

S7 : Sommabilité, sommes

Avertissement aux 5/2 : ce chapitre est l'un de ceux qui ont été le plus modifiés dans le nouveau programme.

Résumé : A condition d'accepter $+\infty$ comme résultat possible, on voit ici que l'on peut manipuler comme on veut des « sommes » de réels positifs indexées par n'importe quel ensemble. On en oublie que ce ne sont pas vraiment des sommes (ce sont des bornes supérieures), puisqu'on peut les réordonner, en faire des paquets... bref élargir sans limite les idées de commutativité et d'associativité.

Lorsque les termes ne sont plus positifs, mais réels de signe quelconque ou complexes, c'est une autre histoire. Et pourtant, si on peut sommer les valeurs absolues ou les modules, on a la sommabilité, et on retrouve la liberté de faire ce que l'on veut.

Les ensembles d'indexation sont quelconques dans l'exposé théorique qui suit. Mais comme une famille sommable est nécessairement à support dénombrable, dans la pratique on ne rencontrera (à peu près) que des ensembles dénombrables.

I Sommes finies

I.1 Quelques sommes classiques

Il faut connaître

$$\sum_{k=1}^n k =$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 =$$

Les savoir par cœur est prudent, car si elles sont faciles à vérifier par récurrence, la deuxième n'est pas forcément très simple à « découvrir ».

C'est bien de savoir continuer (on développe $(k+1)^4$ par la formule du binôme, on ajoute ces identités pour $k = 0, \dots, n$, on obtient $\sum_{k=1}^n k^3$, etc...)

On sait aussi calculer

$$\sum_{k=0}^n x^k$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$$

I.2 Manipulation de sommes

La formule

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right) \quad ,$$

si I et J sont deux ensembles finis, est une conséquence de la commutativité de l'addition (l'associativité intervient plus tôt : dans la possibilité même d'écrire un Σ).

Dans le cas de sommes triangulaires, l'interversion peut aussi se faire (on peut imaginer qu'on ajoute des termes nuls) : par exemple, il faut être à l'aise avec

$$\sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=i}^n a_{i,j} \right) = \sum_{j=0}^n \left(\sum_{i=0}^j a_{i,j} \right)$$

Signalons enfin la distributivité de la multiplication sur l'addition (si on est dans un anneau), qui permet d'écrire

$$\left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in J} b_j \right) = \sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_i b_j \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_i b_j$$

Le but principal de la théorie de la sommabilité est de voir comment, et en particulier sous quelles hypothèses, on peut « sommer » une famille indexée par un ensemble infini et manipuler une telle somme presque aussi facilement qu'une famille finie (sommation par paquets, sommation dans un ordre quelconque...).

En résumé, les familles de réels positifs ne posent pas de problème. Pour les autres, il faut faire une hypothèse « de sommabilité ». On montre qu'une famille sommable ne peut pas contenir plus d'une infinité dénombrable de termes non nuls, d'où une petite étude préalable de la dénombrabilité.

Deux applications principales, dans le programme, de la sommabilité : les probabilités discrètes, et la formule de Fubini qui permet d'invertir des sommes et donne d'intéressantes formules en analyse.

II Ensembles dénombrables

II.1 Parties de \mathbf{N}

Proposition Toute partie de \mathbf{N} est finie ou en bijection avec \mathbf{N} .

Démonstration On veut montrer que toute partie infinie de \mathbf{N} est en bijection avec \mathbf{N} . Si A est une telle partie, on définit $\phi(0) = \min(A)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\phi(n+1) = \min(A \cap \llbracket 1 + \phi(n), +\infty \rrbracket)$. On définit ainsi par récurrence une application strictement croissante de \mathbf{N} dans A . Elle est surjective (soit $a \in A$; comme $\phi(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$, il existe $n \in \mathbf{N}$ unique tel que $\phi(n) \leq a < \phi(n+1)$, et alors nécessairement $a = \phi(n)$).

Remarque : le « ou » est bien sûr exclusif.

II.2 Dénombrabilité

Définition On dit qu'un ensemble A est dénombrable lorsqu'il existe une bijection entre A et \mathbf{N} .

Définition On dit qu'un ensemble A est au plus dénombrable lorsqu'il est fini ou dénombrable.

Proposition Un ensemble est au plus dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de \mathbf{N} .

Corollaire Une partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

II.3 Exemple et contre-exemple

Proposition \mathbf{R} n'est pas dénombrable; tout intervalle de \mathbf{R} non réduit à un point est non dénombrable.

