C7 : exemples

Dire si les intégrales suivantes ont un sens. Lorsqu'il y a un paramètre, dire pour quelles valeurs du paramètre les intégrales ont un sens.

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{1+t^2} dt$

La fonction $f\ :\ t \longmapsto \dfrac{\sin t}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus

$$|f(t)| \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

Par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$.

Autre rédaction : $|f(t)| \leq \dfrac{1}{1+t^2}$ donc, par comparaison, comme $\dfrac{1}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^2}\ldots$

Autre rédaction :

$$|f(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Autre rédaction (déconseillée) :

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

parfaitement équivalent à la première rédaction, vu que le O « se moque du signe ». Mais si le correcteur sait que vous, vous faites attention au signe, et que vous savez que l'intégrabilité de f est celle de $|f|$, c'est mieux.

Autre rédaction : La fonction $f\ :\ t \longmapsto \dfrac{\sin t}{1+t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. De plus

$$|f(t)| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$$

Par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $[0,+\infty[$.

Cette rédaction ne semble pas très naturelle ici, sauf si on préfère vraiment les o aux O.

---

2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\text{Arctan}t}{t} dt$

La fonction $f\ :\ t \longmapsto \dfrac{\text{Arctan}t}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0)=1$.
On a

$$f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2t}$$

donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$. Or $f \geq 0$, on ne peut donc pas avoir une intégrale « semi-convergente ».

---

3. $\displaystyle\int_0^1 \ln t\ dt$

Première rédaction : ln est continue sur $]0,1]$, négative. Par croissances comparées,

$$|\ln t| \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$$

donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, ln est intégrable sur $]0,1]$. (les valeurs absolues sur le ln sont facultatives).
Deuxième rédaction : Soit $x \in]0,1]$. Alors

$$\int_x^1 \ln t\ \mathrm{d}t = -1 - x\ln x + x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$$

donc l'intégrale converge. Or la fonction ln est de signe constant, donc elle est intégrable sur $]0,1]$.

---

4. $\displaystyle\int_0^1 (-\ln t)^\alpha\ dt\ (\alpha \in \mathbf{R})$

Même si cela ressemble un petit peu à l'exemple précédent, c'est en fait très différent.
D'abord parce qu'ici on ne sait pas calculer de primitive.
Ensuite parce qu'il y a un piège : on risque de ne pas penser au problème en 1...Or, si $\alpha < 0$, il y a un problème en 1.
La fonction $f\ :\ t \longmapsto (-\ln t)^\alpha$ est continue sur $]0,1[$, positive.
• Etude sur $]0,1/2[$:
Par croissances comparées,

$$f(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$$

donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $]0, 1/2]$.

• Etude sur $[1/2, 1[$:

Partant de

$$\ln t = \ln(1 + t - 1) \underset{t \to 1}{\sim} t - 1$$

on obtient

$$f(t) \underset{t \to 1}{\sim} (1 - t)^{\alpha}$$

et donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1/2, 1[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

Conclusion : f est intégrable sur $]0, 1[$ si et seulement si $\alpha > -1$.

---

5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$

La fonction $f \ : \ t \longmapsto \dfrac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$, **positive**.

• Etude sur $]0, 1]$:

On a $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$. Donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $]0, 1]$.

• Etude sur $[1, +\infty[$:

On a $f(t) \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. Donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1, +\infty[$.

---

6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos t \ dt$

$\displaystyle\int_0^{x} \cos t \ dt$ n'a pas de limite quand $x \to +\infty$. L'intégrale n'a donc pas de sens.

---

7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t^2) \ dt$

La fonction $t \longmapsto \cos(t^2)$ est continue sur $[0, +\infty[$.

