Exercice 1. Etudier la convergence et, le cas échéant, la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} \sin \frac{k\pi}{2n}$$

Ecrivons

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \sin \frac{k\pi}{2n}$$

Si on considère la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$, on aura

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Mais f est <u>continue</u> sur le <u>segment</u> $[0,1]$, le théorème sur les sommes de Riemann montre alors

$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\ dt$$

L'intégrale se calcule par parties et vaut (peut-être) $\dfrac{4}{\pi^2}$

Exercice 2. [Oral X] Soit $f : [a,b] \to \mathbf{C}$, de classe C^1. Montrer que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ appartient à l'adhérence de l'enveloppe convexe de $f'([a,b])$.

On peut écrire
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f'(t)\ dt$$
Il est alors un peu astucieux de penser aux sommes de Riemann :
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right)$$
Le terme « enveloppe convexe » est hors-programme, mais on conclut facilement avec cette limite.

Exercice 3. [Oral Centrale] Soit f une application de classe C^1 sur $[0,1]$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right)$$

puis en déduire celle de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right) .$$

Traditionnellement, à l'oral, on pose directement la deuxième limite, c'est plus difficile. La première est une limite de somme de Riemann, donc, directement, du cours. D'où l'idée de regarder si, par hasard, la deuxième limite ne serait pas par hasard la même que la première ! Définissons donc

$$\delta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) f'\left(\frac{k+1}{n}\right)$$

On a

$$|\delta_n| \leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right| \; \left|f'\left(\frac{k}{n}\right) - f'\left(\frac{k+1}{n}\right)\right|$$

Il suffit alors de majorer tous les $\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|$ par $N_\infty(f)$ et d'utiliser la continuité uniforme de f' pour conclure.

Exercice 4. [Oral Centrale] On désigne par x un nombre complexe de module différent de 1 ; on pose, pour tout entier naturel k,

$$I_k = \int_0^{2\pi} \frac{e^{ikt}}{x - e^{it}} dt$$

1. **Calculer, pour k entier naturel non nul, $I_k - xI_{k-1}$.**
2. **Calculer I_0 à l'aide de sommes de Riemann (on pourra se poser la question suivante : si les ξ_k $(1 \leq k \leq n)$ sont les racines du polynôme P, de quel polynôme les $1/(x - \xi_k)$ sont-ils les racines ?).**
3. **Calculer I_k pour tout k.**
4. **Faire dans I_1 le « changement de variable » $u = e^{it}$. Qu'en conclure ?**

---

1. $I_1 - xI_0 = -2\pi$, et si $k \geq 1$, $I_k - xI_{k-1} = 0$.

2.

$$I_0 = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2\pi}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{x - e^{2ik\pi/n}} \right)$$

Si les ξ_k sont les racines de P, et si toutes ces racines sont différentes de x, les $1/(x - \xi_k)$ sont les racines de $P(x - 1/X)$ qui n'est pas un polynôme. . .mais qui le devient si on le multiplie par X^n. Et vérifions :

$$\begin{aligned}
X^n P(x - 1/X) &= X^n \prod_{k=1}^{n} \left(x - \frac{1}{X} - \xi_k \right) \\
&= \prod_{k=1}^{n} (1 - X(x - \xi_k)) \\
&= c \prod_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{x - \xi_k} - X \right)
\end{aligned}$$

On peut donc dire que les $\dfrac{1}{x-e^{2ik\pi/n}}$ sont les racines du polynôme $X^n\left(\left(x-\dfrac{1}{X}\right)^n-1\right)$ c'est-à-dire du polynôme $(xX-1)^n-X^n$. Leur somme, par relation coefficients-racines, vaut donc

$$-\frac{-nx^{n-1}}{x^n-1}$$

Multiplier par $2\pi/n$ et prendre la limite quand $n\to+\infty$ est alors facile, à condition de bien distinguer les cas $|x|<1$ et $|x|>1$.
Le changement de variable $u=e^{it}$ est un faux changement de variable ! Quand t décrit $[0,2\pi]$, u ne décrit pas du tout un intervalle de $\mathbf{R}$. Et d'ailleurs on n'obtient pas un résultat cohérent...

Exercice 5. [Oral Centrale] Soit f de classe C^2 au voisinage de x_0. Démontrer que

$$\frac{1}{h^2}\Big(f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)\Big)$$

a une limite quand h tend vers 0. *Ce résultat est à la base de nombreux schémas de discrétisation d'équations aux dérivées partielles d'ordre 2. Le quotient étudié intervient aussi dans la définition de la dérivée seconde de Schwarz, utilisée par Cantor pour démontrer le théorème d'unicité des séries trigonométriques.*

Il suffit d'appliquer le théorème de Taylor-Young ;

$$f(x_0+h)=f(x_0)+hf'(x_0)+\frac{h^2}{2}f''(x_0)+\underset{h\to 0}{o}(h^2)$$

et même chose en remplaçant h par $-h$.
la limite est $f''(x_0)$.

Exercice 6 (Oral TPE, Centrale). Soit $f\ :\ [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ de classe C^1. On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\alpha$. ($\alpha$ est un nombre réel). Que peut-on dire de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x+1)}{f(x)}$?

On peut écrire, f étant à valeurs positives,

$$\begin{aligned}\frac{f(x+1)}{f(x)} &= \exp\Big(\ln\big(f(x+1)\big)-\ln\big(f(x)\big)\Big)\\ &= \exp\Big(\int_x^{x+1}\big(\ln\circ f\big)'(t)\ dt\Big)\\ &= \exp\Big(\int_x^{x+1}\frac{f'(t)}{f(t)}dt\Big)\end{aligned}$$

Soit $\epsilon>0$. Il existe A tel que

$$t\geq A\Rightarrow\Big|\frac{f'(t)}{f(t)}-\alpha\Big|\leq\epsilon$$

Alors, si $x\geq A$,

$$\Big|\int_x^{x+1}\frac{f'(t)}{f(t)}dt\ -\ \alpha\Big|=\Big|\int_x^{x+1}(\frac{f'(t)}{f(t)}-\alpha)\ dt\Big|\leq\int_x^{x+1}\big|\frac{f'(t)}{f(t)}-\alpha\big|dt\ \leq\epsilon$$

De tout ceci il ressort que la limite cherchée est $\exp\alpha$.

Exercice 7. [Oral Mines] Soit $P \in \mathbf{R}[X]$ de degré impair et $f \in C^\infty(\mathbf{R},\mathbf{R})$. On suppose qu'il existe n_0 entier naturel tel que, pour tout $n \geq n_0$, pour tout x réel, $|f^{(n)}(x)| \leq |P(x)|$. Que peut-on dire de f ?

Il existe un point a tel que $P(a) = 0$. Si x est un réel quelconque, pour tout $n \geq n_0$ on peut écrire

$$\left| f(x) - \left(f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \cdots + \frac{(x - x_0)^{n_0 - 1}}{(n_0 - 1)!} f^{(n_0 - 1)}(x_0) \right) \right| \leq \frac{(x - x_0)^n}{n!} \sup_{[x_0, x]} (|P|)$$

Quand $n \to +\infty$, le majorant tend vers 0, on en déduit que f est polynomiale (de degré au plus $n_0 - 1$).

Exercice 8. Soit f de classe C^2 sur R, telle que f et f'' soient bornées : sur R, $\|f(x)\| \leq M_0$ et $\|f''(x)\| \leq M_2$.Soit x un réel, h un réel strictement positif ; en écrivant deux formules (ou inégalités) de Taylor entre x et $x+h$ d'une part, entre x et $x-h$ d'autre part, démontrer que

$$\|f'(x)\| \leq \frac{h}{2}M_2 + \frac{1}{h}M_0$$

En déduire que f' est bornée, et que l'on a, pour tout x réel :

$$\|f'(x)\| \leq \sqrt{2M_0M_2}\ .$$

On écrit une inégalité de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 :
$\|f(x+h) - f(x) - hf'(x)\| \leq \dfrac{h^2}{2}M_2$
Mais aussi bien
$\|f(x-h) - f(x) + hf'(x)\| \leq \dfrac{h^2}{2}M_2$
Et donc par inégalité triangulaire
$\|f(x+h) - f(x) - hf'(x) - (f(x-h) - f(x) + hf'(x))\| \leq h^2M_2$
ou encore $\|f(x+h) - 2hf'(x) - f(x-h)\| \leq h^2M_2$
Et donc, toujours par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\|2hf'(x)\| &\leq \|2hf'(x) - f(x+h) + f(x-h)\| + \|f(x+h) - f(x-h)\| \\ &\leq h^2M_2 + 2M_0\end{aligned}$$

ce qui donne, si $h > 0$, la conclusion. On cherche ensuite, par simple étude de fonction, la meilleure majoration (le h pour lequel le majorant est le plus petit se trouve par dérivation, facilement), on conclut.

Exercice 9. [Lemme de Riemann-Lebesgue, résultat classique] Soit f une fonction continue par morceaux sur un segment I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{C}$. On veut montrer que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_I e^{int}f(t)\mathrm{d}t \ = \ 0$$

1. Démontrer le résultat pour une application constante.
2. En déduire le résultat pour une application en escalier.
3. En déduire le résultat pour une application continue par morceaux.
4. Sans utiliser les questions précédentes, démontrer directement et simplement le résultat pour une application de classe C^1. *Remarque : On peut remplacer* $\exp(int)$ *par* $\cos(nt)$ *ou* $\sin(nt)$.

Pour le 1., calcul direct. Le 2. s'en déduit sans difficulté en considérant une subdivision de I adaptée à f. La troisième question est importante.
Soit f continue par morceaux sur I.
Soit $\epsilon > 0$. Soit h en escalier sur I telle que

$$N_\infty(f-h)\leq\epsilon$$

(densité connue des applications en escalier sur I dans les applications continues par morceaux sur I, pour la norme N_∞, on dit aussi pour la topologie de la convergence uniforme). On écrit naturellement, pour $n\geq 0$,

$$\int_I \sin(nt)f(t)\mathrm{d}t=\int_I \sin(nt)h(t)\mathrm{d}t+\int_I \sin(nt)(f(t)-h(t))\mathrm{d}t$$

Si $\|.\|$ désigne la norme sur l'espace dans lequel f et h prennent leurs valeurs, on a, pour tout $n\in\mathbf{N}$,

$$\left\|\int_I \sin(nt)(f(t)-h(t))\mathrm{d}t\right\|\leq\int_I|\sin(nt)|\ \ \|f(t)-h(t)\|\,\mathrm{d}t\leq\epsilon\delta(I)$$

où $\delta(I)$ est la longueur du segment I (ainsi notée car c'est ce que l'on peut aussi appeler le diamètre de I). Il ne reste plus qu'à dire que, en vertu du résultat de la question précédente, il y a un rang n_0 à partir duquel on a

$$\left\| \int_I \sin(nt)h(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \epsilon$$

et que si l'on veut, suivant les usages de bonne rédaction, avoir un ϵ tout rond à la fin, on aurait pu imposer $N_\infty(f-h) \leq \dfrac{\epsilon}{2\delta(I)}$ et considérer un rang n_0 à partir duquel $\left\| \displaystyle\int_I \sin(nt)h(t)\mathrm{d}t \right\| \leq \dfrac{\epsilon}{2}$.

Ici on a utilisé la densité « avec les boules » : on peut trouver h aussi près que l'on veut de f. On a souvent tendance à ne considérer la densité qu'avec les suites : il y a une suite (h_p) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f. On sait donc que, pour tout p,

$$\int_I \sin(nt)h_p(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Et on aimerait bien que

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\int_I \sin(nt) \lim_{p\to+\infty} (h_p(t))\,\mathrm{d}t \right) = 0$$

On peut commencer par dire que cela revient au même d'écrire

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\lim_{p\to+\infty} \left(\int_I \sin(nt)h_p(t)\mathrm{d}t \right) \right) = 0$$

En effet, de $|\sin| \leq 1$ on déduit facilement que la suite de fonctions $(t \mapsto h_p(t)\sin(nt))_{p\geq 0}$ converge uniformément, pour tout n, vers la fonction $t \mapsto f(t)\sin(nt)$. Et la convergence uniforme sur un segment suffit à assurer la convergence des intégrales sur ce segment.

On aimerait donc intervertir les limites. Mais le théorème de la double limite ne se présente pas tout-à-fait sous cette forme, l'effort pour s'y ramener n'est pas négligeable. Et il n'est pas inutile de réécrire ce théorème pour faire coïncider sa formulation et notre problème. On définit donc, sur $\mathbf{N}$, chaque

$$\phi_p \ : \ n \longmapsto \int_I h_p(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la suite (ϕ_p) converge uniformément sur $\mathbf{N}$ vers

$$\phi \ : \ n \longmapsto \int_I f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t$$

puis, à partir de là, on peut utiliser la double limite. Mais c'est plus dur que la première méthode.

4. Evidemment, si les hypothèses permettent de faire une intégration par parties en primitivant le sinus de manière à faire apparaître un $1/n$, c'est plus facile !

Exercice 10. Intégrales de Wallis

1. **On définit l'intégrale**

$$I_n = \int_{[0,\pi/2]} \sin^n t dt$$

Démontrer qu'elle est égale à

$$J_n = \int_{[0,\pi/2]} \cos^n t dt$$

et trouver une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

Le changement de variable $u = \pi/2 - t$ montre que $I_n = J_n$. Puis, par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} t \ dt &= \int_0^{\pi/2} \sin t \ \sin^{n+1} t \ dt \\ &= \Big[(-\cos t)\sin^{n+1} t\Big]_0^{\pi/2} + (n+1)\int_0^{\pi/2} \cos^2 t \ sin^n t \ dt \\ &= (n+1)(I_n - I_{n+2})\end{aligned}$$

ce qui donne

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

---

2. **Démontrer que le produit $(n+1)I_nI_{n+1}$ a une valeur indépendante de n ; quelle est cette valeur ?**

On multiplie la relation qu'on vient d'obtenir par I_{n+1}, on obtient

$$(n+2)I_{n+2}I_{n+1} = (n+1)I_{n+1}I_n$$

ce qui montre bien que le produit $p_n = (n+1)I_nI_{n+1}$ a une valeur indépendante de n (car $p_{n+1} = p_n$ pour tout n), cette valeur est $p_0 = I_0I_1 = \pi/2$.

---

3. **Etudier la monotonie de la suite (I_n), puis un équivalent simple de I_n au voisinage de $+\infty$ en utilisant la relation de la question précédente.**

On écrit $I_n - I_{n+1} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t(1-\sin t)\ dt \geq 0$. La suite (I_n) est donc décroissante. On a donc, d'une part,

$$\frac{\pi}{2} = p_n \leq (n+1)I_n^2$$

et, d'autre part,

$$\frac{\pi}{2} = p_{n-1} \geq nI_n^2$$

donc, par positivité de I_n,

$$\sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \leq I_n \leq \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

Mais $\sqrt{\dfrac{\pi}{2(n+1)}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, on en déduit

$$I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$

---

4. **On définit, pour tout entier naturel non nul n :**

$$a_n = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n}$$

Ecrire a_n à l'aide de factorielles, exprimer I_{2n} et I_{2n+1} à l'aide de a_n, et démontrer la formule de Wallis

$$\frac{2.2.4.4.6.6.8.8\dots}{1.3.3.5.5.7.7.9\dots} = \frac{\pi}{2}$$

(où l'on prend autant de termes au numérateur qu'au dénominateur).