Démonstration A la fois non exigible et intéressante. Et surtout, multiple...

Il suffit de montrer que $[0, 1]$ est dénombrable, ce qui peut se faire par théorème des segments emboîtés, mais le procédé diagonal de Cantor est plus amusant et probablement plus utile, rappelons-le rapidement : Si $[0, 1[$ est dénombrable, on peut « énumérer » ses éléments :

$$r_1 = 0, a_{1,1} a_{1,2} a_{1,3} a_{1,4} \dots$$

$$r_2 = 0, a_{2,1} a_{2,2} a_{2,3} a_{2,4} \dots$$

$$r_3 = 0, a_{3,1} a_{3,2} a_{3,3} a_{3,4} \dots$$

...

Et on considère $r = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$ avec $d_k = 1$ si $a_{k,k} \neq 1$, $d_k = 2$ si $a_{k,k} = 1$ (plusieurs constructions possibles, évidemment). On construit ainsi un élément de $[0, 1[$ qui n'est égal à aucun des r_k .

Il est conseillé de comprendre ce procédé pour l'oral X-ens.

Remarque : La non dénombrabilité de \mathbf{R} se rencontre parfois sous d'autres formes.

Exemple - exercice : Démontrer que $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ n'est pas dénombrable.

Lemme \mathbf{N}^2 est dénombrable.

Donnons-en deux démonstrations intéressantes, à visualiser!

Démonstration « graphique » Sans être à proprement parler exigible, c'est de la culture mathématique. La démonstration classique de Cantor « numérote » les éléments de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ par diagonales (encore...), « on voit bien » qu'on peut construire ainsi une bijection de \mathbf{N} sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Démonstration « arithmétique » Un peu moins géométrique : l'application

$$(m, n) \longmapsto 2^m(2n + 1)$$

est bijective de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur \mathbf{N} . L'idée est ici de repérer dans \mathbf{N} une infinité dénombrable de « copies » de \mathbf{N} : les impairs, les multiples de 2 mais pas de 4, les multiples de 4 mais pas de 8... autrement dit, de classer les entiers naturels suivant leur valuation 2-adique!

II.4 Stabilité de la dénombrabilité

Proposition 1 Si A_1, \dots, A_p sont dénombrables, $A_1 \times \dots \times A_p$ l'est.

Proposition 2 Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Proposition 3 S'il y a une surjection de \mathbf{N} sur un ensemble X , alors X est fini ou dénombrable.

Démonstrations non exigibles

Démonstration de la proposition 1 :

Récurrence sur p assez simple, à partir de la dénombrabilité de \mathbf{N}^2 : s'il existe une bijection f de \mathbf{N} sur A_1 et une bijection g de \mathbf{N} sur A_2 , l'application

$$(m, n) \longmapsto$$

est une bijection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $A_1 \times A_2$. Or il y a une bijection de \mathbf{N} sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (vue plus haut). Ce qui règle le cas $p = 2$, mais aussi la récurrence, car il y a une bijection très évidente entre $A_1 \times \dots \times A_p$ et $(A_1 \times \dots \times A_{p-1}) \times A_p$.

Remarque : La proposition 3 est conséquence de la proposition 2 : admettant la proposition 2, supposons que ϕ soit une surjection de \mathbf{N} sur X , alors

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{\phi(n)\}$$

Mais c'est une fausse piste, mieux vaut montrer la proposition 2 comme conséquence de la proposition 3...

Démonstration de la proposition 2

On a déjà vu que $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ était dénombrable.

$$\text{Or } \mathbf{N} \times \mathbf{N} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\} \times \mathbf{N}.$$

C'est alors simple : si chaque A_n est un ensemble fini ou dénombrable, « plaçons » les éléments de chaque A_n sur la « colonne » $\{n\} \times \mathbf{N}$, on obtiendra alors une surjection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Plus précisément, il existe pour tout $n \in \mathbf{N}$ une surjection ϕ_n de $\{n\} \times \mathbf{N}$ sur A_n (car il existe une surjection de \mathbf{N} sur A_n). L'application $(m, n) \longmapsto \phi_m(n)$ est alors une surjection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Si on montre la deuxième proposition, on aura terminé. Soit donc ψ une surjection de \mathbf{N} sur un ensemble X . Pour la « transformer » en bijection d'une partie de \mathbf{N} sur X , une idée est de rassembler les entiers naturels qui ont même image

par ϕ . On considère donc l'ensemble quotient Y de \mathbf{N} par la relation d'équivalence :