On effectue le changement de variable $t = \sqrt{u}$, $u = t^2$: $u \mapsto \sqrt{u}$ est une bijection C^1 de $]0, +\infty[$ sur lui-même. L'existence de l'intégrale équivaut à celle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \ \mathrm{d}u$$

et en cas d'existence elles sont égales. Comme

$$\frac{\cos u}{2\sqrt{u}} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

la fonction $u \longmapsto \dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}$, positive, est intégrable sur $]0,1]$.
En revanche, l'existence de l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}}\ \mathrm{d}u$$

demande une intégration par parties comme l'exemple standard vu dans le cours de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\ \mathrm{d}u$$

---

8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\sqrt{t})\ dt$

La fonction $t \longmapsto \cos(\sqrt{t})$ est continue sur $[0,+\infty[$.
On effectue le changement de variable $u = \sqrt{t}$, $t = u^2$. L'existence de l'intégrale équivaut à celle de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} 2u\cos u\ \mathrm{d}u$$

et en cas d'existence elles sont égales. Or, déjà $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos u\ \mathrm{d}u$ ne converge pas, alors celle-ci…On peut calculer par parties $\displaystyle\int_0^{x} u\cos u\ \mathrm{d}u$ et voir qu'il n'y a pas de limite en $+\infty$. Ou encore dire que l'aire sous une arche est grande : si $k \geq 1$,

$$\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} u\cos u\ \mathrm{d}u \geq (-\pi/2+2k\pi)\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} \cos u\ \mathrm{d}u = (4k-1)\pi$$

(On a pris soin de considérer une zone de positivité du cosinus, pour pouvoir multiplier des inégalités par $\cos u$ sans en changer le sens). Or si $\displaystyle\int_0^{x} u\cos u\ \mathrm{d}u$ avait une limite réelle en $+\infty$, $\displaystyle\int_{-\pi/2+2k\pi}^{\pi/2+2k\pi} u\cos u\ \mathrm{d}u$ tendrait vers 0 quand $k \to +\infty$ (relation de Chasles).

---

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan x\ dx$

La fonction tan est continue, positive sur $[0,\pi/2[$. Plusieurs méthodes sont tout aussi valables :

• Un équivalent : $\tan(x) = \dfrac{1}{\tan(\pi/2 - x)} \underset{x \to \pi/2}{\sim} \dfrac{1}{\pi/2 - x}$, donc pas d'intégrabilité (comparaison à une fonction de Riemann), pas plus de convergence d'intégrale puisque pour une fonction positive c'est la même chose.

• Un calcul de $\displaystyle\int_0^X \tan x \, \mathrm{d}x$ (avec un ln) qui aboutit bien sûr à la même conclusion.

• un changement de variable $x = \mathrm{Arctan}(u)$. Même conclusion.

---

10. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{1-t}} dt$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{\sqrt{1-t}}$ est continue, négative sur $]0, 1[$. Notons-la f. On a

$$f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \ln t$$

donc, par croissances comparées,

$$|f(t)| \underset{t \to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$$

(valeurs absolues facultatives, mais recommandées) ce qui donne l'intégrabilité sur $]0, 1/2]$. Mais aussi

$$f(t) \underset{t \to 1}{\sim} -\sqrt{1-t}$$

et donc f est prolongeable par continuité à $]0, 1]$, pas de problème donc d'intégrabilité sur $[1/2, 1[$.

---

11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha} \qquad (\alpha \in \mathbf{R})$

La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^\alpha}$ est continue positive sur $]0, +\infty[$, continue sur $[0, +\infty[$ si $\alpha \geq 0$ et prolongeable par continuité à $[0, +\infty[$ si $\alpha < 0$ (elle a dans ce dernier cas pour limite 0 en 0). Si $\alpha < 0$, $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} 1$. Si $\alpha = 0$, $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2}$. Si $\alpha > 0$, $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^\alpha}$. Par comparaison à une fonction de Riemann, il y a intégrabilité (ou convergence de l'intégrale, ici c'est la même chose) si et seulement si $\alpha > 1$.

---

12. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} dx$ (α, β réels).

La fonction $f\ :\ x \longmapsto \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta}$ est continue positive sur $[e,+\infty[$. Si $\beta > 1$, fixons $\gamma \in]1,\beta[$. Par croissances comparées,

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^\gamma}\right)$$

et donc, par comparaison à une intégrale de Riemann, f est intégrable sur $[e,+\infty[$.

Si $\beta < 1$, par croissances comparées,

$$\frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(f(x)\right)$$

et donc,par comparaison à une intégrale de Riemann, f n'est pas intégrable sur $[e,+\infty[$.

Si $\beta = 1$ et $\alpha > 0$, encore non intégrabilité par le même argument.

Si $\beta = 1$ et $\alpha = 0$, non intégrabilité directe (Riemann).