On multiplie le numérateur de a_n par $2.4.6.\dots 2n$ pour obtenir $(2n)!$, on obtient

$$a_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$$

On a, de plus,

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} = \dots$$

et, par récurrence, $I_{2n} = a_n I_0 = \frac{\pi}{2} a_n$. De même,

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1} I_{2n-3} = \dots$$

et, par récurrence, $I_{2n+1} = \dfrac{1}{(2n+1)a_n}$ Le quotient étudié par Wallis est

$$b_n = \frac{1}{(2n+1)a_n^2}$$

Mais $a_n^2 = \dfrac{4}{\pi^2} I_{2n}^2 \sim \dfrac{4}{\pi^2}\,\dfrac{\pi}{4n} \sim \dfrac{1}{\pi n}$ ce qui donne $b_n \sim \dfrac{\pi}{2}$.

---

5. **Si on lance $2n$ fois une pièce équilibrée, la probabilité d'obtenir exactement n fois Pile et n fois Face, dite probabilité d'équirépartition, est égale à $\dfrac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}}$. En donner un équivalent simple.**

On trouve $\dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$.
Pour la dernière question, on effectue un changement de variable $u = \tan t$.

Exercice 11 (Oral CCP). Montrer l'existence, pour $n \geq 1$, de

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathbf{d}t}{(1+t^2)^n}$$

puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

Théorème de convergence dominée, fonction dominante :

$$t \longmapsto \frac{1}{1+t^2}$$

La limite est 0.

Exercice 12. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{d}u}{1+u^n}$ pour $n \in \mathbf{N}$; démontrer que la suite (I_n) converge vers une limite ℓ, et trouver un équivalent de $I_n - \ell$.

Par théorème de convergence dominée, fonction dominante : $\widetilde{1}$, on trouve une limite égale à 1. Ensuite, première technique : si on veut comparer une intégrale à un nombre, on écrit ce nombre sous forme d'intégrale. Ici

$$1 - I_n = \int_0^1 \frac{u^n}{1+u^n}\mathrm{d}u$$

Puis, technique habituelle pour ce genre d'exercice (qu'on rencontre à l'oral), on fait un changement de variable : $t = u^n$, ou plutôt $u = t^{1/n}$. Ce qui fait sortir un $1/n$. En facteur d'une intégrale à laquelle il est facile d'appliquer le théorème de convergence dominée (encore la fonction dominante $\widetilde{1}$). On trouve l'équivalent

$$\frac{\ln 2}{n}$$

Exercice 13. Soit f réelle continue sur $[0,1]$. Montrer que la suite de terme général $n\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\ dt$ admet pour limite $f(1)$.

Changement de variable $t^n = u$, ou plutôt $t = u^{1/n}$. Fonction dominante, par exemple : $\widetilde{N_\infty(f)}$.

Exercice 14. Déterminer, si elle existe, la limite de la suite de terme général

$$\int_0^1 \frac{f(t)}{1+nt}dt$$

où f est une fonction continue sur le segment $[0,1]$.

Limite nulle...Fonction dominante $|f|$ par exemple.

Exercice 15. Soit f continue sur $[0,1]$. Déterminer la limite ℓ quand n tend vers l'infini de $\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}\mathrm{d}dt$; on suppose f dérivable en 0, déterminer un équivalent de
$\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}\mathrm{d}t \ -\ell$

La limite est $\ln 2\ f(0)$ (théorème de convergence dominée, fonction dominante, par exemple $\widetilde{N_\infty(f)}$). Puis (remarquons que la limite s'écrit sous forme d'une intégrale, forme à laquelle il faut évidemment revenir)

$$\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}dt \ -\ell = \int_0^1 \frac{f(t^n)-f(0)}{1+t}\mathrm{d}t$$

Le changement de variable habituel dans ce genre d'exercice : $u = t^n$, ou plutôt $t = u^{1/n}$.

$$\int_0^1 \frac{f(t^n)}{1+t}\mathrm{d}t \ -\ell = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{f(u)-f(0)}{u}\,\frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}}\mathrm{d}u$$

La fonction $g\ :\ u \longmapsto \dfrac{f(u)-f(0)}{u}$ se prolonge à $[0,1]$ en restant continue. On en déduit, par théorème de convergence dominée (domination par exemple par $\widetilde{N_\infty(g)}$) qu'un équivalent est

$$\frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{f(u)-f(0)}{u}\mathrm{d}u$$

sous réserve que cette intégrale soit non nulle.

Exercice 16. [Oral Mines, Centrale] Soit f continue sur $[0,1]$, à valeurs réelles. Etudier la convergence de la suite de terme général $\int_0^1 f(t^n)\ dt$.

Théorème de congergence dominée, domination par exemple par $\widetilde{N_\infty(f)}$. La limite est $f(0)$.

Exercice 17. [Oral Mines] Etudier la limite de la suite de terme général $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-t^n)\ dt$.

Domination par la fonction $t \mapsto 1$ si $0 < t < 1$, $\exp(-t)$ si $t \geq 1$ (il faut avoir une fonction dominante intégrable...), la convergence simple s'étudie en distinguant les cas $t < 1$, $t = 1$, $t > 1$. La limite est 1.

[Oral Mines] Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} dt$. Montrer

$$u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{\pi^2}{12n^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

On commence par l'habituel changement de variable $t = u^{1/n}$. Qui donne

$$u_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{1+u}\mathrm{d}u$$

On voit d'où vient le premier terme du développement asymptotique. On peut donc écrire

$$n\left(u_n - \frac{\ln 2}{n}\right) = \int_0^1 \frac{u^{1/n}-1}{1+u}\mathrm{d}u$$

Comment faire encore sortir un $1/n$? par exemple avec une intégration par parties (pas difficile à justifier) :

$$\int_0^1 \frac{u^{1/n}-1}{1+u}\mathrm{d}u = \big[\ln(1+u)\ (u^{1/n}-1)\big]_0^1 - \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}u^{1/n}\mathrm{d}u$$

Par théorème de convergence dominée (fonction dominante : $u \mapsto \dfrac{\ln(1+u)}{u}$), on voit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} u^{1/n} \mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} \mathrm{d}u$$

Le calcul de cette intégrale se fait avec une série entière :

$$\forall u \in]-1,1[\qquad \ln(1+u) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} u^k$$

On divise par u. En définissant $\phi_k(u) = \dfrac{(-1)^{k+1}}{k} u^{k-1}$ on a, avec des notations habituelles,

$$N_1(\phi_k) = \frac{1}{k^2}$$

ve qui autorise l'interversion. On obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u} \mathrm{d}u = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$$

Or, de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

on déduit, séparant les indices pais et impairs (les deux séries convergent, c'est donc légitime) :

$$\frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2}$$

…qui font bien $\pi^2/12$.

Exercice 18. [Oral Centrale] Calculer $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos^2 t}$. Puis déterminer la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^\pi \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}dt.$

Pour le calcul de d'intégrale, le changement de variable $u = \tan t$ est judicieux. Mais quand t varie sur $[0, \pi]$, cela pose quelques problèmes. On peut commencer par remarquer que cos prend les mêmes valeurs entre 0 et $\pi/2$ d'une part, entre $\pi/2$ et π d'autre part. On coupe l'intégrale en deux morceaux, on montre que ces deux morceaux sont égaux avec le changement de variable $s = \pi - t$. On obtient

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos^2 t} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+\cos^2 t}$$

Puis dans cette dernière intégrale on peut faire le changement de variable $u = \tan t$, ou plutôt $t = \mathrm{Arctan} u$. On obtient cette fois

$$\int_0^\pi \frac{dt}{1+\cos^2 t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)(1+\dfrac{1}{1+u^2})} = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{2+u^2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+(u/\sqrt{2}))^2}$$

On trouve finalement la valeur de l'intégrale : $\pi/\sqrt{2}$. Effectuons ensuite le changement de variable $t = u/n$, on a

$$\int_0^\pi \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}dt = \frac{1}{n}\int_0^{n\pi} \frac{f\left(\dfrac{u}{n}\right)}{1+\cos^2 u}\mathrm{d}u$$

On coupe l'intégrale de droite en n intégrales sur les segments $[k\pi, (k+1)\pi]$ sur chacun desquels on fait le nouveau changement de variable $u = k\pi + v$ pour obtenir

$$\int_0^\pi \frac{f(t)}{1+\cos^2(nt)}dt = \int_0^\pi \frac{1}{1+\cos^2 v}\frac{f\left(\dfrac{v}{n}\right) + f\left(\dfrac{v+\pi}{n}\right) + \cdots + f\left(\dfrac{v+(n-1)\pi}{n}\right)}{n}\mathrm{d}v$$

L'étude de convergence simple de ce qu'il y a à l'intérieur fait appel à une somme de Riemann, ensuite on utilise le théorème de convergence dominée (domination par la fonction $t \mapsto N_\infty(f)$ par exemple), on obtient la limite :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\pi f$$

Exercice 19. Trouver un équivalent, quand n tend vers $+\infty$, de $\displaystyle\int_0^1 \cos(nt^2)\ dt$.

Changement de variable $u = nt^2$, $t = \sqrt{\dfrac{u}{n}}$: on arrive à

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} \int_0^n \frac{\cos u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u$$

Il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u$ converge, ce qui se fait par intégration par parties (après s'être débarrassé de 0 pour ne pas avoir de problème) classiquement. Et il faut montrer que cette intégrale n'est pas nulle. . .ce qui demande un peu plus de travail, on commence par réécrire grâce à l'intégration par parties

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} \mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u^{3/2}} \mathrm{d}u$$

et on découpe l'intégrale en intégrales sur des $]k\pi, (k+1)\pi[$, on obtient une somme de série alternée dont le signe est facile à déterminer.

Exercice 20. Trouver un équivalent quand $n \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1+t^n}}dt$.

On pourrait espérer une limite, mais si le TCVD s'applique, cette limite va être nulle. On fait un changement de variable $t^n = u$, $t = u^{1/n}$. On obtient

$$I_n = \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

La domination

$$\forall u \in [0;1] \qquad \left|\frac{u^{1/n}}{\sqrt{1+u}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{1+u}}$$

(ou ≤ 1, tout simplement) permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\int_0^1 \frac{u^{1/n}}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+u}}\mathrm{d}u$$

D'où l'équivalent :

$$\frac{2(\sqrt{2}-1)}{n}$$

Exercice 21. Soit $I(\alpha) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\exp(-\alpha t)}{\sqrt{t}}\,dt$ et $J(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\alpha t)}{\sqrt{t}}\,dt$. Déterminer des équivalents simples de ces deux expressions quand α tend vers $+\infty$.

Soit f une fonction continue et bornée sur $\mathbf{R}^+$. Déterminer un équivalent simple de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-nt)}{\sqrt{t}}f(t)\,dt$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$. On distinguera les cas $f(0) = 0$ et $f(0) \neq 0$.

On commence par justifier l'existence des intégrales. Puis on fait un changement de variable $t = u/\alpha$. Cela permettra d'obtenir un équivalent pour $J(\alpha)$. Pour $I(\alpha)$, en revanche, on doit ensuite faire une intégration par parties, en dérivant $1/\sqrt{t}$ et en primitivant l'exponentielle.

Pour la deuxième partie de l'exercice, on fait un changement de variable $u = nt$, $t = u/n$. On obtient un équivalent quand $f(0) \neq 0$. Sinon, seulement un o.

Exercice 22. Pour tout entier naturel non nul n, on définit

$$I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \ \ln x \ dx \ .$$

Démontrer que la suite (I_n) converge vers $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \ \ln x \ dx.$

On peut montrer l'existence de l'intégrale pour commencer.
Puis on considère $\phi_n \ : \ x \mapsto \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \ \ln x \ \mathbf{1}_{]0,n[}(x)$. Le suite (ϕ_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers $x \mapsto e^{-x} \ln x$. Et on montre, à l'aide de l'inégalité classique $\ln(1 + u) \leq u$, que la suite (ϕ_n) est dominée par sa limite, limite qui est intégrable (on fait des études sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, et on compare à l'exemple de Riemann dans chacun des cas).

Exercice 23. [Oral CCP] Soit $[\alpha, \beta]$ un segment réel ; soient (a_n) et (b_n) des suites telles que, pour tout n, $\alpha \leq a_n \leq b_n \leq \beta$ et (a_n) tend vers α, (b_n) tend vers β. Soit (f_n) une suite de fonctions réelles continues sur $[\alpha, \beta]$ convergeant uniformément vers une certaine fonction f.

1. **Etudier la convergence de la suite de terme général** $\displaystyle\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\, dt.$
2. **Soit $g \ : \ [1, e] \mapsto \mathbf{R}$ continue ; montrer que la suite de terme général** $\displaystyle n \int_1^{1+1/n} g(t^n) dt$ **converge vers** $\displaystyle\int_1^e \frac{g(s)}{s} ds.$

Pour la première question, la limite est $\int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t$, on peut montrer que la différence tend vers 0 grâce à la majoration obtenue par découpage :

$$\left|\int_{a_n}^{b_n} f_n(t)\ dt - \int_\alpha^\beta f(t)\mathrm{d}t\right| \leq (b_n - a_n)\|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty\,(\beta - b_n + a_n - \alpha)$$

On peut aussi utiliser le théorème de convergence dominée en introduisant la fonction indicatrice de $[\alpha_n, \beta_n]$ mais c'est plus sophistiqué. Pour la deuxième question on fait le changement de variable $u = t^n$, $t = u^{1/n}$, on aboutit à

$$\int_1^{1+1/n} g(t^n)\mathrm{d}t = \frac{1}{n}\int_1^{\beta_n} \frac{u^{1/n} g(u)}{u}\mathrm{d}u$$

et on utilise la première question.

Exercice 24. Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ **(**α, β **réels) ?**

La fonction $f\ :\ t\mapsto \dfrac{1}{t^\alpha|\ln t|^\beta}$ est continue, positive sur $]0,1[$.

• **Etude de l'intégrabilité sur** $[1/2,1[$

On a $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{(1-t)^\beta}$ (on écrit, au voisinage de 1, $\ln t = \ln\big(1+(t-1)\big)$. Par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1/2,1[$ si et seulement si $\beta<1$.