$$m \mathcal{R} n \iff \phi(m) = \phi(n)$$

On note \bar{n} la classe de n pour cette relation d'équivalence. Si $y \in Y$, soit n tel que $y = \bar{n}$. On définit $\psi(y) = \phi(n)$ (définition légitimée par le fait que $\bar{n} = \bar{m} \implies \phi(n) = \phi(m)$). On vérifie sans problème que ψ est une bijection de Y sur X . Or l'application $y \mapsto \min(y)$ est une injection de Y dans \mathbf{N} , donc une bijection de \mathbf{N} sur une partie de \mathbf{N} (son image), donc Y est finie ou dénombrable, X aussi.

Il faut retenir de la dénombrabilité ces trois résultats, et les exemples suivants :

Exemples usuels \mathbf{Z}, \mathbf{N}^p ($p \geq 1$), \mathbf{Q} sont dénombrables.

Proposition \mathbf{Q} est dénombrable.

Démonstration Il y a une bijection de \mathbf{N} sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, une surjection assez évidente de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur \mathbf{Q}^+ (au couple (p, q) on associe p/q , ça ne marche pas pour le couple $(0, 0)$ auquel on associe ce qu'on veut). Par composition, on construit donc une surjection de \mathbf{N} sur \mathbf{Q}^+ , qui est donc au plus dénombrable. Et comme \mathbf{Q}^+ n'est pas fini, il est dénombrable. Alors \mathbf{Q}_*^- est aussi dénombrable, et une réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable là aussi, voir un peu plus loin), on conclut.

Remarque : La dénombrabilité d'un ensemble ne l'empêche pas d'être assez différent de \mathbf{N} : \mathbf{Z} n'a pas de plus petit élément, entre deux éléments de \mathbf{Q} il y en a toujours un autre, etc...

Exercice : $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}, \mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ sont-ils dénombrables?

III Sommabilité : une introduction

On a vu que la série $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ était convergente, et que sa somme valait $\ln 2$ (on l'a vu à partir du développement asymptotique

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

obtenu par exemple grâce à une comparaison série-intégrale, mais la méthode la plus efficace dans le cadre du programme est de « pousser » le développement en série entière

$$\forall x \in]-1, 1[\quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

jusqu'à $x = 1$ en utilisant le théorème sur les séries alternées).

Mais cette « somme » (qui rappelons-le n'en est pas une : ce n'est que la limite d'une suite de sommes) suppose que l'on fasse bien attention à l'ordre des termes induit par l'indexation : on se persuadera astucieusement, par exemple, que

$$1 - 1/2 - 1/4 + 1/3 - 1/6 - 1/8 + 1/5 - 1/10 - 1/12 + 1/7 - \dots = \frac{\ln 2}{2}$$

(indication : se ramener à

$$1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - 1/6 + \dots = \ln 2 \quad)$$

Plus spectaculaire encore : fixons un nombre réel, 20, par exemple. Il existe un rang n_0 tel que

$$1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n_0+1} < 20 \leq 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n_0+3}$$

On aura alors

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n_0+3}\right) - 1/2 < 20$$

et il existera n_1 tel que

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n_0+3}\right) - 1/2 + \left(\frac{1}{2n_0+5} + \dots + \frac{1}{2n_1+1}\right) < 20$$

mais

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n_0+3}\right) - 1/2 + \left(\frac{1}{2n_0+5} + \dots + \frac{1}{2n_1+3}\right) \geq 20$$

on ajoute alors $-1/4$, on se retrouve au-dessous de 20, etc... On voit que l'on tient ainsi une manière de prendre tous les $\frac{(-1)^n}{n}$, une fois chacun, et de définir une série qui converge vers 20. Et on pourrait très bien remplacer 20 par $\ell \in \bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La convergence n'est « pas commutative », on ne peut pas réordonner les termes de la série.

Autre problème : si on fait des « paquets » de termes de la série, ils ne définissent pas nécessairement des séries convergentes : par exemple, le paquet des termes de rang pair pose problème, mais il n'est pas le seul... La convergence, comme on dit, n'est pas « associative », ou encore on ne peut pas sommer par paquets. Bref, pour arriver à $-\ln 2$, il faut bien sommer les termes dans l'ordre dans lequel ils sont indexés, successivement...