Si $\beta = 1$ et $\alpha < 0$, on ne peut plus utiliser de comparaison (ce n'est plus assez « fin »), on calcule

$$\int_e^X \frac{(\ln x)^\alpha}{x} dx$$

car on sait trouver une primitive (on distingue le cas $\alpha = -1$, la primitivation se fait avec un $\ln(\ln x)$, sinon la primitivation se fait avec une puissance de $\ln x$). On trouve qu'il y a intégrabilité si et seulement si $\alpha < -1$. Bien sûr on a déjà rencontré ce genre de chose, c'est une intégrale « de Bertrand ».

---

13. $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x} dx}$

Fonction continue, positive sur $[1,+\infty[$. Il est judicieux d'obtenir un équivalent en $+\infty$. Pour cela, classiquement, mise en facteur dans $1+x$ du terme prédominant, x :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+1}-\sqrt{x} &= x^{1/2}\left(\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2} - 1\right)\\
&= x^{1/2}\left(1+\frac{1}{2x} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right) - 1\right)\\
&\underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2x^{1/2}}
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x^{3/2}}$, ce qui donne l'intégrabilité par comparaison à l'exemple de Riemann $(3/2 > 1)$.

14. $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} P(t)\, dt,\ P \text{ fonction polynôme}}$

Fonction continue sur $]-\infty,+\infty[$. Par croissances comparées, $\left|e^{-t^2}P(t)\right| \underset{t\to\pm\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ d'où l'intégrabilité.

15. $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{t}\, dt}$

Fonction continue sur $]0,+\infty[$; intégrabilité sur $]0,1[$ assez simple grâce à l'équivalent

$$\left|\frac{\sin\sqrt{t}}{t}\right| \underset{t\to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

et la référence à Riemann.

D'autre part, par changement de variable $t = u^2$, $u = \sqrt{t}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin\sqrt{t}}{t} dt$ a même nature (et dans le cas de convergence, même valeur) que $2\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$, intégrale notoirement semi-convergente (mais il faut savoir le redémontrer). Convergence, donc, on peut même dire semi-convergence. Une astuce consistait à écrire le dénominateur $\sqrt{t}\times\sqrt{t}$, intégrer par parties car on sait primitiver $\dfrac{\sin\sqrt{t}}{\sqrt{t}}$, on aboutit au même résultat.

16. $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t}}}$

Fonction continue positive sur $]0,+\infty[$, équivalente à $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0, équivalente à $\sqrt{2}e^{-t/2}$ au voisinage de $+\infty$, donc intégrable.

17. $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{e^t + t^2 e^{-t}}}$

Fonction continue positive sur $]-\infty,+\infty[$, équivalente au voisinage de $+\infty$ à e^{-t}, équivalente au voisinage de $-\infty$ à $\dfrac{e^t}{t^2}$. On en conclut l'intégrabilité.

18. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{(t+1)^\alpha - t^\alpha}{t^\beta} dt$ (α, β réels)

Grosse discussion.

19. $\boxed{\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t\ln t}{(1+t^2)^\alpha} dt}$ (α réel)

Fonction continue, de signe constant sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$, ce qui autorise à utiliser des équivalents. Au voisinage de 0, un équivalent est $t\ \ln t$, il y a donc une limite réelle en 0. Donc pas de problème. Au voisinage de $+\infty$, un équivalent est $\dfrac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}$. Si $2\alpha-1>1$, on fixe $\beta\in]1,2\alpha-1[$, on aura

$$\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{\beta}}\right)$$

et on conclut à l'intégrabilité. Si $2\alpha-1\leq 1$, on a

$$\frac{1}{t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{\ln t}{t^{2\alpha-1}}\right)$$

et on conclut à la non intégrabilité.

20. $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{(-\ln t)^{\alpha}}{(1-t)^{\beta}}dt}$

Similaire au **4.** ; la fonction est continue positive sur $]0,1[$, par croissances comparées elle est $\underset{t\to 0}{o}\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc intégrable sur $]0,1/2]$; au voisinage de 1 elle est équivalente à $(1-t)^{\alpha-\beta}$, donc intégrable sur $[1/2,1[$ si et seulement si $\alpha-\beta>-1$.