\sum_{i\in I}P(X=x_i,Y=y_j)$$

En revanche, il est illusoire de penser reconstituer le « tableau » à partir de ses « marges » : autrement dit, Les lois marginales ne déterminent pas les lois conjointes.

Par exemple,

X \ Y	α	β
a	1/4	1/4
b	1/4	1/4

et

X \ Y	α	β
a	1/6	1/3
b	1/3	1/6

donnent les mêmes lois marginales (loi uniforme sur $\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}$ pour X, loi uniforme sur $\{\alpha,\beta\}$ pour Y), mais pas la même loi conjointe : dans le premier cas, la loi de (X,Y) est la probabilité uniforme sur $\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}\times\{\alpha,\beta\}$, dans le second cas la loi de (X,Y) n'est pas uniforme.

I.2 Fabrication de variables aléatoires discrètes

Arrêtons-nous un peu pour relire deux résultats déjà obtenus...
• Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$, le « couple »

$$(X,Y)\ :\ \omega\longmapsto(X(\omega),Y(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète.
• Si $Z\ :\ \Omega\to E$ est une variable aléatoire discrète, si $f\ :\ E\to F$ est une fonction (ou : application) quelconque, alors $f\circ Z$, notée $f(Z)$ est une variable aléatoire discrète.

…et constatons que donc,

> Si X et Y sont des variables aléatoires discrètes réelles définies sur un même univers probabilisé, alors $X+Y$, XY, $\min(X,Y)$, $\max(X,Y)$ sont des variables aléatoires réelles discrètes.

Bien sûr, il y aussi $\Gamma\left(\text{Arctan}\left(1+X^2+Y^2\right)\right)$, mais on n'a cité que quelques exemples fréquemment utiles.
Mais il n'est pas inutile de savoir montrer directement que ces chose ($X+Y$ par exemple) sont bien des variables aléatoires…Par exemple pour $X+Y$:

Un exercice CCP 8 pts

Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :
$\forall\,(i,j) \in \mathbb{N}^2,\ P((X=i)\cap(Y=j)) = \dfrac{1}{\mathrm{e}\,2^{i+1}\,j!}$

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. (a) Prouver que $1+X$ suit une loi géométrique et en déduire l'espérance et la variance de X.

   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Calculer $P(X=Y)$.

II Familles de variables aléatoires

II.1 Indépendance

a. Définition

Soit I un ensemble fini ou infini, $(X_i)_{i\in I}$ une famille de variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On suppose que X_i est, pour tout $i \in I$, à valeurs dans E_i. On dit que les X_i $(i \in I)$ sont mutuellement indépendantes lorsque, pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ telle que, pour chaque i, $A_i \in \mathscr{P}(E_i)$, les événements $(X_i \in A_i)$ sont mutuellement indépendants.
Ce qui équivaut à dire que, pour toute partie J finie incluse dans I, pour toute famille $(A_j)_{j\in J}$ telle que, pour chaque j, $A_j \in \mathscr{P}(E_j)$, on a

$$P\left(\bigcap_{j\in J}(X_j \in A_j)\right) = \prod_{j\in J} P(X_j \in A_j)$$

Lorsqu'on dira « indépendantes », on sous-entendra « mutuellement indépendantes ». Il importe de savoir que c'est plus fort que « deux à deux indépendantes ».

b. Caractérisation

Remarque Une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires discrètes est indépendante si et seulement si toute sous-famille finie $(X_i)_{i\in J}$ ($J \subset I$, J finie) est indépendante.

Proposition Une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ est indépendante si et seulement si, pour toute famille $(x_1, \ldots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \ldots \times X_n(\Omega)$, on a

$$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = P(X_1 = x_1) \ldots P(X_n = x_n)$$

Démonstration Le cas $n = 2$ a été traité, on sait donc comment faire !

II.2 Des résultats bien évidents, et essentiels

Proposition Si $(X_i)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$, si chaque X_i est à valeurs dans E_i, et si, pour chaque i, ϕ_i est une fonction définie sur E_i (à valeurs dans un ensemble F_i quelconque), la famille $\big(\phi_i(X_i)\big)_{i\in I}$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$.

