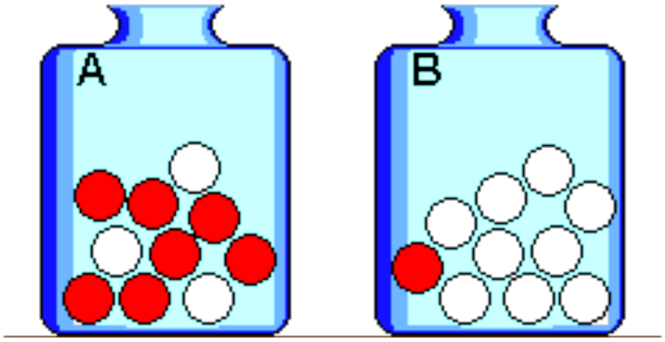
P1 : Espaces probabilisés finis



I Probabilités sur un ensemble fini

I.1 Univers, événements, probabilité

Remarque préliminaire et sans importance : évènement ou événement, c'est comme vous voulez.

Définition On appelle univers l'ensemble des résultats (ou issues, ou réalisations...) d'une expérience aléatoire.

Certes on est en droit de demander alors ce qu'on appelle une expérience aléatoire, qui appartient au vocabulaire de la modélisation probabiliste, pas à celui de la théorie des probabilités. Le type même de l'expérience aléatoire est le jet de dé. On traduit d'ailleurs souvent « alea jacta est » par « les dés sont jetés ». Le mot alea est la traduction latine du grec kubos. Jules Cesar parlait grec, semble-t-il, comme les membres de la haute société romaine de son époque.

Remarque Dans le même ordre d'idée, on peut s'intéresser à l'étymologie du mot « hasard ».

Définition Soit Ω un univers fini. On appelle événement toute partie de Ω ; on appelle événement élémentaire tout singleton $\{\omega\}$, où $\omega \in \Omega$.

Exemple On jette trois fois un dé à 6 faces. L'univers naturel associé est

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^3$$

« Le deuxième lancer donne un résultat pair » est la description en français de l'évènement

$$A = \{(a, b, c) \in \Omega \ ; \ b \equiv 0[2]\}$$

qui est bien une partie de Ω.

Définition On appelle probabilité sur un ensemble fini Ω toute application

$$P \ : \ \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow [0, 1]$$

telle que

(i) $P(\Omega) = 1$ et

(ii) $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(\Omega)^2 \qquad A \cap B = \emptyset \ \Rightarrow \ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Un espace probabilisé **fini** est un couple (Ω, P) où Ω est un ensemble fini et P une probabilité sur Ω

Attention au vocabulaire : une probabilité sur Ω n'est pas définie sur Ω, mais sur $\mathscr{P}(\Omega)$

Insistons bien : il s'agit d'un espace probabilisé fini. Les espaces probabilisés non finis posent des problèmes supplémentaires, qui nécessitent pour être formalisés l'introduction des « tribus d'évènements », voir P2.

I.2 Première propriété : additivité

Proposition Soit P une probabilité. Si $A_1, \dots, A_m$ sont des événements deux à deux disjoints ($m \geq 2$), alors

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)$$

(Démonstration par récurrence sur m).

Corollaire Si P est une probabilité sur Ω, si $A = \{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ est un événement, alors

$$P(A) = \sum_{i=1}^{m} P(\{\omega_i\}) = \sum_{a \in A} P(\{a\})$$

Autrement dit,

Proposition Une probabilité sur un univers **fini** est déterminée par les probabilités des singletons.

I.3 Exemple : probabilité uniforme

Définition Soit $N = \mathrm{Card}(\Omega)$. La probabilité uniforme sur Ω est l'unique probabilité telle que

$$\forall \omega \in \Omega \qquad P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$$

On a alors, pour tout événement A,

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}\, A}{\mathrm{Card}\, \Omega}$$

Dans le cas de la probabilité uniforme sur un univers fini, le calcul de la probabilité d'un événement équivaut au calcul de son cardinal. C'est donc un problème de dénombrement...voir P_0.