Toutes les séries ne demandent pas tant de précaution. Prenons la série convergente $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$. On peut prendre ses termes dans n'importe quel ordre, en faire des paquets (finis ou infinis) qui définissent toujours des séries convergentes, sommer ces paquets, on obtiendra toujours $\frac{\pi^2}{6}$. Bref, on manipule cette somme de série à peu près comme une somme finie : ce sont les valeurs prises qui comptent, pas l'ordre dans lequel on les prend... bref, le point de vue de Lebesgue dans la construction de son intégrale... D'ailleurs, la sommabilité, c'est une intégrabilité...

Cette « sommabilité » n'est pas due au fait que la série est à termes réels positifs : on peut se livrer, avec $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, aux mêmes manipulations qu'avec $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, on tendra toujours vers la même limite : $\frac{\pi^2}{8}$.

Ajoutons que si l'ordre des termes n'intervient plus, il n'est pas utile de se limiter à sommer des familles indexées par \mathbf{N} : on peut s'intéresser aux familles indexées par n'importe quel ensemble dénombrable, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ donnant par exemple des résultats très utiles.

IV Somme des familles de réels positifs

L'hypothèse « réels positifs » est cruciale dans les considérations qui suivent.

IV.1 Définition, premiers exemples

a. Définition

Définition

Soit I un ensemble quelconque (fini ou infini, éventuellement non dénombrable). On note $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I (*Notation non officielle*).

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels **positifs** indexée par I . On définit alors la somme de la famille $(u_i)_{i \in I}$:

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left(\left\{ \sum_{i \in J} u_i ; J \in P_f(I) \right\} \right)$$

C'est un élément de $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$.

b. Familles finies de réels positifs

Leur somme est égale à leur somme !

c. Familles indexées par \mathbf{N}

Proposition

Pour une famille $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ **de réels positifs** indexée par \mathbf{N} , deux cas peuvent se présenter :

Si la série $\sum u_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ définie dans le chapitre S2 et $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n$ définie ci-dessus sont égaux, et sont deux manières différentes de noter la somme de la famille.

Si la série $\sum u_n$ diverge, $\sum_{n \in \mathbf{N}} u_n = +\infty$, il est donc cohérent de définir

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty.$$

IV.2 Invariance par permutation

Proposition Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, I étant dénombrable.
Soit σ une permutation de I .

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_{\sigma(i)}$$

(cette valeur commune étant un réel positif ou $+\infty$).

Rappel Une permutation de I est une bijection de I dans I .

Démonstration Il suffit de remarquer que σ définit une bijection de l'ensemble des parties finies de I sur lui-même.

Remarque Cette propriété est parfois appelée « commutativité »

Proposition

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs, I étant dénombrable.

Soit $k \mapsto i_k$ une bijection de \mathbf{N} sur I (i.e. une « indexation » de I). Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

(cette valeur commune étant un réel positif ou $+\infty$).

Démonstration : A partir de la bijection $k \mapsto i_k$ on définit facilement une bijection de l'ensemble des parties finies de \mathbf{N} sur l'ensemble des parties finies de I .

IV.3 Sommation par paquets

Théorème Soit I un ensemble quelconque, $(I_j)_{j \in J}$ une « partition » de I :

$$(j \neq j') \Rightarrow I_j \cap I_{j'} = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{j \in J} I_j = I$$

où J est lui aussi un ensemble quelconque.

Il peut y avoir des I_j vides, auquel cas ce n'est pas une « vraie » partition.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs.

Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

Explication On calcule ici dans $[0, +\infty]$ (plutôt $[0, +\infty[\cup\{+\infty\}]$), avec des conventions naturelles : si l'un des $\sum_{i \in I_j} u_i$ « vaut » $+\infty$, alors $\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) = +\infty$. Cela revient à étendre la notion de somme d'une famille de réels positifs à une somme d'objets qui sont réels positifs ou $+\infty$ avec la convention très simple suivante : dès qu'un v_j vaut $+\infty$ (tous les v_j étant dans $[0, +\infty]$) on a $\sum_{j \in J} v_j = +\infty$.

Démonstration *Un petit peu technique, pas infaisable, mais hors-programme.*

Il est clair que, pour tout j , $\sum_{i \in I_j} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$ (les parties finies de I_j sont des parties finies de I). Donc si l'un des $\sum_{j \in J} u_i$ vaut $+\infty$, alors $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$. On peut donc supposer dans la suite que, pour tout $j \in J$, $\sum_{i \in I_j} u_i < +\infty$.