• **Etude de l'intégrabilité sur** $]0,1/2]$

C'est moins facile, et il faut utiliser les croissances comparées. On peut penser que, comme la puissance de t est prépondérante devant la puissance de $|\ln t|$, c'est d'abord sur α que se fait la discussion ;

••Si $\alpha<1$, soit $\gamma\in]\alpha,1[$. Alors $f(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\dfrac{1}{t^\gamma}\right)$
(en effet, $t^\gamma f(t) = t^{\gamma-\alpha}(\ln t)^{-\beta} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$ car $\gamma-\alpha>0$). Comme $\gamma<1$, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $]0,1/2]$. *Remarque : quand $\alpha<0$, il n'y a pas de problème, car f se prolonge par continuité en* 0. *Mais il n'est pas utile d'examiner ce cas à part.*

•• Si $\alpha>1$, alors $\dfrac{1}{t} \underset{t\to 0}{=} o\big(f(t)\big)$ car $\dfrac{1}{tf(t)} = t^{\alpha-1}(\ln t)^{-\beta} \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Comme $t\mapsto 1/t$ n'est pas intégrable sur $]0,1/2]$ (exemple de Riemann), f ne l'est pas non plus.

•• Si $\alpha=1$, le logarithme va jouer un rôle ; écrivons, si $0<x<1/2$,

$$F(x)=\int_x^{1/2}\frac{1}{t|\ln t|^\beta}dt=\int_x^{1/2}\frac{1}{t(-\ln t)^\beta}dt$$

• • • Si $\beta=1$, $F(x)=\ln(-\ln x)+\ln(\ln 2) \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$. Donc f n'est pas intégrable sur $]0,1/2]$.

• • • Si $\beta\neq 1$, $F(x)=\dfrac{(-\ln x)^{1-\beta}}{1-\beta}-\dfrac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$. Et donc F a une limite finie en 0 si et seulement si $\beta>1$ (remarque : on n'était pas obligé d'examiner tous les cas pour β, les cas de non intégrabilité de f sur $]1/2,1]$ étant directement des cas de non intégrabilité de f sur $]0,1[$).

Conclusion : Il y a intégrabilité si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 25. Montrer que $f\ :\ x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$ mais que $\displaystyle\int_0^x f$ a une limite quand x tend vers $+\infty$.

Commençons par la deuxième partie de la question (la plus importante) ; le changement de variable $t = \sqrt{u}$ ($\phi\ :\ u \mapsto \sqrt{u}$ est une bijection de classe C^1 de $]0, x^2]$ sur $]0, x]$ si $x > 0$) donne

$$\int_0^x \cos(t^2)\ dt = \int_0^{x^2} \frac{\cos u}{2\sqrt{u}} du$$

D'après le cours, $t \mapsto \cos(t^2)$ étant intégrable sur $]0, x]$ (pas de problème), $u \mapsto \dfrac{\cos u}{2\sqrt{u}}$ l'est sur $]0, x^2]$, ce qui se vérifie d'ailleurs sans problème par référence à l'exemple de Riemann en écrivant

$$\frac{|\cos u|}{\sqrt{u}} \underset{u \to 0^+}{\sim} \frac{1}{u^{1/2}}$$

Pour l'intégration par parties, on considère y tel que $0 < y < x^2$. Alors

$$\int_y^{x^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du = \left[\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\right]_y^{x^2} + \frac{1}{2}\int_y^{x^2} \frac{\sin u}{u^{3/2}} du$$

Or $\dfrac{\sin(x^2)}{\sqrt{x^2}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, et la fonction $u \mapsto \dfrac{\sin u}{u^{3/2}}$ est intégrable sur $[y, +\infty[$, par comparaison à l'exemple de Riemann ($\dfrac{|\sin u|}{u^{3/2}} \leq \dfrac{1}{u^{3/2}}$ et $3/2 > 1$). Donc $\displaystyle\int_y^{x^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$ a une limite quand $x \to +\infty$. Mais l'existence de $\displaystyle\int_0^y \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$ a été vue. Donc $\displaystyle\int_0^{x^2} \frac{\cos u}{\sqrt{u}} du$ a une limite quand $x \to +\infty$. Ce qui répond à la deuxième partie de la question.

Pour la non intégrabilité, étudions

$$u_k = \int_{\sqrt{\pi/2+k\pi}}^{\sqrt{\pi/2+(k+1)\pi}} |\cos(t^2)|\ dt$$

$(k \geq 0)$ à l'aide du même changement de variable $t = \sqrt{u}$:

$$u_k = \int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi} \frac{|\cos u|}{2\sqrt{u}} du \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi/2+(k+1)\pi}} \int_{\pi/2+k\pi}^{\pi/2+(k+1)\pi} |\cos u| \, du = \frac{1}{\sqrt{\pi/2+(k+1)\pi}}$$

Alors

$$\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2+(N+1)\pi}} |\cos(t^2)| \, dt = \sum_{k=0}^{N} u_k \geq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{\sqrt{\pi/2+(k+1)\pi}} = S_N$$

La suite (S_N) est croissante, et

$$S_{2N} - S_N \geq \frac{N}{\sqrt{\pi/2+(2N+1)\pi}}$$

Donc $(S_{2N} - S_N)$ diverge, donc (S_N) ne converge pas, or elle est croissante, donc elle diverge vers $+\infty$, donc

$$\int_{\sqrt{\pi/2}}^{\sqrt{\pi/2+(N+1)\pi}} |\cos(t^2)| \, dt \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$$

ce qui fait que $t \mapsto \cos(t^2)$ n'est pas intégrable sur $[\sqrt{\pi/2}, +\infty[$, a fortiori sur $[0, +\infty[$.

Exercice 26. On désigne par α et β deux réels positifs. Examiner l'intégrabilité sur $\mathbf{R}_*^+$ de la fonction

$$x \longmapsto \frac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta} \ .$$

Ecartons le cas $\alpha = 0$: la fonction nulle est intégrable sur n'importe quel intervalle. On suppose donc $\alpha > 0$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{(x+1)^\alpha - x^\alpha}{x^\beta}$ est continue, positive sur $]0, +\infty[$.

• **Intégrabilité sur** $]0, 1]$.

On a $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{x^\beta}$, donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\beta < 1$.

• **Intégrabilité sur** $[1,+\infty[$.

On peut écrire

$$f(x)=\frac{x^\alpha}{x^\beta}\Big(\big(1+\frac{1}{x}\big)^\alpha-1\Big)=x^{\alpha-\beta}\Big(1+\frac{\alpha}{x}+\underset{x\to+\infty}{o}\big(\frac{1}{x}\big)-1\Big)$$

Donc $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\alpha x^{\alpha-\beta-1}$. Et, par comparaison à l'exemple de Riemann, f est intégrable sur $[1,+\infty[$ si et seulement si $\alpha-\beta-1<-1$.

• Conclusion : il y a intégrabilité si et seulement si $\alpha<\beta<1$.

Exercice 27. Définition et calcul de

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+ixt)} dt$$

(x désigne un réel non nul).

La définition ne pose guère de difficulté. Multiplier haut et bas par $1 - ixt$. La partie imaginaire est nulle par imparité. Pour la partie réelle, on suppose $x \notin \{-1, 0, 1\}$, on fait une décomposition en éléments simples et on intègre avec des arctangentes. En tant que fonction de x, cette intégrale est continue, on récupère donc les valeurs en $-1, 0, 1$ par continuité.

Exercice 28 (Oral Mines). L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \left(\sqrt{x+\cos x} - \sqrt{x}\right)\, dx$$

est-elle définie ?

On écrit

$$\sqrt{x+\cos x} - \sqrt{x} = \frac{\cos x}{\sqrt{x+\cos x} + \sqrt{x}}$$

et on montre la convergence de l'intégrale avec une intégration par parties, suivant le modèle classique de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

Exercice 29 (Oral Mines). Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t)\, dt$ ait un sens. Démontrer que, si $x > a$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\, dt$ a un sens (on pourra examiner deux cas : intégrabilité ou intégrale impropre, pour l'existence de la première intégrale).

Il y a deux manières pour l'intégrale d'avoir un sens. Et donc, d'abord, traitons l'énoncé suivant, très simple :
Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que $t \mapsto e^{-ta} f(t)$ soit intégrable sur $[0, +\infty[$. Démontrer que, si $x > a$, alors $t \mapsto e^{-tx} f(t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.
Solution :
Si $x > a$, $\forall t \in [0, +\infty[\quad |e^{-tx} f(t)| = e^{-tx} |f(t)| \leq e^{-ta} |f(t)| = |e^{-ta} f(t)|$
ce qui suffit pour conclure.

Posons-nous maintenant le problème plus difficile suivant :
Soit f une fonction réelle continue sur $[0, +\infty[$ et a un réel tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-ta} f(t)\ dt$ converge. Démontrer que, si $x > a$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx} f(t)\ dt$ converge (ici, on ne suppose pas l'intégrabilité)
Pour cela, toujours le même principe ; on introduit la fonction

$$F\ :\ y \mapsto \int_0^y e^{-ta} f(t)\ dt$$

pour faire une intégration par parties dans $\displaystyle\int_0^A e^{-tx} f(t)\ dt)$

$$\begin{aligned}
\int_0^A e^{-tx} f(t)\ dt &= \int_0^A e^{-ta} f(t)\ e^{-t(x-a)}\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^A F'(t)\ e^{-t(x-a)}\ \mathrm{d}t \\
&= \left[e^{-t(x-a)}\ F(t)\right]_{t=0}^{t=A} + (x-a) \int_0^A F(t)\ e^{-t(x-a)}\ \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Mais d'une part

$$e^{-A(x-a)}\ F(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 0$$

(car F a une limite finie en $+\infty$) et d'autre part F est bornée (continue sur $[0, +\infty[$ et ayant une limite réelle en $+\infty$) donc $t \longmapsto F(t)\ e^{-t(x-a)}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ ($t \longmapsto e^{-t(x-a)}$ l'est), ce qui conclut.

Exercice 30. Etudier, suivant les valeurs du réel strictement positif α, l'existence de

$$\int_0^{+\infty} \sin(t^\alpha)\ dt\ .$$

Changement de variable $u = t^\alpha$, ou plutôt $t = u^{1/\alpha}$.

Exercice 31. Etudier la limite, quand α tend vers 0, de

$$\int_\alpha^{2\alpha} \frac{e^u}{u} du$$

puis, après avoir montré son existence, calculer

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\ dt\ .$$

Notant que la fonction $u \longmapsto \dfrac{e^u-1}{u}\mathrm{d}u$ se prolonge par continuité en 0, on montre que

$$\int_\alpha^{2\alpha} \frac{e^u-1}{u} du \xrightarrow[\alpha \to 0]{} 0$$

ce qui donne la valeur de la première intégrale ($\ln 2$). Pour la deuxième, remplacer 1 par $x \in]0,1[$, faire le changement de variable $t = e^u$, $u = \ln t$:

$$\int_0^x \frac{t-1}{\ln t}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\ln x} \frac{e^u-1}{u} e^u \mathrm{d}u$$

On coupe en deux l'intégrale du second membre, on fait un petit changement de variable dans l'une des deux intégrales obtenues pour se ramener finalement au début de l'exercice.

Exercice 32. Calculer

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dt}{\sin t \ \cos t \ \sqrt{2+\sin^2 t}} \ .$$

En s'inspirant des règles de Bioche (qui certes sont énoncées pour des fractions rationnelles, mais rien n'empêche de les essayer dans un autre cadre), ou en multipliant par $\cos t$ en haut et en bas, on voit assez vite que le changement de variable $u = \sin t$ est commode ; si on appelle I l'intégrale,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos t \ dt}{\sin t \ (1-\sin^2 t) \ \sqrt{2+\sin^2 t}} \\ &= \int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{du}{u(1-u^2)\sqrt{2+u^2}} \end{aligned}$$

Le problème est le $\sqrt{2+u^2}$, qui nous empêche d'avoir une fraction rationnelle. On essaye de se ramener à la formule

$$1 + \operatorname{sh}^2 = \operatorname{ch}^2$$

pour pouvoir enlever ce $\sqrt{\ }$. Pour cela, on fait un nouveau changement de variable : $u = \sqrt{2} \operatorname{sh} v$. On aura donc

$$I = \int_{\operatorname{Argsh}((1/(2\sqrt{2}))}^{\operatorname{Argsh}(\sqrt{3}/(2\sqrt{2}))} \frac{\sqrt{2} \ \operatorname{ch} v \ dv}{\sqrt{2} \operatorname{sh} v \ (1 - 2\operatorname{sh}^2 v)\sqrt{2} \operatorname{ch} v}$$

On simplifie par $\operatorname{ch} v$. On multiplie ensuite en haut et en bas par $\operatorname{sh} v$, d'où l'idée d'un changement de variable $w = \operatorname{ch} v$ (ce qui arrange bien pour les bornes :

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Argsh} \alpha) = \sqrt{1+\alpha^2} \ )$$

, et on est enfin ramené à une fraction rationnelle, que l'on décompose en éléments simples. Bref, calcul long !

Exercice 33. [Un classique] Soit f de classe C^p ($p \geq 1$) sur un intervalle I de R, à valeurs réelles ou complexes. On suppose $f(a) = 0$ ($a \in I$). Montrer qu'il existe g de classe C^{p-1} sur I telle que

$$\forall x \in I \qquad f(x) = (x-a)g(x)$$

Indication : écrire $f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt$ puis faire un changement de variable dans l'intégrale

---

Tout est dans l'indication ! Il faut savoir faire un changement de variable affine pour ramener une intégrale sur un segment quelconque à une intégrale sur $[0,1]$: ici, on fait le changement de variable

$$t = a + u(x-a)$$

On obtient

$$f(x) = (x-a)\int_0^1 f'(a+u(x-a))\mathrm{d}u$$

puis il n'y a plus qu'à appliquer soigneusement les théorèmes de classe C^k d'une fonction $x \mapsto \displaystyle\int_I h(x,t)\mathrm{d}t$, on peut prendre ici des fonctions dominantes constantes.
En effet, on définit

$$h \;:\; (x,u) \longmapsto f'(a+u(x-a))$$

qui est, pour tout $u \in [0,1]$, de classe C^{p-1} comme fonction de x (sur I), avec, pour $k \in [\![1, p-1]\!]$,

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k} \;:\; (x,u) \mapsto (x-a)^k f^{(k+1)}(a+u(x-a))$$

Toutes ces fonctions sont intégrables sur $[0,1]$ (en tant que fonctions de u) car elles sont continues. On peut ensuite considérer un segment $K \subset I$. Il n'est pas restrictif (quitte à agrandir K) de supposer que $a \in K$. On peut alors dominer de la manière suivante :

$$\forall (x,u) \in K \times [0,1] \qquad \left| \frac{\partial^{p-1} h}{\partial x^{p-1}}(x,u) \right| \leq \delta(K)^{p-1} \|f^{(p)}\|_{\infty,K}$$

(où $\delta(K)$ désigne la longueur du segment K), domination valable car sur le segment $[0,1]$ une constante est intégrable.

