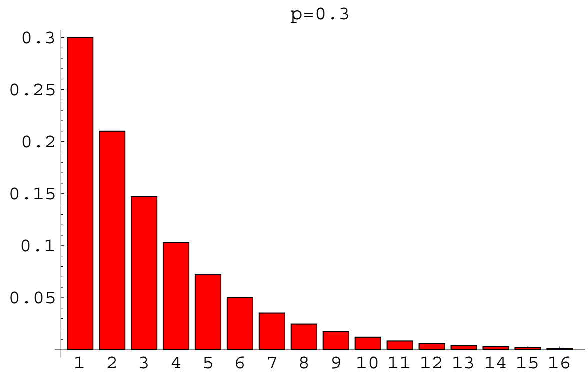
P3 : Variables aléatoires discrètes



La loi géométrique

I Variables aléatoires discrètes

I.1 Définition

a. Définition

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé, E un ensemble quelconque. Une application

$$X : \Omega \to E$$

est appelée variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ lorsqu'elle vérifie :

(i) $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable.
(ii) Pour tout $a \in X(\Omega)$, $\quad X^{-1}(\{a\}) \in \mathscr{A}$

$X^{-1}(\{a\})$ doit donc être pour tout $a \in E$ un évènement (on appelle évènement un élément de $\mathscr{A}$). Pourquoi cette condition ? voir juste après, mais précisons d'abord qu'on préfère noter cet évènement $(X = a)$. Autrement dit,

$$(X = a) = \{\omega \in \Omega \ ; \ X(\omega) = a\}$$

Une variable aléatoire est une fonction. Appeler variable une fonction est un petit peu déroutant. La notation $(X = a)$ *l'est tout autant :* $\pi\mathbf{Z}$ *est* $\sin^{-1}(\{0\})$*, on le note assez rarement* $(\sin = 0)$.

b. Explication de la deuxième condition

La condition **(ii)** s'explique par le fait que pour tout $x \in X(\Omega)$, on veut pouvoir calculer la probabilité que X prenne la valeur x :

$$P(X = x)$$

Or ce nombre est par définition

$$P\left(X^{-1}(\{x\})\right)$$

Mais les parties de Ω qui ont une probabilité, autrement dit les « évènements », sont les parties qui sont dans la tribu $\mathscr{A}$. On impose donc naturellement que tous les $X^{-1}(\{x\})$ soient dans cette tribu.

c. Remarque sur la première condition

On n'exige pas que E soit fini ou dénombrable, seulement que $X(\Omega)$ le soit. Si on travaille seulement sur X, rien n'empêche de se débarrasser des éléments de E qui ne servent à rien (i.e. qui ne sont pas atteints par X), et de remplacer E par $X(\Omega)$, ce qu'on fera parfois (pour rendre certaines rédactions plus simples). Une variable aléatoire discrète, c'est une variable aléatoire qui prend un nombre de valeurs fini ou dénombrable. Ne pas confondre avec l'univers, qui lui n'a pas besoin d'être fini ou dénombrable.

d. Variable aléatoire réelle

Lorsque E est une partie de $\mathbf{R}$, on dit que la variable aléatoire X est réelle.

e. Discrete variables

Dans les livres de mathématiques anglo-américains (et donc souvent sur Internet), on désigne généralement par « discrete random variable » une variable aléatoire finie. Le sens est donc plus restrictif.

I.2 Quelques exemples

a. Univers finis ou dénombrables

On considère un espace probabilisé fini ou dénombrable

$$(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), P)$$

Alors toute application X définie sur Ω est une variable aléatoire discrète. Les choses sont donc bien simples.

b. Un exemple fondamental avec le Pile ou Face infini

On a, pour modéliser le Pile ou Face infini, considéré l'univers

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbf{N}_*}$$

On a admis qu'il existait une tribu $\mathscr{A}$ engendrée par les événements « de type fini » ou « cylindres », et une unique probabilité définie sur cette tribu, telle que, si $m \in \mathbf{N}_*$, si $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_m) \in \{0,1\}^m$, si $A_\epsilon = \{\omega \in \Omega\ ;\ \forall i \in [\![1,m]\!] \quad \omega_i = \epsilon_i\}$ alors

$$P(A_\epsilon) = p^s(1-p)^{m-s}$$

où s est le nombre de ϵ_i égaux à 1 (ou encore $s = \sum_{i=1}^{m} \epsilon_i$).
L'application X qui à ω associe le rang du premier lancer qui donne 1 est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. En effet, pour tout $n \geq 1$, $(X = n)$ est un « évènement cylindrique », donc a fortiori est dans la tribu $\mathscr{A}$.