Notons $S = \sum_{i \in I} u_i$ et $\Sigma = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$, constatons d'abord que, si A est une partie finie de I , pour tout $a \in A$ il existe $j_a \in J$ unique tel que $a \in I_{j_a}$. Soit $J' = \bigcup_{a \in A} j_a$.

Alors

$$\sum_{a \in A} u_a \leq \sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) \leq \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) \quad (1)$$

Réciproquement, soit J' une partie finie de J . Réindexons I_1, \dots, I_p les I_j pour $j \in J'$. Pour toutes parties finies X_1, \dots, X_p de I_1, \dots, I_p respectivement, on a

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in X_k} u_i \right) = \sum_{i \in X_1 \cup \dots \cup X_p} u_i \leq \sum_{i \in I} u_i$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour tout k il existe X_k partie finie de I_k telle que

$$\sum_{i \in X_k} u_i \geq \sum_{i \in I_k} u_i - \frac{\epsilon}{p}$$

Alors

$$\sum_{k=1}^p \left(\sum_{i \in X_k} u_i \right) \geq \sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) - \epsilon$$

Donc, pour tout $\epsilon > 0$,

$$\sum_{i \in I} u_i \geq \sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right) - \epsilon$$

et donc $\sum_{i \in I} u_i \geq \sum_{j \in J'} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$. On obtient alors l'inégalité réciproque de (1).

IV.4 Théorème de Fubini positif

Théorème Soit I, I' deux ensembles quelconques, $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times I'}$ une famille de réels positifs indexée par $I \times I'$. Alors

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in I'} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in I'} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

(toujours dans $[0, +\infty[\cup \{+\infty\}$).

Le théorème de sommation par paquets montre en effet que ces deux sommes valent $\sum_{(i,j) \in I \times I'} u_{i,j}$. Avec des paquets bien naturels...

Rappelons les conventions : dès qu'un v_k vaut $+\infty$ (tous les v_k étant dans $[0, +\infty]$) on a $\sum_{k \in K} v_k = +\infty$

IV.5 Opérations

Proposition Soit $(u_i)_{i \in I}, (v_i)_{i \in I}$ deux familles de réels positifs, I étant un ensemble quelconque. Soit $\alpha \in \mathbf{R}^+$. Alors

$$\sum_{i \in I} (u_i + \alpha v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \alpha \sum_{i \in I} v_i$$

Bien sûr, pour que cette propriété soit toujours vraie, on a besoin de quelques conventions naturelles ;

$\alpha \times +\infty = +\infty$... pour $\alpha > 0$, car $0 \times +\infty = 0$

$x + (+\infty) = +\infty$ dès que $x \in [0, +\infty]$.

Et deux petits résultats tellement simples qu'ils ne sont pas dans le programme pour ne pas surcharger :

Propriété 1 Si I est un ensemble quelconque, si $\forall i \in I \quad 0 \leq a_i \leq b_i$, alors

$$\sum_{i \in I} a_i \leq \sum_{i \in I} b_i$$

(avec la convention naturelle $\forall x \in [0, +\infty] \quad x \leq +\infty$).

Propriété 2 Si I est un ensemble quelconque, si J est une partie quelconque de I , si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de réels positifs, alors

$$\sum_{i \in J} a_i \leq \sum_{i \in I} a_i$$

Résumé : Avec les familles de réels positifs, on fait tout ce qu'on veut, quitte à calculer avec $+\infty$.

IV.6 Un exercice

Exercice Soit $s > 1$. On note $\zeta(s) = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^s}$. Montrer que

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\sum_{n=k}^{+\infty} \frac{1}{n^{s+1}} \right)$$

V Sommabilité des familles de réels positifs

Définition Soit I un ensemble, $(u_i)_{i \in I}$ une famille de réels positifs. On dit que $(u_i)_{i \in I}$ est sommable lorsque $\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Proposition Si $(u_i)_{i \in I}$ est une famille sommable de réels positifs, alors $\{i \in I ; u_i > 0\}$ est au plus dénombrable.

Démonstration On peut remarquer que, pour tout $n \geq 1$, $\{i \in I ; u_i \geq 1/n\}$ est nécessairement fini...

VI Familles sommables de nombres réels ou complexes

Avec une famille de nombres réels de signes quelconques, ou de nombres complexes, on ne fait plus ce qu'on veut. Mais si on montre que cette famille est sommable, de nouveau tout est permis.