Exercice 34. [Oral Paris, Lyon, Cachan] Soit $f \in C^1([0,1],\mathbf{R})$ et $(x_i)_{0\leq i\leq p}$ une subdivision de $[0,1]$. On note P le polynôme de Lagrange qui interpole f aux points x_i.

1. **Montrer qu'il existe une unique fonction $g \in C^0([0,1],\mathbf{R})$ telle que, pour tout $x \in [0,1]$,**

$$(f-P)(x) = g(x)\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$

2. **On suppose $f \in C^{p+1}([0,1],\mathbf{R})$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ il existe $c \in [0,1]$ tel que**

$$(f-P)(x) = \frac{f^{(p+1)}(c)}{(p+1)!}\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)$$

Pour la première question, il suffit de montrer que la fonction

$$x \mapsto \frac{(f-P)(x)}{\displaystyle\prod_{i=0}^{p}(x-x_i)}$$

qui est continue ailleurs qu'en les x_i a une limite finie en chaque x_i. Il suffit donc de montrer, pour chaque i, que la fonction

$$x \mapsto \frac{(f-P)(x)}{x-x_i}$$

a une limite en x_i. Ce qui ramène à l'exercice précédent.
Pour la deuxième question, sans rapport avec la première (ce qui peut surprendre), on applique plusieurs fois le théorème de Rolle, voir exercices sur la dérivation.

Exercice 35. [Oral Mines] Déterminer la limite quand $x \to 1$ de

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$$

Deux méthodes sont intéressantes : la première, de dire que comme

$$\ln t \underset{t \to 1}{\sim} t - 1$$

on peut penser que

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} \underset{x \to 1}{\sim} \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = [\ln |t-1|]_x^{x^2} = \ln(1+x)$$

et que donc la limite est $\ln 2$. On s'aperçoit alors que si on montre que

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 0$$

c'est terminé (bien sûr, ce n'est pas cela, la définition d'un équivalent, mais la résultat en découle). Pour cela, on voit que

$$\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t} - \int_x^{x^2} \frac{dt}{t-1} = \int_x^{x^2} \phi(t)\mathrm{d}t$$

où ϕ est une fonction qui se prolonge par continuité à $]0, +\infty[$, et cela permet de conclure.

L'autre méthode naturelle serait de faire le changement de variable

$$t = x + u(x^2 - x)$$

mais ici cela ne donne pas grand chose, dommage.

Exercice 36 (Oral Centrale). Soit $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_x^{3x}\frac{\cos t}{t}\,dt$. Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$, étudier son comportement en $+\infty$; tracer le graphe.

On peut définir F primitive de $\dfrac{\cos t}{t}$, de classe C^∞ comme primitive d'une fonction de classe C^∞. Mais une telle primitive ne peut être définie que sur $\mathbf{R}_*^+$ ou sur $\mathbf{R}_*^-$. L'écriture

$$f(x)=F(3x)-F(x)$$

ne montre donc la classe C^∞ de f que sur $\mathbf{R}_*^+$ ou sur $\mathbf{R}_*^-$. Pour montrer que f est prolongeable en une fonction de classe C^∞, il faudrait montrer que f puis ses dérivées ont des limites en 0, et appliquer de manière récurrente le théorème « limite de la dérivée ». Ce serait au moins fastidieux.
L'astuce est donc de procéder autrement : le changement de variable

$$t=x+u(3x-x)$$

permet de ramener (classique) l'intégrale aux deux bornes fixes 0 et 1. On a ainsi

$$f(x)=\int_0^1\frac{\cos(x+2xu)}{x+2xu}2xdu=2\int_0^1\frac{\cos(x+2xu)}{1+2u}du$$

La dernière expression obtenue ne pose pas de problème en 0, on peut donc prolonger f à $\mathbf{R}$ entier en posant

$$\widetilde{f}(x)=2\int_0^1\frac{\cos(x+2xu)}{1+2u}du$$

et $\widetilde{f}$ est de classe C^∞ comme le prouve une application récurrente (certes un peu longue à rédiger, mais les dominations sont simples) du théorème de dérivation sous le signe $\int$.

Autre méthode : Ecrire

$$f(x)=\int_x^{3x}\frac{(-1+\cos t)+1}{t}dt=\ln 3+\int_x^{3x}\frac{\cos t-1}{t}dt$$

puis développer $\dfrac{\cos t - 1}{t}$ en série entière. On intègre terme à terme sans réel problème (convergence normale sur un segment, la série entière a un rayon de convergence infini). On obtient que f est dse sur $\mathbf{R}$, donc C^∞.

Exercice 37. [Oral Centrale] Donner un équivalent quand x tend vers 0 à droite de
$$\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\arcsin t} dt.$$

Comme dans l'exercice précédent, l'idée part d'un équivalent au voisinage de 0 de la fonction intégrée. On essaye alors de montrer que

$$\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\arcsin t} dt \underset{x \to 0}{\sim} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{t} = \ln x$$

ce qui se fait en réunissant les deux intégrales du membre de gauche, et en réduisant au même dénominateur la fonction à l'intérieur pour obtenir un raisonnement semblable à celui de l'exercice précédent. On trouve en fait que

$$\int_{x^2}^{x^3} \frac{e^t}{\arcsin t} dt \underset{x \to 0}{\sim} \int_{x^2}^{x^3} \frac{dt}{t} = \underset{x \to 0}{O} \left(x^2 - x^3\right)$$

ce qui suffit bien pour conclure.

Exercice 38. [Oral Centrale] Donner un équivalent quand x tend vers 0 de
$$\int_{x}^{2x} \frac{1}{\arctan t} dt.$$

On montrer que la différence entre l'intégrale et $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ tend vers 0.

Exercice 39. [Convolutions de fonctions périodiques, approximations de l'unité]

On note E le C-espace vectoriel des fonctions continues sur R, 2π-périodiques, à valeurs complexes. E est muni de la norme N_∞. On désigne par $\mathcal{P}$ le sous-espace constitué des polynômes trigonométriques : les éléments P de $\mathcal{P}$ s'écrivent

$$P(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

où les c_k sont des nombres complexes et n un entier naturel. On étudie la loi $*$ qui, à deux fonctions f et g de E, fait correspondre la fonction $f * g$ (produit de convolution de f et g) définie par

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt$$

1. **Démontrer que la fonction $f*g$ est définie sur R, 2π-périodique, bornée et égale à la fonction $g * f$. Donner un majorant de $|(g * f)(x)|$ indépendant de x en fonction de $N_\infty(f)$ et $N_\infty(g)$.**

---

1. Pour tout réel x, $f*g(x)$ est définie comme intégrale sur un segment d'une fonction continue. La 2π-périodicité de $f * g$ résulte immédiatement de celle de f. Une fonction continue 2π-périodique est bornée. Et donc on peut majorer :

$$\forall x \in \mathbf{R} \quad |(f * g)(x)| \leq 2\pi N_\infty(f) N_\infty(g)$$

ce qui permet de dire que $f * g$ est bornée. Enfin,

$$\begin{aligned}(f * g)(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t)dt \\ &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x-u)du\end{aligned}$$

(changement de variable $t = x - u$). Mais

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(u)g(x-u)du = \int_{x-\pi}^{-\pi} f(u)g(x-u)du + \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(x-u)du + \int_{\pi}^{x+\pi} f(u)g(x-u)du$$

et, en faisant le changement de variable $v = u + 2\pi$, $u = v - 2\pi$ dans la première intégrale, tenant compte de la 2π-périodicité de f et g, on obtient finalement

$$f * g = g * f$$

---

2. **Démontrer que $*$ est une loi de composition interne sur les deux espaces E et $\mathcal{P}$.**

Il s'agit d'abord de montrer que, si f et g sont continues, $f * g$ l'est (la 2π-périodicité a déjà été démontrée). Définissons
$\phi\ :\ (x,t) \mapsto f(x-t)g(t)$ sur $\mathbf{R}\times[-\pi,\pi]$. Elle est continue par rapport à chacune de ses variables, et

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R} \times [-\pi,\pi] \qquad |\phi(x,t)| \leq N_\infty(f)N_\infty(g)$$

Or la fonction $t \mapsto N_\infty(f)N_\infty(g)$ est continue sur $[-\pi,\pi]$ (*la continuité par morceaux suffirait*), intégrable sur ce segment. Le théorème de continuité sous le signe $\int$ permet alors de conclure. L'application $*$ étant assez clairement bilinéaire sur $E \times E$, il suffit pour montrer que $\mathcal{P}$ est stable par $*$ de montrer que, si l'on note $e_k\ :\ u \mapsto e^{iku}$ ($k \in \mathbf{Z}$),

$$\forall (k,k') \in \mathbf{Z}^2 \qquad e_k * e_{k'} \in \mathcal{P}$$

ce qui se voit assez facilement :

$$\begin{aligned}(e_k * e_{k'})(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik(x-t)} e^{ik't} dt \\ &= \alpha e_k(x)\end{aligned}$$

où $\alpha = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k'-k)t} dt$. On remarque en passant que si $f \in \mathcal{P}$ et $g \in E$, $f * g \in \mathcal{P}$: $\mathcal{P}$ est « absorbant » pour $*$.

---

3. **Si f est un élément de $\mathcal{C}$, on définit ses coefficients de Fourier** :

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \, dt$$

et, pour tout n entier naturel non nul, sa somme partielle de Fourier d'ordre n :

$$S_n \ : \ x \longmapsto \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$$

et on définit enfin

$$\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} S_p \ .$$

(a) **Démontrer que**

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) K_n(x-t) \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) K_n(t) \, dt$$

où K_n est un élément de $\mathcal{P}$. Calculer $(n+1)K_{n+1} - nK_n$ et en déduire que

$$K_n(u) = \frac{1 - \cos nu}{n(1 - \cos u)} = \frac{\sin^2(nu/2)}{n \sin^2(u/2)} \ .$$

Il suffit de tout écrire :

$$\begin{aligned}
\sigma_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} S_p(x) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=-p}^{p} c_k(f)e^{ikx}\right) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=-p}^{p} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{1}{n}\left(\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=-p}^{p} e^{ik(x-t)}\right)\right) dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)K_n(x-t)\ dt
\end{aligned}$$

en définissant

$$\forall u \in \mathbf{R} \qquad K_n(u) = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\sum_{k=-p}^{p} e^{iku}\right)$$

ce qui montre bien que $K_n \in \mathcal{P}$. On a donc, en supposant dans les calculs qui suivent que u n'est pas un multiple de 2π :

$$\begin{aligned}
(n+1)K_{n+1}(u) - nK_n(u) &= \sum_{k=-n}^{n} e^{iku} \\
&= e^{-inu}\frac{1-e^{i(2n+1)u}}{1-e^{iu}} \\
&= e^{-inu}\frac{e^{i(n+1/2)u}}{e^{iu/2}}\frac{\sin(n+1/2)u}{\sin u/2} \\
&= \frac{\sin(n+1/2)u}{\sin u/2}
\end{aligned}$$

Or, posant $J_n(u) = \dfrac{1-\cos nu}{n(1-\cos u)}$, on a

$$\begin{aligned}
(n+1)J_{n+1}(u) - nJ_n(u) &= \frac{\cos(nu) - \cos(n+1)u}{1-\cos u} \\
&= \frac{-2\sin(n+1/2)u\ \sin(-u/2)}{2\sin^2(u/2)}
\end{aligned}$$

d'où, comme $K_1 = J_1 = 1$, le résultat par récurrence.

```
> restart;
> d:=sin((n+1/2)*u)/sin(u/2);
```

$$d := \frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)u\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)} \quad \textbf{(1)}$$

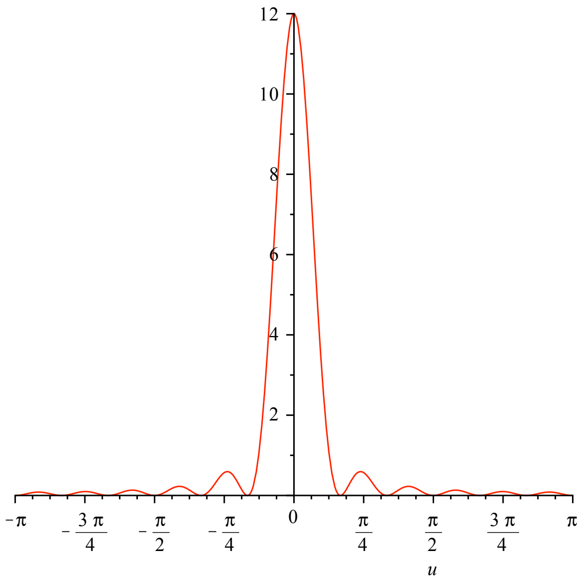
```
> k:=sum(subs(n=k,d),k=0..n-1);
```

$$k := -\frac{1}{2}\,\frac{\cos(u\,n)}{\sin\left(\frac{1}{2}u\right)^2} + \frac{1}{2\sin\left(\frac{1}{2}u\right)^2} \quad \textbf{(2)}$$

```
> combine(k,trig);
```

$$\frac{\cos(u\,n)-1}{\cos(u)-1} \quad \textbf{(3)}$$

```
> plot(subs(n=12,k)/12,u=-Pi..Pi);
```



On veut montrer que la suite $\left(\sigma_n(f)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbf{R}$. Pour tout x réel, on va essayer de majorer indépendamment de x la quantité :

$$\delta_n(x) = \left|\sigma_n(f)(x) - f(x)\right|$$

ou encore, en reprenant la définition de σ_n :

$$\delta_n(x) = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)f(t)dt \ - \ f(x)\right|$$

La première idée est d'écrire $f(x)$ sous forme d'une intégrale pour pouvoir rassembler l'expression sous forme d'une seule intégrale. Pour cela, on utilise la propriété $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} K_n \ = \ 1$. Donc

$$\delta_n(x) = \Big|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x-t)f(t)dt \ - \ \frac{f(x)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)dt\Big|$$

Lorsqu'on rassemble les deux intégrales, pour pouvoir factoriser, ce serait agréable que les rôles de K_n et de f soient inversés dans l'expression de σ_n. Or le produit de convolution est commutatif (on fait le changement de variables $u = x - t$, et on rétablit l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ comme permis par la 2π-périodicité de la fonction intégrée. On obtient

$$\delta_n(x) = \frac{1}{2\pi}\Big|\int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big)K_n(t)\ dt\Big|$$

Le module (ou la valeur absolue, suivant si la fonction est à valeurs réelles ou complexes) de l'intégrale est inférieur ou égal au module de la valeur absolue. Et K_n est à valeurs réelles positives. Et on pense devoir utiliser la convergence uniforme sur les segments $[-\pi, \delta]$ et sur $[\delta, \pi]$ de la suite des fonctions K_n vers la fonction nulle. D'où la majoration, valable pour $\delta > 0$:

$$\begin{aligned}\delta_n(x) \leq \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\delta}\big|f(x-t)-f(x)\big|K_n(t)\ dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta}^{\pi}\big|f(x-t)-f(x)\big|K_n(t)\ dt \\ + \ \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\big|f(x-t) - f(x)\big|K_n(t)\ dt\end{aligned}$$

Dans les deux premières intégrales, $x - t$ et x ne sont pas particulièrement proches l'un de l'autre, on majore donc $|f(x-t) - f(x)| \leq 2N_\infty(f)$ (f, continue et périodique, est bornée (elle est bornée sur le segment $[-\pi, \pi]$, et donc bornée sur $\mathbf{R}$ par périodicité). On écrit donc

$$\delta_n(x) \leq 2N_\infty(f)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,-\delta]} K_n + \frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,\pi]} K_n\Big) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\big|f(x-t)-f(x)\big|K_n(t)\ dt$$

Soit $\epsilon > 0$. On démontre qu'une application continue périodique est uniformément continue (laissé en exercice au lecteur !). Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$|y-z| \le \delta \ \Rightarrow\ |f(y)-f(z)| \le \epsilon/2$$

On aura alors (et ce, pour n'importe quel n et n'importe quel x) :

$$\begin{aligned}
\delta_n(x) &\le 2N_\infty(f)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,-\delta]} K_n \ +\ \frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,\pi]} K_n\Big) \ +\ \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(t)\ dt \\
&\le 2N_\infty(f)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,-\delta]} K_n \ +\ \frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,\pi]} K_n\Big) \ +\ \frac{\epsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(t)\ dt \\
&\le 2N_\infty(f)\Big(\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,-\delta]} K_n \ +\ \frac{1}{2\pi}\int_{[\delta,\pi]} K_n\Big) \ +\ \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

Il n'y a plus qu'à remarquer que la convergence uniforme de (K_n) vers 0 sur les segments considérés implique la convergence vers 0 des deux premières intégrales, pour conclure qu'il existe un rang n_0 à partir duquel, pour tout x,

$$\delta_n(x) \le \epsilon$$

ce qui conclut.