En fait, on a oublié un petit quelque chose. Mais quoi ?

I.3 Fonction d'une variable aléatoire discrète

Proposition Si $X : \Omega \to E$ est une variable aléatoire discrète, si $f : E \to F$ est une fonction (ou : application) quelconque, alors $f \circ X$, notée $f(X)$ est une variable aléatoire discrète.

Démonstration $X(\Omega)$ est fini ou dénombrable. Donc $f(X(\Omega)) = \bigcup_{x \in X(\Omega)} \{f(x)\}$, réunion finie ou dénombrable de singletons, est fini ou dénombrable (voir chapitre sur la sommabilité, une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable, résultat dont la démonstration n'est pas exigible).

Notons $Y = f(X) = f \circ X$. Soit $y \in f(X(\Omega))$. Alors

$$\begin{aligned}
(Y = y) &= Y^{-1}(\{y\}) \\
&= \{\omega \in \Omega\ ;\ f(X(\omega)) = y\} \\
&= \{\omega \in \Omega\ ;\ X(\omega) \in f^{-1}(\{y\})\} \\
&= \bigcup_{x \in f^{-1}(\{y\}) \cap X(\Omega)} (X = x)
\end{aligned}$$

Les $(X = x)$ étant dans $\mathscr{A}$, et $\mathscr{A}$ étant une tribu donc stable par réunion finie ou dénombrable, $(Y = y)$ est dans $\mathscr{A}$.

Remarque Le principal ennui de ce paragraphe, c'est le problème posé par les notations. Les notations utilisées en probabilités pour les variables aléatoires sont en effet déroutantes par rapport aux notations qu'on a l'habitude d'utiliser pour les fonctions. Or ici, on a une variables aléatoire et une fonction « habituelle » dans le même énoncé. Par exemple, si X est une variable aléatoire réelle, $\sin(X)$ est aussi une variable aléatoire réelle. C'est donc une fonction.

I.4 Loi

a. Définition

Proposition - Définition

Soit X une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans E. Pour toute partie A de E, $X^{-1}(A)$ est dans $\mathscr{A}$ et est notée en général $(X \in A)$. On peut alors définir

$$P_X(A) = P\left(X^{-1}(A)\right) = P(X \in A)$$

P_X est une probabilité sur $(E, \mathscr{P}(E))$, appelée loi de X.

L'existence d'une probabilité sur $\mathscr{P}(E)$ entier pourrait sembler surprenante. Mais les éléments de E « qui comptent », ce sont ceux de $X(\Omega)$, donc un ensemble dénombrable d'éléments de E. Et on a vu que sur un ensemble dénombrable D, on pouvait prendre pour tribu d'évènements l'ensemble $\mathscr{P}(D)$ des parties de D.
En pratique, lorsqu'on travaille avec une variable aléatoire discrète X, c'est P_X et non pas P qui nous intéresse, $X(\Omega)$ et non pas Ω, les tribus et les difficultés qui leur sont associées resteront donc dans l'ombre. Ce qui explique pourquoi le programme suggère de ne pas trop s'attarder dessus.

Proposition Avec les notations de la proposition précédente, si $A \in \mathscr{P}(E)$,

$$P(X \in A) = P_X(A) = \sum_{a \in A \cap X(\Omega)} P(X = a) = \sum_{a \in A \cap X(\Omega)} P_X(\{a\})$$

La donnée de la loi d'une variable aléatoire discrète X est donc équivalente à la donnée de son « support » $X(\Omega)$ (qui est un ensemble fini ou dénombrable) et de la famille de réels positifs $\left(p_x\right)_{x \in X(\Omega)}$ sommable et de somme 1 définie par

$$P(X = x) = p_x$$

Les probabilités $P(X = x)$, caractérisent donc la loi d'une variable aléatoire discrète X. Elles forment une famille dénombrable, ce qui permet d'utiliser la σ-additivité. C'est une spécificité très importante de ces variables aléatoires, qui *simplifie beaucoup les choses. Et c'est complètement faux pour les variables aléatoires non discrètes.*

Conséquence pratique Lorsqu'on demande la loi d'une variable aléatoire X, on doit d'abord donner les valeurs pouvant être prises par X : ces valeurs forment un ensemble dénombrable D ($D = X(\Omega)$). On donne alors, pour tout $d \in D$, $P(X = d)$. On a ainsi décrit la loi de X. Si un énoncé demande d'identifier (plutôt que décrire) la loi de X, il s'agit probablement de reconnaître une loi usuelle : uniforme, binomiale, géométrique, ou de Poisson.

b. Une « évidence »

Si X et Y ont même loi, si f est une application, $f(X)$ et $f(Y)$ ont même loi.