VI.1 Sommabilité, somme

Définition

Soit I un ensemble quelconque, $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par I . On dit que la famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable lorsque $(|u_i|)_{i \in I}$ l'est. Autrement dit :

$$(u_i)_{i \in I} \text{ sommable} \iff \sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$$

Remarque Il est donc nécessaire, pour que $(u_i)_{i \in I}$ soit sommable, d'avoir $\{i \in I; u_i \neq 0\}$ au plus dénombrable.

Somme d'une famille réelle sommable

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres réels indexée par I . On écrit, pour tout $i \in I$,

$$u_i^+ = \max(u_i, 0) \quad , \quad u_i^- = \max(-u_i, 0)$$

ou plus simplement,

si $u_i \geq 0$, $u_i^+ = u_i$, $u_i^- = 0$;

si $u_i \leq 0$, $u_i^- = -u_i$, $u_i^+ = 0$.

Ce qui fait que

$$u_i = u_i^+ - u_i^- \quad , \quad |u_i| = u_i^+ + u_i^-$$

La famille $(u_i)_{i \in I}$ est donc sommable si et seulement si les deux familles $(u_i^+)_{i \in I}$ et $(u_i^-)_{i \in I}$ le sont. Ce qui permet de définir

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} u_i^+ - \sum_{i \in I} u_i^-$$

C'est une définition théorique, qui ne sert jamais dans la pratique à calculer une somme.

Somme d'une familles complexe sommable

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille de nombres complexes indexée par I . La famille $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si les deux familles $(\text{Re}(u_i))_{i \in I}$ et $(\text{Im}(u_i))_{i \in I}$ le sont. On définit alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{i \in I} \text{Re}(u_i) + i \sum_{i \in I} \text{Im}(u_i)$$

Cas $I = \mathbf{N}$ La famille $(u_i)_{i \in \mathbf{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est **absolument** convergente. Sa somme est alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Cas $I = \mathbf{Z}$ La famille $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ et $\sum_{n \geq 0} |u_{-n}|$ convergent **absolument**.

Quand c'est le cas, $\sum_{n \in \mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$

Remarque Si la famille $(u_i)_{i \in I}$ n'est pas sommable, elle n'a pas de somme... sauf si elle est à termes réels positifs, auquel cas elle a bien une somme :

$$\sum_{i \in I} u_i = +\infty.$$

Lemme Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partie finie J de I telle que

$$\left| \sum_{i \in J} u_i - \sum_{i \in I} u_i \right| \leq \epsilon$$

VI.2 Invariance par permutation

Théorème Soit σ une permutation de I , i.e. une bijection de I sur lui-même.

Alors $(u_i)_{i \in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i \in I}$ l'est, et le cas échéant,

$$\sum_{i \in I} u_{\sigma(i)} = \sum_{i \in I} u_i$$

VI.3 Espace vectoriel $\ell^1(I)$

Proposition Si $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ sont deux familles sommables de nombres complexes, alors $(u_i + \lambda v_i)_{i \in I}$ est sommable, et

$$\sum_{i \in I} u_i + \lambda v_i = \sum_{i \in I} u_i + \lambda \sum_{i \in I} v_i$$

Notation On note $\ell^1(I)$ le \mathbf{C} -espace vectoriel des familles sommables de nombres complexes indexées par I .

Remarque On note parfois $\ell^1(I)$ le \mathbf{R} -espace vectoriel des familles sommables de nombres réels indexées par I .

VI.4 Sommation par paquets

Il va bien falloir, si on abandonne la positivité des termes, quelques hypothèses.

Car sinon, avec des paquets judicieux :

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - \dots) = 0$$

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 1$$

ce qui est ennuyeux.

Théorème de sommation par paquets Soit I un ensemble quelconque, $(I_j)_{j \in J}$ une famille de parties de I telles que :

$$(j \neq j') \Rightarrow I_j \cap I_{j'} = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{j \in J} I_j = I$$

(J est lui aussi un ensemble quelconque).

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille **sommable** de réels ou de complexes. Alors

$$\sum_{i \in I} u_i = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I_j} u_i \right)$$

(ce qui signifie : que chaque famille $(u_i)_{i \in I_j}$ est sommable, que la famille des sommes est sommable, et que la somme des sommes vaut la somme...)

La démonstration est hors-programme. Bien voir la différence avec le théorème de sommation par paquets pour des familles de réels positifs : ici, on doit d'abord montrer la sommabilité avant d'appliquer le théorème. Comment montrer la sommabilité? on met des barres de valeur absolue ou de module, puis on utilise les outils du **IV**.