Exercice 40. [Convolutions « temporelles »] Soit f et g deux applications continues sur $\mathbf{R}^+$. On définit leur produit de convolution :

$$f \star g = \int_0^x f(t)g(x-t)dt \ .$$

Démontrer que $f \star g$ est continue sur $\mathbf{R}^+$, et que $f \star g = g \star f$.

Aucun problème de définition ; le changement de variable $t = x - u$, $u = x - t$ donne la commutativité. Pour la continuité, comme la variable figure à la fois dans une borne et à l'intérieur de l'intégrale, comme il n'est pas possible de la faire sortir de l'intégrale, on la fait au contraire rentrer en effectuant le changement de variable $t = xu$, qui donne

$$(f \star g)(x) = x \int_0^1 f(xu)g(x(1-u))\mathrm{d}u$$

Ensuite, le théorème de continuité sous le signe $\int$, avec une domination sur tout segment (on ne peut pas faire mieux) : si K est un segment inclus dans $\mathbf{R}^+$, soit $M \geq 0$ tel que $K \subset [0, M]$; en définissant h sur $\mathbf{R}^+ \times [0, 1]$ par

$$h(x,t) = f(xu)g(x(1-u))$$

on a

$$\forall (x,t) \in K \times [0,1] \qquad |h(x,t)| \leq N_\infty(f|_{[0,M]})N_\infty(g|_{[0,M]})$$

qui constitue une domination valable, une fonction constante étant intégrable sur $[0, 1]$.

Exercice 41. [injectivité de la transformation de Laplace] Soit f une application continue $[0,+\infty[$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose qu'il existe un réel strictement positif s_0 vérifiant

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-s_0 t} f(t) \;=\; 0.$$

1. Démontrer que, si $s > s_0$, l'application $t \mapsto e^{-st}f(t)$ est intégrable sur $]s_0,+\infty[$. On note $\mathcal{L}(f)$ la fonction définie sur $]s_0,+\infty[$ par

$$\mathcal{L}(f) \;:\; s \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt$$

2. Démontrer que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $]s_0,+\infty[$.
3. On suppose que $\mathcal{L}(f)$ est la fonction nulle. Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$\int_0^{+\infty} e^{-nt-(s_0+1)t} f(t)dt \;=\; 0 \;.$$

   Soit alors g définie sur $]0,1]$ par

$$g(u) = u^{s_0} f(-\ln u) \;.$$

   Démontrer que g se prolonge en une fonction continue sur $[0,1]$, et que pour tout entier naturel n :

$$\int_0^1 u^n g(u)du \;=\; 0 \;.$$

   En déduire que g, et donc f, est la fonction nulle (on pourra utiliser le théorème de Weierstrass ; cette dernière question est classsique).

Exercice 42. [Oral Centrale, Mines] Soit

$$f(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}\,dt\ .$$

Domaine de définition ? La fonction f est-elle continue ? de classe C^1 ? Calculer la dérivée de f, puis f. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$

Le domaine de définition est $\mathbf{R}$, la fonction $t\mapsto\dfrac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$ se prolongeant par continuité à $[0,+\infty[$ et étant $\underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^3}\right)$, or $3>1$...Définissons, sur $\mathbf{R}\times]0,+\infty[$,

$$h\ :\ (x,t)\mapsto\frac{\arctan(xt)}{t(1+t^2)}$$

Il est préférable de montrer directement la classe C^1, la domination étant plus simple, mais il n'est pas impossible que l'examinateur demande expressément la continuité pour commencer. Pour dominer h, on ne peut pas utiliser

$$|\arctan(xt)|\leq\pi/2$$

car la fonction $x\mapsto\dfrac{\pi}{2t(1+t^2)}$ n'est pas intégrable sur $]0,+\infty[$. On a donc recours à l'inégalité

$$|\arctan u|\leq|u|$$

qui se montre par concavité de la fonction arctan sur $\mathbf{R}^+$ (la courbe est en-dessous de sa tangente au point d'abscisse 0) puis par imparité. On est alors amené à une domination sur tout segment (on suppose $M>0$) :

$$\forall(x,t)\in[-M,M]\times]0,+\infty[\qquad|h(x,t)|\leq\frac{M}{1+t^2}$$

Les autres hypothèses du théorème de continuité étant bien évidentes, on conclut.

Mais il aurait été plus judicieux de s'occuper d'abord de la classe C^1, en disant que h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$$

qui constitue une domination irréprochable. On ne s'attarde pas sur les hypothèses autres que la domination, elles sont faciles à vérifier. On aboutit au fait que f est C^1 sur $\mathbf{R}$, sa dérivée valant en tout $x \in \mathbf{R}$:

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \mathrm{d}t$$

que l'on calcule en décomposant en éléments simples, supposant $x \notin \{-1,0,1\}$. On cherche a,b,c,d tels que

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{at+b}{1+x^2t^2} + \frac{ct+d}{1+t^2}$$

La parité nous montre d'abord que $a = c = 0$. On réduit au même dénominateur, on voit que $b + d = 1$ et $b + dx^2 = 0$, d'où les valeurs de b et d et la décomposition

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{x^2-1}\frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1}\frac{1}{1+t^2}$$

Il faut alors éviter de se tromper avec le signe de x...supposons donc $x > 0$ et $x \neq 1$ dorénavant. Alors

$$f'(x) = \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-1}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(x+1)}$$

Cette valeur est encore valable pour $x = 1$ car f' est continue. Compte tenu de $f(0) = 0$ on obtient

$$\forall x \geq 0 \qquad f(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$$

et pour $x < 0$, par imparité, on trouve $-f(-x)$...L'intégrale demandée se calcule par parties pour se ramener à $f(1)$.

Exercice 43 (Oral X). Existence et calcul de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}dt$$

Commençons par nous échauffer doucement en étudiant l'existence ; pour tout x réel, la fonction $\dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et même prolongeable par continuité à $[0,+\infty[$. Dominée par $1/t^3$ au voisinage de $+\infty$, elle est, par comparaison à l'exemple de Riemann, intégrable sur $[1,+\infty[$, donc sur $]0,+\infty[$. L'intégrale proposée existe donc pour tout x réel.
On peut penser alors calculer l'intégrale en la considérant comme fonction de x et en la dérivant (on voit que l'expression sera plus simple). Définissons donc la fonction

$$\begin{array}{rccc} f \ : & \mathbf{R}\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} \end{array}$$

On vient de voir que, pour tout x réel, $f(x,.)\ :\ t\mapsto f(x,t)$ est continue (par morceaux suffirait) intégrable sur $]0,+\infty[$. Par opérations, f est dérivable par rapport à se première variable sur $\mathbf{R}\times]0,+\infty[$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x}\ :\ (x,t)\mapsto \frac{\cos(tx)}{1+t^2}$$

vérifie les hypothèses du théorème de continuité (vérification facile, domination par $\dfrac{1}{1+t^2}$ par exemple). Par théorème, l'intégrale proposée est donc fonction de classe C^1 de la variable x, et sa dérivée est

$$h\ :\ x\mapsto \int_0^{+\infty}\frac{\cos(tx)}{1+t^2}dt$$

…mais cette intégrale, quoique plus simple que celle de départ, n'est pas si évidente à calculer qu'on le souhaiterait. Re-dériver n'est pas possible : le nouveau facteur t qui sortirait de la dérivation de $\cos(xt)$ rendrait la fonction équivalente en $+\infty$ à $1/t$, donc non intégrable. Deux idées peuvent être tentées. Le changement de variable $u=xt$, $t=u/x$, ou une intégration par parties pour augmenter le degré du dénominateur. La première méthode ne donne pas (rapidement, au moins) de résultats convaincants. Essayons la seconde. On suppose $x \neq 0$, et on écrit

$$\begin{aligned} h(x) &= \Big[\frac{\sin(tx)}{x(1+t^2)}\Big]_{t=0}^{t\to+\infty} + \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}dt \\ &= \frac{2}{x}\int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}dt \end{aligned}$$

Ou encore

$$\frac{x}{2}h(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t\sin(tx)}{(1+t^2)^2}dt$$

Il n'est pas difficile (on ne donnera pas les détails, c'est long à écrire) d'en déduire que $x \mapsto \dfrac{x}{2}h(x)$ est de classe C^1, sa dérivée étant

$$x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(tx)}{(1+t^2)^2}dt$$

Remarquons alors que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2\cos(tx)}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{(1+t^2-1)\cos(tx)}{(1+t^2)^2}dt = h(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}dt$$

Qu'obtient-on ? que

$$\frac{d}{dx}\big(\frac{x}{2}h(x)\big) - h(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}dt$$

Or l'intégrale du second membre se dérive sans trop de problème (la plupart des dominations dans cet exercice proviennent de majorations de $|\cos|$ ou $|\sin|$ par 1). On en déduit assez facilement que h est au moins C^2, et de la dérivation de

$$\frac{x}{2}h'(x) + \frac{1}{2}h(x) - h(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{(1+t^2)^2}dt$$

on tire

$$\frac{1}{2}h'(x) + \frac{x}{2}h''(x) - \frac{1}{2}h'(x) = \frac{x}{2}h(x)$$

ou encore, pour tout $x > 0$,

$$h''(x) = h(x)$$

Donc $h(x) = \alpha e^x + \beta e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$. Donc sur $[0, +\infty[$ par continuité. Une intégration par parties (intégrer le cosinus, dériver $\dfrac{1}{1+t^2}$) montre que h a une limite nulle en $+\infty$. Donc $\alpha = 0$. La valeur en 0 donne $\beta = \pi/2$. Reste à primitiver en tenant compte là encore de la limite en 0 :

$$\forall x \geq 0 \qquad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)} dt = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-x})$$

et, par imparité, les valeurs négatives s'en déduisent.

Exercice 44. Existence et calcul éventuel de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}dt$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}\sin(tx)}{t}$ est continue sur $\mathbf{R}_*^+$, prolongeable par continuité en 0 (elle a pour limite x en 0), seul se pose donc le problème de l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$. Mais on a, par croissances comparées,

$$e^{-t} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t}\right)$$

donc, sin étant bornée,

$$\left|\frac{e^{-t}\sin(tx)}{t}\right| \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

ce qui prouve par comparaison à l'exemple de Riemann l'intégrabilité sur $[1, +\infty[$ et, par suite, sur $]0, +\infty[$. L'intégrale est bien définie.

Définissons maintenant

$$\begin{array}{rcccl} h & : & \mathbf{R}\times]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-t}\sin(xt)}{t} \end{array}$$

• Pour tout $x \in \mathbf{R}$, la fonction $h(x, .) \; : \; t \mapsto h(x,t)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude de l'existence de l'intégrale).

• h est dérivable par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}\times]0, +\infty[\qquad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = e^{-t}\cos(xt)$$

• Pour tout $x \in \mathbf{R}_*^+$, $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, .)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $]0, +\infty[$, intégrable sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous mais on peut le voir rapidement : pas de problème en 0, et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).

• Pour tout $t \in [0, +\infty[$, la fonction $\dfrac{\partial h}{\partial x}(., t)$ est continue sur $\mathbf{R}$.

• **Domination :** Soit K un compact inclus dans $\mathbf{R}$. Il existe M tel que $0 < M$ et $K \subset [-M, M]$. On a alors

$$\forall (x,t) \in K \times]0, +\infty[\quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq Mte^{-t}$$

(en utilisant l'inégalité, vraie pour tout réel u : $|\sin u| \leq |u|$) et $\phi_K \;:\; t \mapsto Mte^{-t}$ est indépendante de x, continue (*par morceaux* suffirait), intégrable sur $]0, +\infty[$ par comparaison à l'exemple de Riemann (pas de problème en 0, et négligeable devant $\dfrac{1}{t^2}$ au voisinage de $+\infty$).
En appliquant le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on conclut : l'application $\phi \;:\; x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{t} dt$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}$, et

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \phi'(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t} dt$$

on calcule facilement en interprétant comme partie réelle d'une intégrale facile à calculer, puis on primitive, et on utilise $\phi(0) = 0$.

Exercice 45. [Oral Mines] Existence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}dt$.