I.5 La loi géométrique

Définition On dit qu'une variable aléatoire X sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ suit une loi géométrique $\mathscr{G}(p)$, $0 < p \leq 1$, lorsque $X(\Omega) = \mathbf{N}_*$ et

$$\forall k \in \mathbf{N}_* \qquad P(X = k) = (1-p)^{k-1} p$$

On dit aussi que X est une variable aléatoire géométrique.
On note $X \sim \mathscr{G}(p)$.

Remarque : $p = 1$ est autorisé, $p = 0$ non, pour des raisons évidentes...à la fois en termes de modélisation et en termes de calcul.

Si $Y \sim \mathscr{G}(p)$, X et Y ont même loi, on note

$$X \sim Y$$

La connaissance des $P(X = n)$, $n \in$ űN$_*$, permet de déterminer $P(X \in A)$ pour n'importe quelle partie A de $\mathbf{N}_*$ (ou n'importe quelle partie de $\mathbf{Z}$, de $\mathbf{Q}$, de $\mathbf{R}$...).

Formules (très) importantes Si X est une variable aléatoire qui suit une loi $\mathscr{G}(p)$, $0 < p \leq 1$, alors

$$\forall n \geq 1 \qquad P(X \geq n) =$$

$$\forall n \geq 0 \qquad P(X > n) =$$

Le lien avec la modélisation permet de retrouver ces formules sans hésitation et sans erreur. On passera plutôt par ces formules pour trouver

$$P(X \leq n) = 1 - (1-p)^n$$

que par la somme (obtenue par additivité)

$$P(X \leq n) = \sum_{k=1}^{n} P(X = k)$$

(mais bien sûr, ça marche aussi!)

Remarque : On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ lorsqu'elle est à valeurs dans $\mathbf{N}_*$ et vérifie, pour tout $n \in \mathbf{N}_*$,

$$P(X = n) = (1-p)^{n-1} p$$

Cette simple définition suffit pour travailler avec X : on n'a pas besoin de connaître l'univers Ω sur lequel elle est définie. On retrouve dans ce cas particulier la remarque faite plus haut : pas besoin de Ω, pas besoin de $\mathscr{A}$...

Remarque : Si $\alpha \in]0,1]$, il y a une unique probabilité $\mathbf{P}$ sur $\mathbf{N}_*$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \qquad \mathbf{P}(X = n) = (1-\alpha)^{n-1}\alpha$$

Remarque : On peut travailler avec une variable géométrique en oubliant le « gros » univers du Pile ou Face infini et toutes ses difficultés. Il est en revanche très utile, pour soulager sa mémoire, de se souvenir de ce que la loi géométrique sert à modéliser (le temps de premier succès dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, pour parler bien).

Remarque : On peut objecter que la « vraie » modélisation de l'expérience aléatoire précédente se fait avec une variable Y à valeurs dans $\mathbf{N}_* \cup \{+\infty\}$, pour laquelle $\mathbf{P}(Y = +\infty) = 0$. Mais cette variable est presque sûrement égale à une variable géométrique...Et on reconnaît le vrai probabiliste à ce qu'il finit toutes ses phrases par p.s.

I.6 Lois finies usuelles

a. Loi uniforme

Soit X une variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, telle que $E = X(\Omega) = \{x_1, \ldots, x_n\}$ soit fini. On dira que X suit une loi uniforme lorsque P_X est la probabilité uniforme sur $\{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad P(X = x_k) = \frac{1}{n}$$

On constatera bien, encore ici, que peu importe $(\Omega, \mathscr{A})$.

b. Loi de Bernoulli

Définition On appelle variable de Bernoulli toute variable aléatoire X à valeurs dans $\{0, 1\}$; sa loi est donc donnée par

$$P(X = 1) = p \qquad P(X = 0) = 1 - p$$

où $p \in [0, 1]$. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, ou que X suit une loi $\mathscr{B}(p)$.