Proposition *Parfois appelée lemme des coalitions.*
Si $(X_1,\dots,X_n)$ est une famille de variables aléatoires discrètes indépendantes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$, à valeurs respectivement dans $E_1,\dots,E_n$, si ϕ est une fonction définie sur $E_1\times\cdots\times E_m$ et ψ est une fonction définie sur $E_{m+1}\times\cdots\times E_n$, les variables aléatoires $\phi(X_1,\dots,X_m)$ et $\psi(X_{m+1},\dots,X_n)$ sont indépendantes.

Extension Ce lemme des coalitions s'étend, dans le nouveau programme, à un nombre quelconque de coalitions. Par exemple, si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d., si l'on définit pour tout $n\in\mathbf{N}$: $U_n = X_{2n}+X_{2n+1}$, les U_n sont indépendantes.

Proposition Soit $(X_1,\dots,X_n)$ une famille de n variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes, d'espérance finie. Alors $X_1\dots X_n$ est d'espérance finie, et

$$E(X_1\dots X_n)=E(X_1)\dots E(X_n)$$

Résultat très, très utile!

II.3 Existence (« Réalisation »)

On dira parfois (souvent) quelque chose comme
« Soit X une variable aléatoire de loi $\mathscr{G}(p)$ »
Bien évidemment, cela n'est correct que s'il existe au moins un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une variable aléatoire X sur cet espace suivant une loi $\mathscr{G}(p)$. Cette existence ne pose pas vraiment de problème. Il n'est pas non plus très difficile de montrer que la phrase
« soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes, la première de loi $\mathscr{G}(p)$, la seconde de loi $\mathscr{B}(n, p)$ »
n'est pas « vide de sens ».

Exercice : Construire un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et deux variables aléatoires X et Y sur cet espace, indépendantes, et telles que la première suive une loi $\mathscr{G}(p)$ et la seconde une loi $\mathscr{B}(n, p)$.
(A faire pour les candidat(e)s aux ens).

Un peu plus technique est le résultat suivant :

Théorème Soit $(\mathscr{L}_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une famille de lois discrètes de probabilité. Il existe un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et une famille $(X_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de variables aléatoires discrètes indépendantes sur cet espace telles que, pour tout i,
$X_i \sim \mathscr{L}_i$.

Ce résultat, dont la démonstration est hors-programme, est un cas particulier du théorème de réalisation de Kolmogorov.

III Vecteurs aléatoires

III.1 Définition

Soit $X_1,\ldots,X_d$ des variables aléatoires discrètes sur $(\Omega,\mathscr{A},P)$, à valeurs dans $E_1,\ldots,E_p$ respectivement. L'application

$$X\,:\,\omega\longrightarrow(X_1(\omega),\ldots,X_d(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $E=E_1\times\ldots\times E_d$. Le plus souvent, les E_i sont des parties de $\mathbf{R}$ (et très souvent la même partie de $\mathbf{R}$). On dit que X est un vecteur aléatoire discret de dimension d.

III.2 Loi conjointe, lois marginales

a. Loi conjointe

Avec les notations précédentes, la loi conjointe est la loi de X : c'est une probabilité sur $(E,\mathscr{P}(E))$, entièrement déterminée par les

$$P\left(X=(x_1,\ldots,x_d)\right)=P(X_1=x_1,\ldots,X_d=x_d)$$

où, pour tout i, $x_i\in E_i\cap X_i(\Omega)$.
Si A est une partie de E,

$$P(X\in A)=\sum_{(x_1,\ldots x_d)\in(E'_1\times\ldots\times E'_d)\cap A}P\left(X=(x_1,\ldots,x_d)\right)$$

où $E'_i=E_i\cap X_i(\Omega)$.

b. Lois marginales

La loi de X_1 (dite « marginale ») se déduit de la loi conjointe :

$$P(X_1=x)=\sum_{(x_2,\ldots x_d)\in E'_2\times\ldots\times E'_d}P\left(X=(x,x_2,\ldots,x_d)\right)$$

(même chose en remplaçant X_1 par un X_k quelconque, $k=2,\ldots,d$.

c. Extension

On peut définir la loi marginale du couple (X_i, X_j), ou plus généralement de n'importe-quel « sous-vecteur » du vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$.