Le bon réflexe, après avoir montré l'existence (comparaison à Riemann en 0 et en $+\infty$) est de considérer cette intégrale, définie sur $\mathbf{R}$, comme fonction de x, de classe C^1 sur $\mathbf{R}_*^+$, et de dérivée

$$x\mapsto 2x\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\mathrm{d}t$$

(se montre par domination sur $[a,b]$, $0<a<b$, du type

$$\frac{1}{(1+t^2)(x^2+t^2)}\leq\frac{1}{(1+t^2)(a^2+t^2)}$$

On calcule la dérivée par décomposition en éléments simples (même chose que dans un autre exercice plus haut, on écarte momentanément $x=1$ puis on le récupère par continuité). On obtient, notant $I(x)$ l'intégrale :

$$\forall x\in]0,1[\cup]1,+\infty[\qquad I'(x)=\frac{2x}{x^2-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{x^2+t^2}\right)\mathrm{d}t$$

Donc, si $x>0$ et $x\neq 1$,

$$I'(x)=\frac{2x}{x^2-1}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2x}\right)=\frac{\pi}{x+1}$$

formule qui reste vraie pour $x=1$, par continuité. Donc

$$\forall x>0\qquad I(x)=\pi\ln(x+1)+k$$

où $k\in\mathbf{R}$. Le principal problème est la continuité de I en 0. Une domination n'est pas évidente, on peut partir, si $x\in[0,a]$, $a>0$, de la constatation suivante : si $x^2+t^2\leq 1$, on a $0<t^2\leq x^2+t^2\leq 1$, donc

$$\left|\ln(x^2+t^2)\right|\leq\left|\ln(t^2)\right|$$

si au contraire $x^2+t^2\geq 1$, on a $1\leq x^2+t^2\leq a^2+t^2$ et donc

$$\left|\ln(x^2+t^2)\right|\leq\left|\ln(a^2+t^2)\right|$$

Comment dominer à partir de ces remarques ? car l'ensemble des t qui vérifie la première condition et l'ensemble des t qui vérifient la seconde condition dépendent tous les deux de x. Mais, de toute manière,

$$\left|\ln(x^2+t^2)\right| \leq 2\left|\ln(t)\right| + \left|\ln(a^2+t^2)\right|$$

et donc on peut dominer

$$\forall (x,t)\in [0,a]\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\ln(x^2+t^2)}{1+t^2}\right| \leq \frac{2\left|\ln(t)\right| + \left|\ln(a^2+t^2)\right|}{1+t^2}$$

ce qui permet de montrer la continuité sur $\mathbf{R}^+$ et donc, par parité, sur $\mathbf{R}$. Or $I(0)=0$ (découper l'intégrale en deux intégrales, sur $]0,1[$ et sur $]0,+\infty[$, et faire dans l'une d'elles le changement de variable $t=1/u$). Donc, si $x\geq 0$,

$$I(x)=\pi\ln(1+x)$$

Et, pour x quelconque, $I(x)=\pi\ln(1+|x|)$.

Exercice 46. [Oral Mines] Etudier f définie par

$$f(x) = \int_0^x \frac{e^t}{x+t} dt \ .$$

Si $x > 0$, pas de problème de définition. Même chose si $x < 0$. Si $x = 0$, l'intégrale sur un singleton d'une fonction pas définie au point considéré n'est pas vraiment définie. La variable figure à la fois dans une borne et à l'intérieur de l'intégrale. Le changement de variable $t = xu$ donne

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{xu}}{1+u} \mathrm{d}u$$

Alors que le changement de variable $t = u - x$ donne

$$f(x) = e^{-x} \int_x^{2x} \frac{e^u}{u} \mathrm{d}u$$

Pour le prolongement par continuité en 0 (par la valeur $\ln 2$) la première forme est plutôt un peu plus simple (théorème de continuité sous le signe $\int$). D'ailleurs la classe C^∞ est aussi sympathique sous la première forme (domination sur tout segment). Mais pour les variations, la deuxième forme permet un calcul immédiat de f', en notant

$$\int_x^{2x} \frac{e^u}{u} \mathrm{d}u = F(2x) - F(x)$$

où F est une primitive de $u \mapsto e^u/u$.

Exercice 47. [Oral Mines] On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{x^2+t^2}\, dt$**. Ensemble de définition ? continuité ? caractère** C^1 **?** ***On montrera que*** f ***est*** C^1 ***sur*** $\mathbf{R}\setminus\{0\}$***.*** **Déterminer les limites, puis des équivalents en 0 et en** $+\infty$**. A l'occasion on rappellera les énoncés précis des théorèmes d'intégration.**

La fonction $t \mapsto \dfrac{1-\cos t}{x^2+t^2}$ est continue sur $]0,+\infty[$, se prolonge par continuité en 0 en lui donnant en général la valeur 0, sauf si $x=0$ (valeur $1/2$). Comme elle est $\underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, la comparaison avec les fonctions de Riemann donne l'intégrabilité. On définit sur $\mathbf{R}\times]0,+\infty[$ la fonction h par

$$h(x,t) = \frac{1-\cos t}{x^2+t^2}$$

est continue, et la domination

$$|h(x,t)| \leq \frac{1-\cos t}{t^2}$$

montre bien la continuité. Pour la classe C^1, h est dérivable par rapport à x, et pour tous $(x,t)\in\mathbf{R}\times]0,+\infty[$,

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{-2x(1-\cos t)}{(x^2+t^2)^2}$$

est continue par rapport à chacune de ses variables, la domination

$$\forall (x,t)\in[a,b]\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2b(1-\cos t)}{(a^2+t^2)^2}$$

(où $0<a<b$) montre la classe C^1 sur $\mathbf{R}_*^+$. Donc sur $\mathbf{R}_*$ par parité. Il est possible de montrer que f n'est pas C^1 en montrant que f' a une limite infinie en 0. C'est un peu technique.

La limite en $+\infty$ est nulle (convergence dominée). La limite en 0 est

$$\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\mathrm{d}t$$

(théorème de convergence dominée ou continuité). Et est donc un équivalent, car elle est non nulle. La recherche d'un équivalent en $+\infty$ est plus délicate. On essaye de « faire sortir » de l'intégrale quelque chose qui tend vers 0, en effectuant une intégration par parties ou un changement de variable. Le changement de variable le plus naturel serait $t = xu$ qui ferait sortir un $1/x$:

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xu)}{1+u^2}\mathrm{d}u\right)$$

et une intégration par parties de l'intégrale figurant dans cette expression donne l'équivalent $\dfrac{\pi}{2x}$.

Exercice 48. [Oral Mines] Calculer

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2-iux}\ dx\ .$$

On étudie cette intégrale comme fonction de u :

$$f(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-iux}\ dx$$

On voit qu'elle est C^1 assez facilement (c'est une transformée de Fourier, les dominations sont donc faciles). Par intégration par parties, on trouve une relation entre $f'(u)$ et $f(u)$: en effet, si on a bien trouvé

$$f'(u)=\int_{-\infty}^{+\infty} -ixe^{-x^2-iux}\mathrm{d}x$$

on peut se servir du x pour intégrer par parties, en primitivant xe^{-x^2} et en dérivant e^{-iux} :

$$f'(u)=-i\left(\left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}e^{-iux}\right]_{x\to-\infty}^{x\to+\infty}-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{-1}{2}e^{-x^2}(-iu)e^{-iux}\mathrm{d}u\right)$$

ce qui donne

$$f'(u)=-\frac{u}{2}f(u)$$

On en déduit l'existence d'une constante K telle que

$$\forall u\in\mathbf{R}\qquad f(u)=K\exp(-u^2/4)$$

Mais on « sait » :

$$K=f(0)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx=\sqrt{\pi}$$

Exercice 49. [Oral Centrale] Calculer, pour x réel,

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(tx)}{t^2} e^{-t}\ dt$$

(on étudiera la classe de f, et on essaiera de la dériver deux fois sur un intervalle).

Il est prudent de commencer par étudier l'existence, qui ne pose pas trop de problèmes. On montre ensuite que f est de classe C^2 (domination facile). Sa dérivée seconde se calcule sans grande difficulté : on trouve

$$f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Mais $f(0) = f'(0) = 0$, une double primitivation donne alors

$$f(x) = x\text{Arctan}x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

Exercice 50. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t} t^x \, dt$. Etudier la définition de f, sa dérivabilité, puis la calculer.

Comme $\ln t = \ln(1+(t-1)) \underset{t\to 1}{\sim} t-1$ il n'y a pas de problème en 1. On a

$$\frac{t-1}{\ln t} t^x \underset{t\to 0}{\sim} -\frac{t^x}{\ln t}$$

Déjà, $-\dfrac{t^x}{\ln t} \underset{t\to 0}{=} o\,(t^x)$ ce qui montre l'intégrabilité pour $x > -1$. Examinons le cas $x = -1$; le calcul direct, si $0 < y < 1/2$,

$$\int_y^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{t \ln t} = \left[\ln\left(-\ln t\right)\right]_y^{1/2}$$

montre la divergence, c'est-à-dire la non intégrabilité (car la fonction est de signe constant). Pour $x < -1$, c'est pire, puisqu'alors

$$-\frac{t^{-1}}{\ln t} \underset{t\to 0}{=} o\left(-\frac{t^x}{\ln t}\right)$$

On trouve donc le domaine de définition : $]-1,+\infty[$. Sur lequel f est de classe C^1 ; en effet, soit

$$\begin{array}{rccl} h \ : &]-1,+\infty[\times]0,1[& \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{t-1}{\ln t} t^x \end{array}$$

On vient de voir que, pour tout $x > -1$, la fonction $t \mapsto h(x,t)$ est (continue) (par morceaux suffirait) intégrable sur $]0,1[$. De plus pour tout $t \in]0,1[$ la fonction $x \mapsto h(x,t)$ est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$, de dérivée

$$\frac{\partial h}{\partial x} \ : \ (x,t) \longmapsto t^{x+1} - t^x$$

Domination : si $-1 < a < b$,

$$\forall (x,t) \in [a,b]\times]0,1[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial x}(x,t)\right| \leq t^{a+1} + t^a$$

et comme $a > -1$, $a+1 > -1$, la fonction dominante est bien intégrable sur $]0,1[$. Par théorème, on en déduit que f est bien C^1 et que, pour tout $x > -1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

On primitive, on va avoir le résultat à une constante près ; on remarquant que probablement f a pour limite 0 en $+\infty$, ce qu'assure effectivement le théorème de convergence dominée avec la domination suivante :

$$\forall x \geq 0 \qquad \forall t \in]0,1[\qquad \left|\frac{t-1}{\ln t} t^x\right| \leq \frac{t-1}{\ln t}$$

et on conclut, pour $x > -1$,

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)$$

Exercice 51. [Oral Centrale] Définition, continuité et dérivabilités successives de

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t} dt$$

Le domaine de définition est $\mathbf{R}_*^+$. Le changement de variable $u = x + t$, $t = u - x$ permet de sortir x de l'intégrale. D'où assez facilement la classe C^∞.

Exercice 52. [Oral Centrale] Soit a et b des réels avec $0 < a < b$. On pose
$F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(tx)\ dt$**. Trouver I, domaine de définition de F. Montrer que F est C^1 et calculer F'. Calculer $F(0)$, puis $F(x)$ pour tout x de I.**

La fonction à l'intérieur de l'intégrale se prolonge par continuité en 0, et est négligeable devant n'importe quelle puissance de $1/t$ au voisinage de $+\infty$. On a donc $I = \mathbf{R}$.
Le théorème de dérivation sous le signe $\int$ s'applique sans grande difficulté (on domine la dérivée partielle par rapport à x par $e^{-at} - e^{-bt}$, voire par $e^{-at} + e^{-bt}$ (inégalité triangulaire) si on n'a pas remarqué la positivité de $e^{-at} - e^{-bt}$. Le calcul de la dérivée est facilité par le fait de poser $\sin(xt) = \mathrm{Im}(e^{ixt})$. On trouve

$$F'(x) = \frac{x}{b^2 + x^2} - \frac{x}{a^2 + x^2}$$

Et donc

$$F(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{b^2 + x^2}{a^2 + x^2}\right) + cte$$

Pour la constante, on peut calculer la valeur en 0, qui est la limite quand $\epsilon \to 0$ de

$$\int_\epsilon^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\ dt$$

On coupe l'intégrale en deux (ce qu'on ne pourrait pas faire avec $\epsilon = 0$), on fait dans la première intégrale le changement de variable $t = u/a$, dans la deuxième $t = u/b$, on obtient

$$F(0) = \lim_{\epsilon \to 0} \left(\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u}}{u}\ du\right)$$

limite qui vaut $\ln(b/a)$ (même technique que celle vue dans l'exercice sur $\displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$). La constante est donc nulle. Explications plus détaillées page suivante !

Détail de la dernière étape : on peut faire le changement de variable $u = a\epsilon + (b\epsilon - a\epsilon)v$; ou écrire :

$$\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du = \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{du}{u} \; + \; \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}\, du$$

La première intégrale se calcule. La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}-1}{u}$ se prolonge par continuité en 0, et a pour limite 0 en $+\infty$. Or elle est continue. Elle est donc bornée. Et en majorant

$$\left|\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u}-1}{u}\, du\right| \leq \int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \left|\frac{e^{-u}-1}{u}\right|\, du \leq M(b-a)\epsilon$$

on voit que cette intégrale tend vers 0 quand ϵ tend vers 0 (rappelons que $\epsilon > 0$ dans tous les calculs).

Pour le changement de variable :

$$\int_{a\epsilon}^{b\epsilon} \frac{e^{-u}}{u}\, du \;=\; (b-a)\int_0^1 \frac{e^{-a\epsilon+(a\epsilon-b\epsilon)v}}{a+(b-a)v} dv$$

qui tend sans trop de problème (convergence dominée bien sûr !), quand $\epsilon \to 0$, vers

$$(b-a)\int_0^1 \frac{1}{a+(b-a)v} dv$$

qui vaut bien ce qu'on veut.

On pouvait également s'inspirer du lemme de Riemann-Lebesgue : on définit la fonction

$$\phi \;:\; t \longmapsto \frac{e^{-at}-e^{-bt}}{t}$$

qui est prolongeable en une fonction C^{∞}, car développable en série entière, sur $\mathbf{R}$. On a alors par intégration par parties :

$$\int_0^{+\infty} \phi(t)\cos(xt)\ \mathrm{d}t = \left[\phi(t)\frac{\sin(xt)}{x}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \frac{1}{x}\int_0^{+\infty} \phi'(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t$$

(la présence des exponentielles « négatives » dans l'expression de ϕ légitime l'existence de tous les termes : on retrouve en effet ces exponentielles négatives

(e^{-at} ou e^{-bt}) en facteur dans chaque terme de $\phi'(t)$).

Le crochet est nul, et la majoration

$$\left|\int_0^{+\infty} \phi'(t)\sin(xt)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_0^{+\infty} |\phi'(t)|\mathrm{d}t$$

donne une limite nulle en $\pm\infty$ pour F. D'où la constante et, par suite, la valeur en 0.

Exercice 53. Donner le domaine de définition de $f(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^x(1+t)}$. Montrer que f est convexe, de classe C^∞. Déterminer ses limites en 0 et $+\infty$ puis donner un équivalent en $+\infty$.

