S5 : Régularité des suites et des séries de fonctions numériques

Les fonctions dont il est question dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

I Suites et séries de fonctions continues

Il s'agit d'un rappel :

Théorème (suites) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Si les f_n sont continues, et si la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment vers une fonction f, alors f est continue.

Théorème (séries) Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. Si les f_n sont continues sur I, et si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue.

Remarque On dit parfois que la continuité se transmet par convergence uniforme sur tout segment. Si on avait envie de croire que la dérivabilité, ou la classe C^1, se transmettait de même, un théorème célèbre nous en dissuaderait…

II Convergence uniforme et intégration sur un segment

Proposition (suites) Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f, et que f est continue par morceaux. Alors la suite $\left(\int_{[a,b]} f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers $\int_{[a,b]} f$.
Autrement dit,

$$\left[f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{C.U.} f \quad \text{sur } [a,b]\right] \Longrightarrow \left[\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right]$$

Remarque Les f_n sont à peu près toujours continues. Si c'est le cas, inutile alors de supposer que f est continue par morceaux, car elle est automatiquement continue. En revanche,

Exercice : Construire une suite de fonctions continues par morceaux sur $[0,1]$ convergeant uniformément vers une fonction qui, elle, n'est pas continue par morceaux.

Remarque Evidemment, si on remplace dans la proposition la convergence uniforme par la convergence simple, ça ne marche plus. Il est bon de savoir donner un exemple :

Proposition (séries) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs dans **R** ou **C**. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$, et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux. Alors $\sum_n \left(\int_a^b f_n\right)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)dt$$

Remarque Les f_n sont à peu près toujours, dans la pratique, continues, et alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_k$ l'est.

Remarque Comme pour la transmission de la continuité, comme pour la double limite, ces résultats peuvent permettre de démontrer qu'une convergence n'est pas uniforme : si (f_n) converge simplement sur $[a,b]$ vers f, si $\left(\int_a^b f_n\right)$ ne converge pas vers $\int_a^b f$, alors la convergence n'est pas uniforme.

III Convergence uniforme sur tout segment et primitivation

Il faut bien comprendre que, si les f_n sont de classe C^1, si la suite (f_n) converge uniformément vers f, f n'a aucune raison d'être de classe C^1, et quand bien même elle le serait, (f_n') n'a aucune raison de converger vers f'. La dérivation déstabilise, l'intégration (et donc la primitivation) régularise au contraire.

Proposition (suites)

Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit $a \in I$ fixé.
On suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction f (qui est donc continue).
On définit pour $x \in I$:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad , \qquad F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt$$

Alors la suite (F_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers F.

Autrement dit, il y a transmission de la convergence uniforme sur tout segment par primitivation (à condition bien sûr de prendre des primitives s'annulant toutes en un même point donné fixé).

Proposition (séries) Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues sur un intervalle I. On suppose que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I. Soit $a \in I$; alors $\displaystyle\sum_n \left(x \mapsto \int_a^x f_n(t)dt\right)$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers $\displaystyle x \mapsto \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt$.

IV Suites et séries de fonctions de classe C^1

IV.1 Suite de fonctions de classe C^1

Proposition Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans **R** ou **C**. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur I
3. La suite $(f'_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment (inclus dans I)

On note f la limite (simple) de la suite (f_n).

Alors

1. f est de classe C^1 sur I.
2. Pour tout $x \in I$, $f'(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(f'_n(x)\big)$.
3. La convergence de la suite (f_n) vers f est uniforme sur tout segment.

Remarque 1 Définir f comme limite simple de la suite (f_n) est bien naturel. En revanche, on évitera de « poser » f' égale à la limite de la suite (f_n). Quand f est définie, f' existe ou n'existe pas, vaut ce qu'elle vaut, mais on n'a pas le droit d'y toucher.

Remarque 2 La conclusion 3 est nettement moins utilisée que les autres.

Démonstration Notons $h_n = f'_n$, et notons h la limite (qui est uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions (h_n). D'après le résultat sur les primitives, la suite de fonctions $\left(x \longmapsto \int_a^x h_n(t)\mathrm{d}t\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout segment vers la fonction $x \longmapsto \int_a^x h(t)\mathrm{d}t$.

Pour « remonter » de la dérivée à la fonction on a la très utile formule

$$\forall x \in I \qquad f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x h_n(t)\mathrm{d}t$$

que l'on peut réécrire fonctionnellement

$$f_n = \widetilde{f_n(a)} + \left(x \longmapsto \int_a^x h_n(t)\mathrm{d}t\right)$$

et intéressons-nous

…d'abord au premier membre de cette égalité : la suite (f_n) converge simplement vers f.