VI.5 Théorème de Fubini

Théorème Soit I, I' deux ensembles quelconques, $(u_{i,j})_{(i,j) \in I \times I'}$ une famille **sommable** de nombres réels ou complexes, indexée par $I \times I'$. Alors

$$\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in I'} u_{i,j} \right) = \sum_{j \in I'} \left(\sum_{i \in I} u_{i,j} \right)$$

(toujours dans $[0, +\infty[\cup\{+\infty\})$).

Le théorème de sommation par paquets montre en effet que ces deux sommes valent $\sum_{(i,j) \in I \times I'} u_{i,j}$.

Recette : Si les $u_{i,j}$ ne sont pas positifs, on pose $v_{i,j} = |u_{i,j}|$. On peut appliquer le théorème de Fubini positif, qui dit qu'il suffit qu'un des deux calculs $\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in I'} v_{i,j} \right)$ ou $\sum_{j \in I'} \left(\sum_{i \in I} v_{i,j} \right)$ donne un nombre réel (i.e. ne donne pas $+\infty$) pour que la famille $(v_{i,j})$ soit sommable, ce qui équivaut à dire que la famille $(u_{i,j})$ est sommable. On peut alors appliquer le théorème de Fubini à la famille $(u_{i,j})$.

VI.6 Cas particulier d'une famille produit; produit de Cauchy

a. Sommabilité, sommation d'une famille produit

Proposition Si $(a_i)_{i \in I}$ et $(b_j)_{j \in I'}$ sont sommables, alors $(a_i b_j)_{(i,j) \in I \times I'}$ l'est, et

$$\sum_{(i,j) \in I \times I'} a_i b_j = \left(\sum_{i \in I} a_i \right) \left(\sum_{j \in I'} b_j \right)$$

b. Extension

Proposition Si I_1, \dots, I_p sont p ensembles, si $(a_i^{(1)})_{i \in I_1}, (a_i^{(2)})_{i \in I_2}, \dots$ et $(a_i^{(p)})_{i \in I_p}$ sont sommables, alors $(a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_p}^{(p)})_{(i_1, \dots, i_p) \in I_1 \times \dots \times I_p}$ l'est, et

$$\sum_{(i_1, \dots, i_p) \in I_1 \times \dots \times I_p} a_{i_1}^{(1)} \dots a_{i_p}^{(p)} = \left(\sum_{i \in I_1} a_i^{(1)} \right) \times \dots \times \left(\sum_{i \in I_p} a_i^{(p)} \right)$$

Ou mieux : « le résultat précédent s'étend à un nombre fini quelconque de familles sommables ». C'est mieux, non ?

c. Un exercice

On note comme d'habitude, si $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

On considère l'ensemble des nombres premiers, rangés par ordre croissant; $p_1 = 2 < p_2 = 3 < p_3 = 5 < \dots$. On fixe un réel $s > 1$. Soit $n \geq 1$, et, pour $(k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{N}^n$, posons

$$u_{k_1, \dots, k_n} = (p_1^{k_1} \dots p_n^{k_n})^{-s}$$

1. Montrer que la famille u ainsi définie est sommable. On note σ sa somme.
2. Montrer que $\sum_{k=1}^{p_{n+1}-1} \frac{1}{k^s} \leq \sigma \leq \zeta(s)$.
3. Justifier la formule suivant, dans laquelle \mathcal{P} désigne l'ensemble des nombres premiers :

$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \zeta(s)$$

Formule très célèbre, et cruciale en théorie analytique des nombres.

d. Produit de Cauchy

Proposition Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes absolument convergentes. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Alors $\sum w_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Démonstration Commençons par le cas où (u_n) et (v_n) sont à termes réels positifs. On a alors par théorème de Fubini positif

$$\sum_{(m,n) \in \mathbf{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right)$$

Posons, d'autre part, pour tout $p \in \mathbf{N}$, $I_p = \{(m, n) \in \mathbf{N}^2 ; m + n = p\}$. Alors $\mathbf{N}^2 = \bigcup_{p=0}^{+\infty} I_p$, et la réunion est disjointe. Par théorème de sommation par paquets des familles de réels positifs appliqué à la famille $(u_m v_n)_{(m,n) \in \mathbf{N}^2}$, on a

$$\sum_{(m,n) \in \mathbf{N}^2} u_m v_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \underbrace{\left(\sum_{(m,n) \in I_p} u_m v_n \right)}_{w_p}$$

Le résultat est donc montré pour les familles de réels positifs, d'ailleurs sans hypothèse de convergence : le calcul que l'on vient d'écrire prouve, aussi bien, que si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n > 0$ implique $\sum_{p=0}^{+\infty} w_p = +\infty$, la réciproque étant d'ailleurs vraie.