Avec un équivalent, on trouve le domaine de définition : $]0, +\infty[$. On doit montrer, si $\alpha \in [0,1]$, si x, y sont des réels strictement positifs,

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

pour ceci, l'idéal serait d'avoir

$$\forall t \geq 1 \qquad \frac{1}{t^{\alpha x + (1-\alpha)y}} \leq \frac{\alpha}{t^x} + \frac{1-\alpha}{t^y}$$

Car il suffirait alors de multiplier tout par $\dfrac{1}{1+t}$, et d'intégrer l'inégalité sur $[1, +\infty[$. Bref, on aimerait bien que la fonction $u \mapsto t^{-u}$ soit convexe sur $]0, +\infty[$. Elle l'est (calculer sa dérivée seconde).
On définit alors

$$h \ : \ (x,t) \longmapsto \frac{t^{-x}}{1+t}$$

qui est continue par rapport à t, intégrable sur $[1, +\infty[$ pour tout $x > 0$. Elle est indéfiniment dérivable par rapport à x sur son domaine de définition, et on calcule sans grande difficulté

$$\frac{\partial^k h}{\partial x^k} \ : \ (x,t) \longmapsto (-\ln t)^k \frac{t^{-x}}{1+t}$$

La domination, pour $k \geq 0$,

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times]1, +\infty[\qquad \left| \frac{\partial^k h}{\partial x^k} \right| \leq \frac{(\ln t)^k}{t^a(1+t)}$$

où $0 < a < b$ permet de montrer la classe C^∞. L'intégrabilité de la fonction dominante se montrant à l'aide d'une croissance comparée : si $0 < a' < a$,

$$\frac{(\ln t)^k}{t^a(1+t)} \underset{t \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^{a'}(1+t)} \right)$$

f décroît, sa limite en $+\infty$ est nulle par théorème de convergence dominée. Si elle a une limite réelle ℓ en 0, cette limite la majore. Et a fortiori, la fonction intégrée étant positive, majore $\displaystyle\int_1^A \frac{dt}{t^x(1+t)}$ pour n'importe quel $A \geq 1$. Or, avec une domination par $1/(1+t)$ par exemple et le théorème de convergence dominée,

$$\int_1^A \frac{dt}{t^x(1+t)} \xrightarrow[x\to 0]{} \int_1^A \frac{dt}{(1+t)}$$

On aurait alors $\ln(1+A) - \ln 2 \leq \ell$ pour tout A, pas possible. Donc la limite en 0 est $+\infty$.

Pour un équivalent en $+\infty$, on aimerait, par changement de variable ou intégration par parties, faire « sortir » un terme qui tend vers 0. On peut penser faire le changement de variable $u = t^x$, $t = u^{1/x}$, qui donne

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_1^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}\mathrm{d}u$$

Mais, avec une domination par $1/u^2$, le théorème de convergence dominée montre que

$$\int_1^{+\infty} \frac{u^{1/x}}{u^2(1+u^{1/x})}\mathrm{d}u \xrightarrow[x\to +\infty]{} \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{u^2}$$

ce qui donne assez facilement un équivalent. Qui marche aussi en 0.

Exercice 54. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(x^2 - \sin^2 t)\ dt$, définie pour $x > 1$. Calculer $f'(x)$ et en déduire f. Donner un équivalent de f en $+\infty$.

Plan d'étude : le théorème de dérivation sous le signe $\int$ permet, après une domination sur tout segment :

$$\forall x \in [\alpha, \beta] \quad \forall t \in [0, \pi/2] \qquad \left|\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,t)\right| \leq \frac{2\beta}{\alpha^2 - 1}$$

$(1 < \alpha < \beta)$ donne que f est C^1, et

$$f'(x) = 2\int_0^{\pi/2} \frac{x}{x^2 - \sin^2 t} dt$$

qu'un changement de variable $u = \tan t$, $t = \operatorname{Arctan} t$ permet de calculer (l'intégration se fait avec une arc tangente) :

$$f'(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

et donc, primitive « classique »...

$$f(x) = \pi \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + C$$

et, assez directement, l'équivalent en $+\infty$:

$$f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} \pi \ln x$$

Le calcul de la constante n'est pas évident. On commence par remarquer que la valeur de cette constante C est la limite en 1 de f. Montrer que f est bien définie pour $x = 1$ n'est pas très difficile :

$$\ln(1 - \sin^2 t) = 2\ln(\cos t)$$

si $t \in]0, \pi/2[$. Le problème se pose en $\pi/2$, mais, le changement de variable $t = \pi/2 - u$ permet de voir que c'est le même problème que celui de l'intégrabilité de $t \mapsto \ln(\sin t)$ sur $]0, \pi/2]$. Or

$$\ln(\sin t) = \ln t \ + \ \ln\left(\frac{\sin t}{t}\right)$$

On a vu que $t \mapsto \ln t$ était intégrable sur $]0, a]$, $a > 0$. La fonction $t \mapsto \ln\left(\dfrac{\sin t}{t}\right)$ est prolongeable par continuité en 0, donc ne pose pas de problème. Combien vaut $f(1)$? posant

$$I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin t)\ dt$$

et

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos t)\ dt$$

on montre que $I = J$, puis on calcule

$$\begin{aligned}
I + J &= \int_0^{\pi/2} \ln \sin(2t)\ dt\ - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln \sin u\ du\ - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \ln \sin u\ du\ + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \ln \sin u\ du\ - \frac{\pi}{2}\ln 2 \\
&= I\ - \frac{\pi}{2}\ln 2
\end{aligned}$$

(changement de variable $u = \pi - v$ dans l'intégrale sur $[\pi/2, \pi]$). Reste le plus dur : montrer la continuité de f en 1. En effet, la domination est délicate dans la mesure où $|\ln|$ n'est pas croissante sur $\mathbf{R}_*^+$. Ainsi,

$$\left|\ln(x^2 - \sin^2 t)\right| \leq \left|\ln(1 - \sin^2 t)\right| \qquad \text{si} \qquad x^2 - \sin^2 t \leq 1$$

mais, si, au contraire, $x^2 - \sin^2 t \geq 1$, on a, en supposant $x \leq a$,

$$\left|\ln\left(x^2 - \sin^2 t\right)\right| \leq \left|\ln\left(a^2 - \sin^2 t\right)\right|$$

La fonction dominante ne doit pas dépendre de x ! mais on peut prendre, pour $x \in [1, a]$,

$$\left|\ln\left(a^2 - \sin^2 t\right)\right| + \left|\ln\left(1 - \sin^2 t\right)\right|$$

Donc f est continue en 1, et cela permet de calculer C.

Exercice 55 (Oral Centrale). Soit $f\ :\ x\mapsto\displaystyle\int_0^{\pi/2}\sin^x t\ dt$. Domaine de définition, continuité, dérivabilité ?

Soit $\phi\ :\ x\mapsto xf(x)f(x-1)$. Montrer que $\forall x>0\ \phi(x)=\phi(x-1)$. Montrer que $x\mapsto\dfrac{\phi(x)}{x}$ est décroissante. Pour $n\in\mathbf{N}$, calculer $\phi(n)$. Montrer que ϕ est constante.

Calculer les limites de f en $+\infty$ et en -1. Equivalents ?

Exercice 56. On pose, pour $x\geq 0$, $f(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-xt}}{1+t^2}\ dt$ et $g(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{x+t}\ dt$.

1. **Vérifier que ces deux intégrales sont bien définies.**
2. **Ecrire** $g(x)$ **sous la forme** $\phi(x)\cos x+\psi(x)\sin x$**, où** $\phi(x)$ **et** $\psi(x)$ **sont deux intégrales sur l'intervalle** $[x,+\infty[$.

On trouve

$$g(x)=\cos(x)\ \int_x^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt\ -\ \sin(x)\ \int_x^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$$

---

3. **Etudier la continuité de** f **et de** g**.**
4. **Démontrer que** f **et** g **sont de classe** C^2 **sur** $]0,+\infty[$ **et sont toutes les deux solutions de** $y''+y=\dfrac{1}{x}$.

On a vu que f et g étaient continues sur $[0,+\infty[$.

Montrons que f **est de classe** C^2 **sur** $\mathbf{R}_*^+$:

Pour cela, on définit

$$\begin{array}{rccl} h\ : & \mathbf{R}_*^+\times]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbf{R}\\ & (x,t) & \longmapsto & \dfrac{e^{-xt}}{1+t^2}\end{array}$$

• Pour tout $x \in \mathbf{R}_*^+$, la fonction $h(x,.) \ : \ t \mapsto h(x,t)$ est continue (par morceaux suffirait) sur $[0,+\infty[$, intégrable sur cet intervalle (vu lors de l'étude du domaine de définition de f).

• h est deux fois dérivable (davantage, même !) par rapport à sa première variable sur son domaine de définition, et

$$\forall (x,t) \in \mathbf{R}_*^+ \times]0,+\infty[\quad \frac{\partial h}{\partial x}(x,t) = \frac{-te^{-xt}}{1+t^2} \quad , \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,t) = \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}$$

• Pour tout $x \in \mathbf{R}_*^+$, les fonctions $\dfrac{\partial h}{\partial x}(x,.)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(x,.)$ sont continues (par morceaux suffirait) sur $[0,+\infty[$, intégrables sur cet intervalle (c'est une conséquence des dominations ci-dessous).

• Pour tout $t \in [0,+\infty[$, les fonctions $\dfrac{\partial h}{\partial x}(.,t)$ et $\dfrac{\partial^2 h}{\partial x^2}(.,t)$ sont continues sur $\mathbf{R}_*^+$.

• **Domination :** Soit K un compact inclus dans $\mathbf{R}_*^+$. Il existe a, b tels que $0 < a < b$ et $K \subset [a,b]$. Si $k=1$ ou $k=2$, on peut majorer :

$$\forall (x,t) \in K \times [0,+\infty[\quad \left|\frac{\partial^k h}{\partial x^k}(x,t)\right| \leq \frac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$$

et $\phi_K \ : \ t \mapsto \dfrac{t^k e^{-at}}{1+t^2}$ est indépendante de x, continue (*par morceaux* suffirait), intégrable sur $[0,+\infty[$ par comparaison à l'exemple de Riemann (en effet, par croissances comparées, $\dfrac{te^{-at}}{1+t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$).
En appliquant deux fois le théorème de dérivation sous le signe $\int$, on conclut :

f est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_*^+$, et

$$\forall x > 0 \qquad f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2e^{-xt}}{1+t^2}dt$$

d'où l'on tire facilement $f''(x) + f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$ (x>0).

Montrons que g est de classe C^2 sur $\mathbf{R}_*^+$:

On a vu que l'on pouvait écrire, sur $\mathbf{R}_*^+$,

$$g(x) = \phi(x)\ \cos x + \psi(x)\ \sin x$$

où ϕ et ψ sont de classe C^1 sur $\mathbf{R}_*^+$, de dérivées $\phi'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$ et $\psi'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$. Donc g est C^1 sur $\mathbf{R}_*^+$, et, pour tout $x > 0$,

$$g'(x) = \cos x\ \phi'(x) - \sin x\ \phi(x) + \cos x\ \psi(x) + \sin x\ \psi'(x) = -\sin x\ \phi(x) + \cos x\ \psi(x)$$

ce qui permet de dire que g' est de classe C^1, donc g de classe C^2 sur $\mathbf{R}_*^+$, et, pour tout $x > 0$,

$$g''(x) = -\sin x\ \phi'(x) - \cos x\ \phi(x) + \cos x\ \psi'(x) - \sin x\ \psi(x) = \frac{1}{x} - g(x)$$

d'où découle le résultat.

---

5. **Calculer** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt.$

La fonction $f - g$ est solution sur $\mathbf{R}_*^+$ de l'équation $y'' + y = 0$, elle est donc de la forme $t \mapsto a\cos t + b\sin t$ ou $t \mapsto A\cos(t+\phi)$. Mais on remarque que f a pour limite 0 en $+\infty$, par caractérisation séquentielle de la limite et théorème de convergence dominée, ou par simple majoration :

$$0 \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$$

et de même, comme ϕ et ψ ont des limites nulles en $+\infty$, c'est aussi le cas de g. Donc $A = 0$ (on peut aussi dire qu'une fonction périodique ayant une limite en $+\infty$ est constante), donc $f = g$ sur $\mathbf{R}_*^+$. Par continuité en 0, $f(0) = g(0)$, et donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$$

Exercice 57 (Autour de la fonction Γ).

1. Montrer que
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$
est bien définie sur $\mathbf{R}_*^+$.

2. Montrer que Γ est continue sur $\mathbf{R}_*^+$.

3. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x > 0$ et en déduire $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbf{N}_*$.

4. Tracer le graphe de Γ.

5. Soit z un réel strictement positif. Démontrer que
$$\int_0^n t^{x-1}\big(1-\frac{t}{n}\big)^n dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$
(on pourra utiliser la fonction caractéristique du segment $[0,n]$). Puis faire un changement de variable affine pour ramener la première intégrale à une intégrale sur le segment $[0,1]$ et démontrer que
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x\ n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$
(c'est la **formule de Gauss**).

6. Démontrer que Γ est logarithmiquement convexe sur $]0,+\infty[$, c'est-à-dire que $\ln\Gamma$ est convexe sur cet intervalle. On pourra appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

7. Soit Φ une fonction définie sur $]0,+\infty[$, strictement positive et de classe C^2 sur cet intervalle, logarithmiquement convexe, vérifiant $\Phi(x+1) = x\Phi(x)$ pour tout x.
On définit $H = \dfrac{\Phi}{\Gamma}$.
Démontrer que H est 1-périodique ; exprimer H'/H en fonction de Φ'/Φ et de Γ'/Γ.

On considère un élément x de $]0,1]$. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :
$$\frac{\Phi'(n)}{\Phi(n)} - \frac{\Gamma'(n+1)}{\Gamma(n+1)} \leq \frac{H'(x+n)}{H(x+n)} \leq \frac{\Phi'(n+1)}{\Phi(n+1)} - \frac{\Gamma'(n)}{\Gamma(n)}$$
puis que
$$\frac{H'(n)}{H(n)} - \frac{1}{n} \leq \frac{H'(x)}{H(x)} \leq \frac{H'(n)}{H(n)} + \frac{1}{n}$$
En déduire que, pour tout réel strictement positif x :
$$\Phi(x) = \Phi(1)\Gamma(x)$$
(c'est le **théorème d'Artin**).

8. Utiliser le théorème d'Artin pour démontrer la **formule de duplication de Legendre** :
$$2^{x-1}\Gamma\big(\frac{x}{2}\big)\Gamma\big(\frac{x+1}{2}\big) = \sqrt{\pi}\ \Gamma(x)$$
et en déduire
$$\int_{[0,1]} \ln\Gamma = \ln\sqrt{2\pi}$$

1 Inégalités intégrales

Les problèmes dans ce domaine sont variés, souvent difficiles, et assez variés. On les rencontre en général à l'oral : à l'écrit, ils sont plus détaillés. Une liste de méthode n'est pas nécessairement pertinente, donc. Mais :

— Lorsqu'il y a des carrés, on peut penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais aussi aux formules de Parseval (voir cours sur les séries de Fourier).