III.3 Lois conditionnelles

On considère toujours un vecteur aléatoire discret $(X_1, \ldots, X_d)$.

a. Une première loi conditionnelle

Si $P(X_1 = x) \neq 0$, on peut définir la loi conditionnelle de $(X_2, \ldots, X_d)$ sachant $(X_1 = x)$ par

$$\begin{aligned} \forall B \in \mathscr{P}(E_2 \times \ldots \times E_d) \quad P_{(X_2,\ldots,X_d)|(X_1=x)}(B) &= P_{(X_1=x)}((X_2,\ldots,X_d) \in B) \\ &= \frac{P((X_2,\ldots,X_d) \in B \text{ et } (X_1 = x))}{P(X_1 = x)} \end{aligned}$$

Cette « loi conditionnelle », notée $P_{(X_2,\ldots,X_d)|(X_1=x)}$, est une probabilité.
La loi conditionnelle de $(X_2, \ldots, X_d)$ sachant $(X_1 = x)$ se caractérise par les probabilités des événements élémentaires :

$$\begin{aligned} P_{(X_2,\ldots,X_d)|X_1=x}(\{(x_2,\ldots,x_d)\}) &= P_{X_1=x}((X_2,\ldots,X_d) = (x_2,\ldots,x_d)) \\ &= \frac{P\left((X_1, X_2,\ldots,X_d) = (x, x_2,\ldots,x_d)\right)}{P(X_1 = x)} \end{aligned}$$

et, ensuite, pour toute partie B de $E_2 \times \ldots \times E_d$,

$$\begin{aligned} P_{(X_2,\ldots,X_d)|(X_1=x)}(B) &= \sum_{(x_2,\ldots,x_d)\in B'} P_{X_1=x}((X_2,\ldots,X_d) = (x_2,\ldots,x_d)) \\ &= \sum_{(x_2,\ldots,x_d)\in B'} \frac{P\left((X_1, X_2,\ldots,X_d) = (x, x_2,\ldots,x_d)\right)}{P(X_1 = x)} \end{aligned}$$

où l'on pose

$$B' = B \cap (X_2(\Omega) \times \cdots \times X_d(\Omega))$$

b. Une deuxième loi conditionnelle

Si $P(X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d) \neq 0$, on peut définir la loi conditionnelle de X_1 sachant $(X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d)$ par

$$\forall B \in \mathscr{P}(E_1) \qquad \begin{aligned} P_{X_1 \mid (X_2=x_2,\ldots,X_d=x_d)}(B) &= P_{(X_2=x_2,\ldots,X_d=x_d)}(X_1 \in B) \\ &= \frac{P(X_1 \in B \text{ et } (X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d))}{P(X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d)} \end{aligned}$$

Cette « loi conditionnelle », notée $P_{X_1 \mid (X_2=x_2,\ldots,X_d=x_d)}$, est une probabilité.
La loi conditionnelle de X_1 sachant $(X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d)$ se caractérise par les probabilités des événements élémentaires :

$$\begin{aligned} P_{X_1 \mid (X_2=x_2,\ldots,X_d=x_d)}(\{x\}) &= P_{(X_2=x_2,\ldots,X_d=x_d)}(X_1 = x) \\ &= \frac{P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d)}{P(X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d)} \end{aligned}$$

et, ensuite, pour toute partie B de F,

$$\begin{aligned} P_{X_1 \mid (X_2=x_2,\ldots,X_d=x_d)}(B) &= \sum_{x \in B \cap X_1(\Omega)} P_{(X_2=x_2,\ldots,X_d=x_d)}(X_1 = x) \\ &= \sum_{x \in B \cap X_1(\Omega)} \frac{P(X_1 = x, X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d))}{P(X_2 = x_2, \ldots, X_d = x_d)} \end{aligned}$$

Et on peut imaginer d'autres lois conditionnelles. . .

IV Annexe : démonstration du lemme des coalitions

On commence par un utile

Lemme Si s est une surjection d'un ensemble fini ou dénombrable D sur un ensemble E, alors E est fini ou dénombrable.

Démonstration du lemme Si D est fini, c'est bien évident. Supposons donc D dénombrable, on peut donc décrire $D = \{d_n \ ; \ n \in \mathbf{N}\}$ (ce qui revient à dire qu'il existe une bijection de $\mathbf{N}$ sur D, on appelle d_n l'image de n par cette bijection). Donc

$$s(D) = \{s(d_n) \ ; \ n \in \mathbf{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{s(d_n)\}$$

et on sait qu'une réunion finie ou dénombrable (ici, dénombrable) d'ensemble finis ou dénombrables (ici, « très » finis car ce sont des singletons) est finie ou dénombrable.