Notons que la loi $\mathscr{B}(1/2)$ est une loi uniforme particulière.
La loi de Bernoulli modélise principalement les expériences aléatoires à deux issues, dont l'une est souvent appelée « succès » et l'autre « échec ».

c. Variable de Bernoulli et fonction indicatrice d'un événement

Définition Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Si A est un événement quelconque (autrement dit : une partie de Ω), on considère sa fonction indicatrice, qu'on appelle plus brièvement son indicatrice : $\mathbf{1}_A$ définie par

$$\forall \omega \in A \quad \mathbf{1}_A(\omega) = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall \omega \in \Omega \setminus A \quad \mathbf{1}_A(\omega) = 0$$

Proposition

$\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire, et suit une loi $\mathscr{B}(p)$ avec $p = P(A)$. Réciproquement, toute variable de Bernoulli X est l'indicatrice de l'événement $\{X = 1\}$.

Bien que simple, cette remarque à propos des indicatrices et des variables de Bernoulli n'est pas seulement formelle, et a son utilité.

d. Variable aléatoire prenant deux valeurs réelles

Si X est à valeurs dans $\{a, b\}$, où a et b sont deux réels distincts, la variable $Y = \dfrac{X-a}{b-a}$ suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ avec $p = P(X = b) = 1 - P(X = a)$.
Autrement dit, on peut écrire $X = a + (b-a)Y$ où Y suit une loi de Bernoulli.
Le cas particulier $\{a, b\} = \{-1, 1\}$ est tellement important que les variables correspondantes ont un nom : variables de Rademacher (h.p.).

e. Loi binomiale

Définition On dit qu'une variable aléatoire suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}_*$ et $p \in [0,1]$, ou qu'elle suit une loi $\mathscr{B}(n, p)$, lorsqu'elle est à valeurs dans $[\![0, n]\!]$ et vérifie

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

La loi $\mathscr{B}(n, p)$ est donc la loi du nombre de succès dans l'expérience consistant à répéter n fois des expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre p.
Il est surtout important de savoir que la loi $\mathscr{B}(n, p)$ est la loi de la somme de n variables indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$ (voir plus loin).
La loi de Bernoulli est une loi binomiale particulière ($n = 1$).

f. Petites questions

Si $X_1, \dots, X_n$, mutuellement indépendantes, suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $p_1, \dots, p_n$, quelle est la loi de la variable aléatoire $X_1 \dots X_n$?
Quelle est la loi de la variable aléatoire $\mathrm{Max}(X_1, \dots, X_n)$?

II Indépendance de deux variables aléatoires

II.1 Lois conditionnelles

a. Préambule

Soit $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace probabilisé. Si $A \in \mathscr{A}$, A non négligeable ($P(A) \neq 0$), on a défini une probabilité P_A sur $(\Omega, \mathscr{A})$:

$$P_A \,:\, B \longmapsto \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ce qui fait de $(\Omega, \mathscr{A}, P_A)$ un nouvel espace probabilisé, avec le même univers, les mêmes évènements, mais une probabilité différente.
Soit Y une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Alors Y est encore une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, P_A)$. Mais le changement de probabilité change sa loi. La nouvelle loi sera la « loi de Y sachant A ». On peut la noter $P_{Y|A}$, par exemple.
Le plus souvent, l'évènement A est lié à une autre variable aléatoire X, par exemple $A = (X = x)$.

b. Définition

Définition Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans E et F respectivement. Soit $x \in E$ tel que $P(X = x) > 0$. On définit la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ par

$$\forall B \in \mathscr{P}(F) \qquad P_{Y|(X=x)}(B) = P_{(X=x)}(Y \in B) = \frac{P(Y \in B, X = x)}{P(X = x)}$$

Remarque La loi de Y sachant $(X = x)$ est donc la loi d'une variable aléatoire...qui s'appelle Y...mais qui n'a pas même loi que Y...on a changé la probabilité sur l'espace de départ, ce qui change la loi de Y. Autrement dit, la loi de Y sachant $(X = x)$, c'est bien (la loi de Y) (sachant $(X = x)$), ce n'est pas (la loi de) (Y sachant $(X = x)$).