…au second membre maintenant : la suite de fonctions constantes $\left(\widetilde{f_n(a)}\right)_{n\geq 0}$ converge vers la fonction constante $\widetilde{f(a)}$. Converge comment ? simplement, uniformément, uniformément sur tout segment, pour une suite de fonctions constantes c'est la même chose. Et donc, en utilisant **III.**, le second membre converge uniformément sur tout segment vers
$x \longmapsto f(a) + \displaystyle\int_a^x h(t)\mathrm{d}t$.
Mais le second et le premier membre sont égaux, les limites sont donc bien sûr les mêmes. Donc on a, pour tout x,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x h(t)\mathrm{d}t$$

ce qui montre bien que f est C^1, et que sa dérivée est h, limite de (h_n). Et comme la convergence de la suite au second membre est uniforme sur tout segment, celle de la suite au premier membre l'est aussi.

Exercice (Oral Mines) Soit f une fonction de classe C^1 sur un segment $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$). Montrer qu'il existe une suite (ϕ_n) de fonctions polynomiales à coefficients dans $\mathbf{K}$ telles que les suites (ϕ_n) et (ϕ'_n) convergent uniformément sur $[a, b]$ vers f et f' respectivement.
Très bon énoncé de compréhension du théorème précédent.

IV.2 Série de fonctions de classe C^1

Proposition Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans **R** ou **C**. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^1 sur I
2. $\sum f_n$ converge simplement sur I
3. $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 sur I.
2. On a : $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'$.
3. Et la convergence de $\sum f_n$ est uniforme sur tout segment.

Exemples classiques, voire très classiques (presque du cours) : Montrer que les sommes des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ (la fonction ζ et la fonction « ζ alternée ») sont de classe C^1 sur leur domaine de définition.

V Suites et séries de fonctions de classe C^k

V.1 Suite de fonctions de classe C^k ($k \geq 1$)

Proposition Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I, à valeurs dans **R** ou **C**. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^k sur I
2. Chaque suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbf{N}}$ $(0 \leq j \leq k-1)$ converge simplement sur I
3. La suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors f, limite de la suite (f_n), est de classe C^k sur I.

Et, pour tout $j \in [\![0, k]\!]$, $f^{(j)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(f_n^{(j)}\right)$.

V.2 Suite de fonctions de classe C^∞

Proposition Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur I
2. La suite $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge simplement sur I
3. Chaque suite $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbf{N}}$ $(j \geq 1)$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors f, limite de la suite (f_n), est de classe C^∞ sur I. Sa dérivée j-ième est, pour tout j, la limite de la suite $(f_n^{(j)})$.

On peut affaiblir l'hypothèse 3. et supposer que les suites $(f_n^{(j)})_{n\in\mathbf{N}}$ convergent uniformément sur tout segment seulement si $j \geq j_0$, j_0 entier naturel quelconque.

V.3 Série de fonctions de classe C^k ($k \geq 1$)

Proposition Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^k sur I
2. Chaque série $\sum_n f_n^{(j)}$ $(0 \leq j \leq k-1)$ converge simplement sur I
3. La série $\sum_n f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^k sur I. Et, pour tout j entre 1 et k,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$$

V.4 Série de fonctions de classe C^∞

Proposition Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un intervalle I. On suppose :

1. Les fonctions f_n sont de classe C^∞ sur I
2. La série $\sum f_n$ converge simplement sur I
3. Chaque série $\sum_n f_n^{(j)}$ $(j \geq 1)$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I

Alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^∞ sur I. Et, pour tout $j \in \mathbf{N}^*$,

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(j)} = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n^{(j)}$$

Exemple classique : Montrer que les sommes des séries $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}$ (la fonction ζ et la fonction « ζ alternée ») sont de classe C^∞ sur leur domaine de définition.

Table des matières

I Suites et séries de fonctions continues **1**

II Convergence uniforme et intégration sur un segment **2**

III Convergence uniforme sur tout segment et primitivation **4**

IV Suites et séries de fonctions de classe C^1 **5**

IV.1 Suite de fonctions de classe C^1 5

IV.2 Série de fonctions de classe C^1 7

V Suites et séries de fonctions de classe C^k **8**

V.1 Suite de fonctions de classe C^k $(k \geq 1)$ 8

V.2 Suite de fonctions de classe C^∞ 8

V.3 Série de fonctions de classe C^k $(k \geq 1)$ 9

V.4 Série de fonctions de classe C^∞ 9