Exemple Un univers « naturel » associé à un jeu de Pile ou Face à n lancers successifs est l'ensemble $\Omega = \{0,1\}^n$ des n-uplets $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ où $\epsilon_k = 1$ si le lancer k donne Face, $\epsilon_k = 0$ sinon (on considère que la pièce ne tombe pas sur la tranche...). On le munit de la probabilité uniforme (ce qui modélise le cas où la pièce est équilibrée). La probabilité d'un évènement élémentaire est alors $\dfrac{1}{2^n}$.
Il est parfois plus intéressant de considérer l'univers $\Omega' = \{-1,1\}^n$.

I.4 Autres propriétés

a. Probabilité de l'évènement contraire

Définition-Proposition Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini. Soit A un événement (c'est-à-dire une partie de Ω). L'événement $\overline{A} = A^c = \Omega \setminus A$ (complémentaire de A) est appelé « événement contraire de A ». Sa probabilité est

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

b. Probabilité d'une intersection

Définition-Proposition Soit (Ω, P) un espace probabilisé fini, A et B deux événements. Les événements $A \cup B$ et $A \cap B$ sont respectivement appelés « A ou B » et « A et B ». On a

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

c. Croissance

Proposition Si A et B sont deux événements d'un espace probabilisé fini (Ω, P), on a

$$A \subset B \quad \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

d. Evènement impossible, évènements incompatibles

Définitions L'événement impossible est $\emptyset$. Sa probabilité est 0 (on a en effet $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ et $\emptyset \cap \emptyset = \emptyset$, on peut alors appliquer l'additivité). Deux événements A et B sont dits incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$, autrement dit lorsque « A et B » est l'événement impossible.

II Quelques univers finis

II.1 Des objets numérotés dans des boîtes numérotées

On considère l'expérience suivante : placer au hasard r objets $x_1, \ldots, x_r$ dans n boîtes $b_1, \ldots, b_n$. Définir un univers associé à cette expérience. Quel est son cardinal ?

II.2 Des objets indiscernables dans des boîtes numérotées

On considère l'expérience suivante : placer au hasard r objets indiscernables dans n boîtes $b_1, \ldots, b_n$. Définir un univers associé à cette expérience. Quel est son cardinal ?
On comprendra bien la différence avec la question précédente, dans laquelle, par exemple, tous les objets sauf x_1 dans b_1 et x_1 dans b_2 d'une part, tous les objets sauf x_2 dans b_1 et x_2 dans b_2 d'autre part sont deux issues (ou réalisations) différentes. Alors qu'ici, tous les objets sauf un dans b_1 et le dernier dans b_2, c'est une issue.

II.3 Allumettes de Banach

Un fumeur (*version historique ; dans la version oral de l'X, c'est un artificier. Ce problème a également été posé à l'oral de Centrale*) a dans chacune de ses poches (poche gauche et poche droite) une boîte de n allumettes. Lorsqu'il en a besoin d'une, il prend au hasard, avec même probabilité, la boîte dans la poche gauche ou la boîte dans la poche droite, pour y prendre son allumette. Jusqu'au moment où il s'aperçoit que la boîte tirée est vide. Définir un univers modélisant cette expérience aléatoire.

III Problèmes posés par un univers infini

...et surtout, non dénombrable...

On lance une pièce, jusqu'à ce qu'on obtienne Pile. Les tirages sont « évidemment » considérés indépendants. Si la pièce est équilibrée, on a une chance sur deux d'obtenir Pile dès le premier lancer. Mais il n'est pas tout-à-fait impossible de lancer 1000 fois la pièce et de tomber 1000 fois sur Face. Si on s'intéresse à la loi de la variable aléatoire « numéro du premier tirage où on obtient Pile », aucun univers fini ne va convenir : pour tout N, un univers décrivant le lancer N fois d'une pièce sera insuffisant.

On va donc assez naturellement s'intéresser à l'univers suivant :

$$\Omega = \{0,1\}^{\mathbf{N}_*}$$

(ensemble des suites de 0 et de 1, 0 désignant par exemple Face et 1 désignant Pile). On indexe les suites à partir du rang 1, le terme de rang k étant l'issue du k-ième lancer.

Remarquons que non seulement Ω est infini, mais il est « gros » : il n'est pas dénombrable (on peut par exemple le démontrer à l'aide d'un procédé diagonal de Cantor). La considération du développement binaire d'un réel de $[0,1[$ montre que Ω a « la puissance du continu » (il y a une bijection entre Ω et $\mathbf{R}$).