Remarque sur les notations : On note en général $(Y \in B, X = x)$ (notation utilisée ci-dessus) plutôt que $(Y \in B) \cap (X = x)$, et encore plus plutôt que $(X, Y)^{-1}(\{x\} \times B)$).

Notation-Proposition Cette « loi conditionnelle », notée $P_{Y|(X=x)}$, est une probabilité sur F.

La loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ se caractérise par les probabilités des événements élémentaires : en effet, si on connaît les

$$P_{Y|(X=x)}(\{y\}) = P_{(X=x)}(Y = y) = \frac{P\big(Y = y\,,\ X = x\big)}{P(X = x)}$$

alors on peut écrire, pour toute partie B de F,

$$P_{Y|(X=x)}(B) = \sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} P_{(X=x)}(Y = y) = \sum_{y \in B \cap Y(\Omega)} \frac{P\big(Y = y\,,\ X = x\big)}{P(X = x)}$$

c. Extension

Reprenons les notations du paragraphe précédent, et supposons X réelle. Si $P(X > x) \neq 0$, on peut définir la loi conditionnelle de Y sachant $X > x$; de même en remplaçant $>$ par $\leq$ ou $\geq$ ou $<$.

d. La loi géométrique est « sans mémoire »

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathscr{G}(p)$ $(0 < p \leq 1)$:

$$\forall n \in \mathbf{N}_* \qquad P(X = n) = (1-p)^{n-1} p$$

et, surtout :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad P(X > n) = (1-p)^n$$

Calculons, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$P(X > n + k | X > n) =$$

e. Réciproque : les lois « sans mémoire » sur $\mathbf{N}_*$ sont géométriques

Proposition Supposons que Y soit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}_*$ vérifiant

$$\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2 \qquad P(Y > n + k | Y > n) = P(Y > k)$$

Alors Y suit une loi géométrique, de paramètre $P(Y = 1)$.

On a donc une caractérisation de la loi géométrique.

Démonstration : *L'énoncé suppose implicitement que les $P(Y > n)$ ne sont jamais nuls. Sinon les probabilités conditionnelles écrites n'auraient pas de sens.*
Une idée efficace est de considérer le cas $k = 1$, et de l'écrire sous la forme

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad P(Y > n+1) = P(Y > n)\ P_{(Y>n)}(Y > n+1) = P(Y > n)\ P(Y > 1)$$

Il en ressort que la suite $(P(Y > n))_{n\geq 0}$ est géométrique, de raison $P(Y > 1)$. Notons $P(Y = 1) = \alpha$, alors $P(Y > 1) = 1 - \alpha$ (car Y est à valeurs dans $\mathbf{N}_*$). On a par récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad P(Y > n) = (1-\alpha)^n$$

et il en découle à peu près immédiatement que Y est une loi géométrique (écrire $P(Y = n) = P(Y > n-1) - P(Y > n)$ pour $n \geq 1$).

II.2 Indépendance de deux variables aléatoires

a. Définition

Proposition Soit X, Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans E et F respectivement. On note P_X, P_Y leurs lois. Alors il y a équivalence entre les trois propriétés suivantes :

(i) Pour tout $x \in E$ tel que $P(X = x) > 0$, la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ est celle de Y (i.e. $P_{Y|X=x} = P_Y$).
(ii) Pour tout $y \in F$ tel que $P(Y = y) > 0$, la loi conditionnelle de X sachant $Y = y$ est celle de X (i.e. $P_{X|Y=y} = P_X$).
(iii) Pour tout $(x, y) \in E \times F$, $\quad P\big((X, Y) = (x, y)\big) = P(X = x)\ P(Y = y)$.
(iv) pour toute partie A de E et toute partie B de F,

$$P\left((X, Y) \in A \times B\right) = P(X \in A)\ P(Y \in B)$$

Définition On dit que X et Y sont indépendantes lorsqu'elles vérifient une des quatre propriétés précédentes, donc les quatre.
On note $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Démonstration de (iii) $\Rightarrow$ (iv)