Pour le cas général, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, le cas précédent et la majoration

$$|w_p| \leq \sum_{k=0}^p |u_k| |v_{p-k}|$$

montrent que $\sum |w_p|$ converge. D'autre part, la famille $(u_m v_n)_{(m,n) \in \mathbf{N}^2}$ est sommable, on peut donc refaire les calculs précédents (Fubini, sommation par paquets) et on conclut.

VII Une suite double « contre-exemple »

On définit $I = \{(p, q) \in \mathbf{N}_*^2 ; p \neq q\}$ et, si $(p, q) \in I$, $u_{p,q} = \frac{1}{p^2 - q^2}$.

Il est clair, par comparaison (équivalent) à une série de Riemann, que pour tout q la série $\sum_{p \neq q} u_{p,q}$ converge. Notons

$$\sigma_q = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^{+\infty} u_{p,q}$$

et essayons de calculer σ_q . Pour cela, on peut penser se servir de la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{p^2 - q^2} = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{p - q} - \frac{1}{p + q} \right)$$

On peut regarder

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} \sum_{p=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1} \right) =$$

(téléscopisme pas trop compliqué) ; si $q > 1$, c'est un peu plus alambiqué, on ne peut guère échapper aux sommes partielles (pour ne pas couper en deux séries divergentes) : en supposant $N > q$,

$$\begin{aligned} \sigma_q^{(N)} &= \frac{1}{2q} \left(\sum_{p=1}^{q-1} \left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q} \right) + \sum_{p=q+1}^N \left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2q} \left(- \sum_{j=1}^{q-1} \frac{1}{j} - \sum_{j=q+1}^{2q-1} \frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{N-q} \frac{1}{j} - \sum_{j=2q+1}^{q+N} \frac{1}{j} \right) \end{aligned}$$

On simplifie les deux premières sommes avec la troisième, en supposant $N - q > 2q - 1$ ce qui n'est pas gênant puisqu'on va prendre les limites quand $N \rightarrow +\infty$:

$$\sigma_q^{(N)} = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{q} + \sum_{j=2q}^{N-q} \frac{1}{j} - \sum_{j=2q+1}^{q+N} \frac{1}{j} \right)$$

et enfin on simplifie les deux sommes restantes entre elles :

$$\sigma_q^{(N)} = \frac{1}{2q} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{2q} - \sum_{j=N-q+1}^{N+q} \frac{1}{j} \right)$$

La somme restante tend vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$ (il n'est pas nécessaire pour cela d'avoir le développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique), donc

$$\sigma_q = \frac{3}{4q^2}$$

Conclusion : $\sum \sigma_q$ converge, et $\sum_{q=1}^{+\infty} \sigma_q = \frac{\pi^2}{8}$.

En réfléchissant un peu, on peut en conclure que la famille $(u_{p,q})$ n'est pas sommable...

Table des matières

I	Sommes finies	2
I.1	Quelques sommes classiques	2
I.2	Manipulation de sommes	3
II	Ensembles dénombrables	4
II.1	Parties de \mathbf{N}	4
II.2	Dénombrabilité	4
II.3	Exemple et contre-exemple	4
II.4	Stabilité de la dénombrabilité	5
III	Sommabilité : une introduction	8
IV	Somme des familles de réels positifs	10
IV.1	Définition, premiers exemples	10
a.	Définition	10
b.	Familles finies de réels positifs	10
c.	Familles indexées par \mathbf{N}	10
IV.2	Invariance par permutation	11
IV.3	Sommation par paquets	11
IV.4	Théorème de Fubini positif	13
IV.5	Opérations	13
IV.6	Un exercice	14
V	Sommabilité des familles de réels positifs	14
VI	Familles sommables de nombres réels ou complexes	14
VI.1	Sommabilité, somme	14
VI.2	Invariance par permutation	16
VI.3	Espace vectoriel $\ell^1(I)$	16
VI.4	Sommation par paquets	16
VI.5	Théorème de Fubini	17
VI.6	Un exercice	18
VI.7	Cas particulier d'une famille produit; produit de Cauchy	18
a.	Sommabilité, sommation d'une famille produit	18

sommabilité (S7)

b.	Extension	18
c.	Produit de Cauchy	19
VII Une suite double « contre-exemple »		20