Si $\omega = (\omega_n)_{n\geq 1} \in \Omega$, la seule probabilité raisonnable (intuitivement, mais on va étayer cette intuition plus loin) donnerait

$$P(\{\omega\}) = 0$$

Et pourtant l'événement $\{\omega\}$ n'est pas impossible (on suppose que la pièce a bien un côté Pile et un côté Face, et que la probabilité de tomber sur Pile est $p \in]0,1[$). Mais définir (comme dans le cas d'un univers fini) la probabilité d'un événement comme somme des probabilités d'événements élémentaires semble voué à l'échec (en ajoutant des 0, on n'obtient pas grand chose d'intéressant) : on ne prend pas les choses par le bon bout.

Qu'est ce alors que le « bon bout » ? s'il n'est pas judicieux de considérer les « petits » événements, on peut essayer de partir des « gros ». Par exemple, si la probabilité d'obtenir Pile (c'est-à-dire 1) vaut p, si

$$A = \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega_1 = 1\}$$

il est naturel de définir $P(A) = p$ (probabilité pour que le premier lancer donne 1). Et, bien sûr, $P(\overline{A}) = 1 - p$.
Plus généralement, si $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_m) \in \{0,1\}^m$, si

$$A_\epsilon = \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega_1 = \epsilon_1,\ \omega_2 = \epsilon_2, \ldots,\ \omega_m = \epsilon_m\}$$

on aimerait bien avoir

$$P(A_\epsilon) = p^s(1-p)^{m-s} \tag{1}$$

où s désigne le nombre de ϵ_i égaux à 1 (ou encore $s = \epsilon_1 + \cdots + \epsilon_m$).

On appelle « cylindre » ou « événement de type fini » un événement défini par une condition ne portant que sur un nombre fini de lancers ; par exemple « parmi les 100 premiers lancers on obtient au moins 40 fois face ». Ou « entre les lancers 10000 et 10999 on obtient au moins une fois 5 "Pile" successifs ». Il n'est pas si compliqué de définir une probabilité satisfaisante sur ces événements, c'est-à-dire une probabilité qui vérifie (1) et les propriétés traditionnelles :

$P(\Omega) = 1$
$0 \leq P(A) \leq 1$
Si $A \cap B = \emptyset$, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (A et B événements de type fini)

(A et B désignant des événements de type fini).

Par exemple, si la pièce est équilibrée, la probabilité d'obtenir exactement 5 Pile et 5 Face entre le 31ème et le 40ème lancer vaut   .

Pour la variable aléatoire

$$X = \text{« rang du premier tirage où on obtient Pile »}$$

ces définitions suffisent : pour tout $k \geq 1$,

$$P(X = k) =$$

Remarque sur la dénomination « cylindre » : un cylindre de révolution d'axe Oz dans l'espace affine $\mathbf{R}^3$ a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$, équation qui ne porte que sur les premières coordonnées...

Mais des événements qu'on peut qualifier de "simples" ne sont pas de type fini. Par exemple, l'événement « tous les tirages de rang pair donnent Pile, tous les tirages de rang impair donnent Face » ou « la première séquence Pile-Face précède la première séquence Face-Face ». Pour le premier de ces deux événements, la probabilité, si elle peut être définie, ne peut qu'être nulle. Pour le second, c'est autre chose...Notons donc

B = « la première séquence Pile-Face précède la première séquence Face-Face »

Et remarquons que

$$B = \bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n$$

où B_n est l'événement « on obtient Pile au n-ième tirage, Face au $n+1$-ième, et il n'y a pas de séquence Face-Face ni Pile-Face avant ce n-ième tirage ».
On calcule

$$P(B_n) =$$

et, remarquant que les événements B_n sont deux-à-deux disjoints, on en déduit :

$$P(B) =$$

à condition d'admettre que $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(B_n)$. Ce faisant, on introduit une condition supplémentaire que doit vérifier une probabilité (la « sigma-additivité », qui n'est pas la simple additivité), qui n'a un sens que si une réunion dénombrable d'événements qui ont une probabilité a une probabilité. On va donner un cadre à ces choses dans le chapitre P2.

Table des matières