Démonstration du lemme des coalitions Commençons par le commencement : vérifions que si ϕ est une fonction définie sur $E_1 \times \cdots \times E_m$, à valeurs dans un ensemble F, si $X_1, \ldots, X_m$ sont des variables aléatoires (discrètes) définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ à valeurs dans $E_1, \ldots, E_m$, alors $Y = \phi(X_1, \ldots, X_m)$ est une variables aléatoires (discrète).

Remarquons d'abord que l'ensemble des valeurs prises par
$Y = \phi(X_1, \ldots, X_m) = \phi \circ (X_1, \ldots, X_m)$ est fini ou dénombrable. En effet, quitte à remplacer chaque E_k par $E_k \cap X_k(\Omega)$ (on ne garde dans E_k que les valeurs effectivement prises par X_k), on peut supposer chaque E_k fini ou dénombrable. On sait qu'alors $E_1 \times \ldots \times E_m$ est fini ou dénombrable. Et l'image par une application d'un ensemble fini ou dénombrable est finie ou dénombrable (voir le lemme précédent), donc $Y(\Omega) = \phi(E_1 \times \ldots \times E_m)$ est fini ou dénombrable.

Considérons alors $y \in Y(\Omega)$;

$$(Y = y) = Y^{-1}(\{y\}) = \bigcap_{(x_1, \ldots, x_m) \in \phi^{-1}(\{y\})} (X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m)$$

(où on note comme d'habitude $(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = \bigcap_{k=1}^{m} (X_k = x_k)$) est une réunion finie ou dénombrable d'intersections finies d'éléments de $\mathscr{A}$, donc un élément de $\mathscr{A}$.

Notons alors, en reprenant les notations de la proposition, $Z = \psi(X_{m+1}, \ldots, X_n)$, qui est pour les mêmes raisons une variable aléatoire discrète. Et soit $(y, z) \in Y(\Omega) \times Z(\Omega)$. On a alors

$$\begin{aligned}
P(Y = y, Z = z) &= P\left((X_1, \ldots, X_m) \in \phi^{-1}(y), (X_{m+1}, \ldots, X_n) \in \psi^{-1}(z)\right) \\
&= P\Big(\bigcup_{((x_1,\ldots,x_m),(x_{m+1},\ldots,x_n)) \in \phi^{-1}(y) \times \psi^{-1}(z)} ((X_1, \ldots, X_m) = (x_1, \ldots, x_m), \\
&\qquad (X_{m+1}, \ldots, X_n) = (x_{m+1}, \ldots, x_n))\Big) \\
&= P\Big(\bigcup_{((x_1,\ldots,x_m),(x_{m+1},\ldots,x_n)) \in \phi^{-1}(y) \times \psi^{-1}(z)} (X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m, \\
&\qquad X_{m+1} = x_{m+1}, \ldots, X_n = x_n)\Big) \\
&= \sum_{((x_1,\ldots,x_m),(x_{m+1},\ldots,x_n)) \in \phi^{-1}(y) \times \psi^{-1}(z)} P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n)
\end{aligned}$$

cette dernière ligne résultant de la σ-additivité (la réunion est disjointe) et de l'indépendance des X_i. La σ-additivité montre aussi que la famille $(P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n))_{((x_1,\ldots,x_m),(x_{m+1},\ldots,x_n)) \in \phi^{-1}(y) \times \psi^{-1}(z)}$ est sommable (en effet, c'est une famille de réels positifs, sommable de somme $P(Y = y, Z = z)$ par σ-additivité de P). On peut donc sommer par paquets. Et par exemple écrire

$$\begin{aligned}
P(Y = y, Z = z) &= \sum_{(x_1,\ldots,x_m) \in \phi^{-1}(y)} \left(\sum_{(x_{m+1},\ldots,x_n) \in \psi^{-1}(z)} P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_n = x_n) \right) \\
&= \sum_{(x_1,\ldots,x_m) \in \phi^{-1}(y)} P(X_1 = x_1) \times \cdots \times P(X_m = x_m) P(Z = z)
\end{aligned}$$

(de nouveau par σ-additivité, qui donne bien
$\sum_{(x_{m+1},\ldots,x_n) \in \psi^{-1}(z)} P(X_{m+1} = x_{m+1}) \times \cdots \times P(X_n = x_n) = P(Z = z)$)

Une dernière σ-additivité donne alors

$$P(Y = y, Z = z) = P(Y = y)\ P(Z = z)$$

Table des matières