On peut supposer A et B finies ou dénombrables, quitte à les remplacer par $A \cap X(\Omega)$ et $B \cap Y(\Omega)$ respectivement. On notera donc $A = \{x_i\}_{i \in I}$ et $B = \{y_j\}_{j \in J}$. Alors

$$((X, Y) \in A \times B) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (X = x_i \text{ et } Y = y_j)$$

et la réunion est disjointe, donc

$$\begin{aligned}
P\left((X, Y) \in A \times B\right) &= \sum_{(i,j) \in I \times J} P(X = x_i \text{ et } Y = y_j) \\
&= \sum_{(i,j) \in I \times I} P(X = x_i) P(Y = y_j) \\
&= \left(\sum_{i \in I} P(X = x_i)\right)\left(\sum_{j \in J} P(Y = y_j)\right) \\
&= P(X \in A)\ P(Y \in B)
\end{aligned}$$

(toutes les sommes écrites étant des sommes de familles sommables, ce qui permet les sommations par paquets et les interversions à volonté).

La réciproque se fait en considérant le cas particulier où A et B sont des singletons, les autres équivalences se font bien (pas tellement par permutation circulaire : on montre par exemple que **(i)** et **(iii)** sont équivalents, puis on permute X et Y pour en déduire que **(ii)** et **(iii)** le sont).

II.3 Images de v.a. indépendantes par des fonctions

Proposition Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes, $f(X)$ et $g(Y)$ le sont (avec des notations "évidentes").

Démonstration Si a et b sont dans l'ensemble d'arrivée de f et g respectivement, on peut écrire

$$\begin{aligned} P\big((f(X),g(Y))=(a,b)\big) &= P\big((X,Y)\in f^{-1}(\{a\})\times g^{-1}(\{b\})\big) \\ &= P\big(X\in f^{-1}(\{a\})\big)\ P\big(Y\in g^{-1}(\{b\})\big) \\ &= P\big(f(X)=a\big)\ P\big(g(Y)=b\big) \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Exercice (Mines) Soit X une variable aléatoire discrète : on suppose que $Y=f(X)$ (f est une fonction) est indépendante de X. Que dire de Y ?

II.4 Fonctions indicatrices d'événements et indépendance

a. Définition

Si $(\Omega,\mathscr{A},P)$ est un espace probabilisé, si $A\in\mathscr{A}$, l'application $\mathbf{1}_A$ est une variable aléatoire discrète :

$$\mathbf{1}_A\ :\ \omega\mapsto \left| \begin{array}{lll} 1 & \text{si} & \omega\in A \\ 0 & \text{si} & \omega\notin A \end{array}\right.$$

Sa loi est une loi binomiale, de paramètre $P(A)$.

b. Proposition

Deux événements sont indépendants si et seulement si leurs fonctions indicatrices le sont.

III Fonction de répartition

Rien n'est au programme sur ce sujet. Les fonctions de répartition sont beaucoup moins utiles pour l'étude des variables discrètes que pour l'étude des variables continues. L'exercice qui suit a surtout pour intérêt de travailler sur les propriétés vues dans le chapitre : les fonctions de répartition sont moins importantes pour les v.a. discrètes que pour les v.a. continues.

1. Soit X une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs réelles. Justifier le fait que la fonction

   $$F : x \longmapsto P(X \leq x)$$

   est bien définie sur $\mathbf{R}$.
2. Tracer le graphe de F dans le cas où X suit une loi $\mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.
3. Etudier la monotonie de F.
4. Etudier les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de F.
5. Etudier la continuité à gauche et à droite de F (on montrera que F est continue à ...en tout point, mais qu'elle n'est pas partout continue à ...)

IV Quelques calculs sur la loi géométrique

On considère dans cet exercice deux variables aléatoires X et Y définies sur un univers probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$, indépendantes, et qui suivent une même loi géométrique $\mathscr{G}(p)$ ($0 < p \leq 1$, on notera $q = 1 - p$). Il y a une grande indépendance entre les questions.

1. Montrer que $\min(X, Y)$ est une variable aléatoire discrète sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$
2. Identifier la loi de $\min(X, Y)$.
3. Décrire une expérience aléatoire démontrant le résultat précédent.
4. On montre de même que $\max(X, Y)$ est une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$. Déterminer la loi de $\max(X, Y)$.
5. Déterminer la loi de $|X - Y|$.
6. Calculer $\mathrm{P}(Y \geq X)$. Calculer aussi $\mathrm{P}(Y > X)$ et $\mathrm{P}(Y = X)$. Donner les résultats dans le cas particulier $p = 1/2$.
7. Décrire la loi conditionnelle de X sachant $X < Y$.

Table des matières