— Si l'inégalité met en jeu f et ses dérivées successives, si les hypothèses sont faites en a, on écrira souvent
$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt\ .$$

Exercice 58. Soit f de classe C^1 sur $[0,1]$, à valeurs réelles, telle que $f(1) = 0$. Montrer que :

$$\int_0^1 f(t)^2 \ dt \leq \frac{1}{2} \int_0^1 f'(t)^2 \ dt \ .$$

Exercice 59. Soit f de classe C^2 sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f'(1) = 0$. Démontrer que :

$$\Big| \int_0^1 f(t) \ dt \Big| \leq \frac{1}{3} \sup_{x \in [0,1]} |f''(x)| \ .$$

Exercice 60. Soit f une fonction ce classe C^1 sur un segment $[a,b]$ de $\mathbf{R}$, telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $M = \sup_{t \in [a,b]} \big| f'(t) \big|$. Démontrer que

$$\Big| \int_a^b f(t) dt \Big| \leq \frac{(b-a)^2}{4} M \ .$$

Exercice 61 (Oral Mines, inégalité de Young). Soit f une application de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$, à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, strictement croissante et vérifiant $f(0) = 0$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt \ = \ x f(x) \ .$$

Démontrer que, si a et b sont strictement positifs,

$$\int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt \ \geq ab.$$

Quels sont les cas d'égalité ?

2 Interversion de séries et d'intégrales

Exercice 62. On veut démontrer la formule suivante :

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{e^t - 1} dt \qquad \text{si } x > 1$$

Faire apparaître dans l'intégrale du second membre des termes qui rappellent $\Gamma(x)$, utiliser

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

(si $|u| < 1$) et conclure.

Exercice 63. Calculer, pour tout n de $\mathbf{N}^*$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-nx} dx$$

puis démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x - 1} dx$$

Exercice 64. Démontrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx$$

Exercice 65. Démontrer que

$$\int_0^1 x^x dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^n}$$

Quel intérêt représente cette formule si l'on veut, par exemple, calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de l'intégrale figurant au premier membre ?

Exercice 66. Soit α un réel strictement positif. Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\alpha+2} - \cdots$$

Exercice 67. Démontrer que, si $x > 0$,

$$\int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+x)}$$

et retrouver un résultat (égalité entre deux séries) déjà obtenu dans un exercice précédent. En quoi cela permet-il de prolonger la fonction Γ ?

Exercice 68 (Oral Centrale). Posons $f(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}) e^{-t} \cos nt$. Déterminer son ensemble de définition, puis étudier sa continuité. La fonction f est-elle intégrable sur $[0, +\infty[$? Exprimer $\int_0^{+\infty} f(t)\, dt$ à l'aide de la fonction ζ.

On définit, pour tout $n \geq 1$,

$$f_n \ : \ t \longmapsto \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right) e^{-t} \cos(nt)$$

et on note que les f_n sont continues. Si $M > 0$,

$$\|f_n\|_{\infty,[-M,M]} \leq e^M \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4} \right)$$

et il y a donc convergence uniforme, car normale, sur tout segment de la série $\sum_{n\geq 1} f_n$, ce qui entraîne la continuité de f.
Chaque f_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ (dominée par e^{-t}, ou négligeable devant $1/t^2$, avec croissances comparées si on choisit cette dernière manière, au

voisinage de $+\infty$).
Et
$$N_1(f_n) = \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\mathrm{d}t \leq \left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}$$
Donc $\sum N_1(f_n)$ converge. On en déduit, par théorème d'interversion, que f est intégrable sur $[0,+\infty[$, et que
$$\int_0^{+\infty} f = \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}\right)\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(nt)\mathrm{d}t\right]$$
On calcule classiquement
$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{1+n^2}$$
et finalement $\displaystyle\int_0^{+\infty} f = \zeta(4)$.

Exercice 69 (Oral Mines). Soit $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n}dt$. En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer
$$u_n = \frac{\ln 2}{n} + \frac{\pi^2}{12\ n^2} + \mathrm{o}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

3 Exercices divers

Exercice 70 (oral X). Soit h une fonction continue strictement positive sur $[0,1]$. Démontrer que
$$\int_0^1 \frac{1}{g(t)}\ dt\ \geq\ \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 g(t)\ dt}\ .$$

Cette question peut se résoudre en utilisant un argument de convexité. On rappelle aussi l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\int_0^1 fg \leq \sqrt{\int_0^1 f^2}\sqrt{\int_0^1 g^2}$$

En déduire que, si f et g sont deux fonctions continues strictement positives sur $[0,1]$ telles que $f(x)g(x) \geq 1$ pour tout réel x de $[0,1]$, alors

$$\Big(\int_0^1 f(t)\ dt\Big)\Big(\int_0^1 g(t)\ dt\Big) \geq 1\ .$$

Exercice 71. [Oral Mines, Centrale] Calculer, après avoir établi son existence, l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\ dt$$

D'abord, l'existence. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln(1-t^2)}{t^2}$ se prolonge par continuité à $[0,1[$ (elle a pour limite -1 en 0). Elle est négative sur $]0,1[$. De plus, sur $[0,1[$,

$$\ln(1-t^2) = \ln(1-t) + \ln(1+t)$$

Or, par croissances comparées,

$$\ln(1-t) \underset{t\to 1, t<1}{=} o\left((1-t)^{-1/2}\right)$$

ce qui, par référence à Riemann, donne l'existence de l'intégrale. On a bien entendu envie d'intégrer par parties, en dérivant $\ln(1-t^2)$ et en primitivant $1/t^2$. Ce faisant, on introduit un problème en 1. L'idée est donc, si $0 < a < 1$, de faire l'intégration par parties sur $]0,a]$, puis ensuite on fera tendre a vers 1. On pourrait aussi faire l'intégration par parties sur $[\epsilon, a]$, $\epsilon > 0$, mais ce n'est pas forcément nécessaire.

$$\begin{aligned}
\int_0^a \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt &= \left[-\frac{\ln(1-t^2)}{t}\right]_0^a - \int_0^a \frac{2}{1-t^2}\mathrm{d}t \\
&= -\frac{\ln(1-a^2)}{a} + [\ln(1-t) - \ln(1+t)]_0^a \\
&= -\frac{\ln(1-a^2)}{a} + \ln(1-a) - \ln(1+a)
\end{aligned}$$

On regroupe alors les termes en $\ln(1-a)$, qui individuellement posent problème quand $a \to 1$, mais qui devraient s'arranger les uns avec les autres parce que finalement on sait que la limite doit exister.

$$\int_0^a \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,dt = \left(1-\frac{1}{a}\right)\ln(1-a) - \left(1+\frac{1}{a}\right)\ln(1+a)$$

Par croissances comparées, $(a-1)\ln(1-a) \xrightarrow[a\to 1, a<1]{0}$, on trouve donc la valeur de l'intégrale : $-2\ln 2$.

Exercice 72. [Oral Mines] Calculer, après avoir montré son existence, l'intégrale suivante :

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(b-t)(t-a)}}dt$$

Même si l'énoncé ne le précise pas, on peut supposer $a < b$.

L'existence se fait avec des équivalents à Riemann, sans trop de problème. Il faudrait au moins, à l'oral, avoir l'idée de mettre $(b-t)(t-a)$ sous forme canonique

$$(b-t)(t-a) = -(t^2-(a+b)t+ab) = -\left(\left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 - \frac{(a+b)^2-4ab}{4}\right)$$

Ou encore

$$\begin{aligned}(b-t)(a-t) &= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 - \left(t-\frac{a+b}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \left(1-\frac{t-\dfrac{a+b}{2}}{\dfrac{b-a}{2}}\right)^2\end{aligned}$$

D'où l'idée de faire un changement de variable

$$u = \frac{t-\dfrac{a+b}{2}}{\dfrac{b-a}{2}}$$

c'est-à-dire, écrit dans le bon sens :

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u$$

L'autre idée, moins systématique, mais intéressante du point de vue de l'observation, part du fait qu'on sait (on doit savoir) calculer l'intégrale si $a=-1$ et $b=1$: très facilement, elle vaut π. On peut alors essayer un changement de variable affine qui transformerait le segment d'intégration $[a,b]$ en $[-1,1]$. Il faut être capable d'écrire un tel changement de variable ! On paramètre le segment $[a,b]$ non pas comme d'habitude (je pars de a et j'ajoute un petit morceau de segment : $t=a+u(b-a)$, mais là u varierait entre 0 et 1), mais d'une manière aussi très intéressante : je pars du milieu de $[a,b]$, et j'ajoute ou je retranche un petit peu du « rayon » (demi-diamètre) du segment ; bref, paramétrage

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}u$$

avec u qui varie entre -1 et 1. Bref, l'intégrale vaut $\pi(b-a)/2$.

Exercice 73 (Oral X). Calculer $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \frac{1}{1+x^4+x^8}$. *Cet exercice a parfois été posé avec un préliminaire sur les polynômes cyclotomiques : on pose* $\Phi_n =$

$\prod_{\omega}(X-\omega)$ *où* ω *décrit l'ensemble des racines primitives* n*-ièmes de l'unité.* *Montrer que* Φ_n *est à coefficients entiers. Calculer* Φ_n *pour* $n = 1, 2, 3, 4, 6, 12$*.*

Exercice 74 (**Oral Mines**)**.** Existence et calcul de

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \ln\Big(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \,\Big) \right) dx \ .$$

Exercice 75 (**Oral X**)**.** Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ intégrable. Montrer que g : $x \mapsto f\big(x - 1/x\big)$ est intégrable sur $\mathbf{R}_*^+$ et sur $\mathbf{R}_*^-$ et que $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g(x)\ dx\ + \int_0^{+\infty} g(x)\ dx\ =\ \int_{\mathbf{R}} f$.

Exercice 76. **[Oral ens]** Soit f, g deux applications de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}_*^+$ et, si $n \in \mathbf{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 fg^n$. Montrer que la suite $\big(I_n^{1/n}\big)$, puis la suite $\big(I_{n+1}/I_n\big)$, convergent vers $\max(g)$.

On commencera par une majoration simple (on dira évidemment que f et g sont strictement positives sur $[0,1]$, continues donc atteignant chacune un minimum et un maximum sur ce segment). On commence par une majoration simple :

$$\forall t \in [0,1] \qquad f(t)\ \ (g(t))^n \leq f(t)\,(\max(g))^n$$

d'où l'on tire

$$I_n^{1/n} \leq \max(g)\ \left(\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \right)^{1/n}$$

et le majorant tend vers $\max(g)$.

Bien sûr, minorer, c'est un peu moins naturel. Il va sans doute falloir sortir les epsilons. Soit $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et un segment J de longueur η inclus dans $[0, 1]$ tel que

$$\forall t \in J \qquad g(t) \geq \max(g) - \frac{\epsilon}{2}$$

(il n'est pas restrictif de supposer $\max(g) - \dfrac{\epsilon}{2} > 0$).
Ensuite, il y a un peu de technique. L'histoire des I_{n+1}/I_n est nettement plus dure. On peut commencer par dire que

$$I_{n+1} \leq \max(g) I_n$$

mais c'est dans l'autre sens que, tout au moins si g atteint son maximum en une infinité de points, la rédaction est compliquée. On s'en sort autrement, via l'inégalité de Cauchy-Schwarz, qui permet de dire que

$$I_{n+1}^2 \leq I_n I_{n+2}$$

et donc la suite de terme général I_{n+1}/I_n croît. Majorée par $\max(g)$, elle converge vers une limite $\ell > 0$. Donc la suite de terme général $\ln(I_{n+1} - \ln(I_n)$ converge vers $\ln(\ell)$. Par le théorème de Césaro (hors programme, mais la sommation des relations de comparaison nous permettra de l'obtenir facilement),

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} [\ln(I_{k+1} - \ln(I_k)] \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$

et le résultat sur $\left(I_n^{1/n}\right)$ permet alors de conclure.

Exercice 77. [Oral X] Soit f continue sur $[0, 1]$, à valeurs réelles. Déterminer la limite quand $n \to +\infty$ de la suite $\left(\dfrac{\displaystyle\int_0^1 t^n \; f(t) \; dt}{\displaystyle\int_0^1 t^n \; dt}\right)_{n \geq 0}$.

On pourrait croire à une étude qualitative dans le genre de l'exercice d'oral ens précédent, mais le changement de variable $u = t^n$, $t = u^{1/n}$ améliore bien la situation.

Exercice 78. [Oral X] Etudier l'application

$$f \ : \ x \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt} \ \frac{\cos t - e^{-t}}{t} dt \ .$$

On voit assez facilement que le domaine de définition est $]0, +\infty[$. On définit alors, sur $]0, +\infty[^2$,

$$h \ : \ (x, t) \mapsto e^{-xt} \frac{\cos t - e^{-t}}{t}$$

qui vérifie toutes les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$, avec domination sur tout segment :

$$\forall x \in [a, b] \quad \forall t > 0 \qquad \left| \frac{\partial h}{\partial x}(x, t) \right| \leq e^{-at} \left| \cos t - e^{-t} \right|$$

(on a supposé $a \leq b$). On calcule f', on en déduit f en utilisant le fait que la limite de f en $+\infty$ est nulle (tcvd).

Exercice 79. [Oral Centrale, X] Soit, pour $a \in \mathbf{R}$, $f(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \exp\big(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\big)\, dx$. Démontrer que f est de classe C^1 sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$; trouver une équation différentielle vérifiée par f sur cet ensemble, puis montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$. En déduire la valeur de f en tout point.

La définition de f en tout point peut se déduire par exemple de la majoration

$$\left|\exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)\right| \leq \exp(-x^2)$$

et la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est notoirement intégrable sur $[0, +\infty[$ donc sur $]0, +\infty[$ (il est superflu de revenir à la comparaison à l'exemple de Riemann). Notons que cette majoration est indépendante de a, c'est donc une « domination », ce qui devrait nous permettre de montrer la continuité assez facilement.

La parité de f permet de ne l'étudier que sur $\mathbf{R}_*^+$ pour montrer la classe C^1. On définit donc

$$h \ : \ (a, x) \mapsto \exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$ et on vérifie les hypothèses du théorème de dérivation sous le signe $\int$:

• On vient de voir que, pour tout $a > 0$, $h(a, .)$ est continue par morceaux (elle est même continue) sur $]0, +\infty[$, intégrable.

• h est dérivable par rapport à sa première variable sur $]0, +\infty[\times]0, +\infty[$, et

$$\forall (a, x) \in]0, +\infty[\times]0, +\infty[\qquad \frac{\partial h}{\partial a}(a, x) = -\frac{2a}{x^2} \exp\left(-x^2 - \frac{a^2}{x^2}\right)$$

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial a}(., x)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

Pour tout $a > 0$, $\dfrac{\partial h}{\partial a}(a, .)$ est continue sur $]0, +\infty[$ (continue par morceaux suffirait...). Montrons son intégrabilité sur $]0, +\infty[$:

$\left|\dfrac{\partial h}{\partial a}(a,x)\right| \leq \dfrac{2a}{x^2}$ montre, par comparaison à l'exemple de Riemann, l'intégrabilité sur $[1,+\infty[$.

Par croissances comparées,

$$-\frac{2a}{x^2}\exp\left(-\frac{a^2}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

et donc $\dfrac{\partial h}{\partial a}(a,.)$ se prolonge par continuité en 0 (par la valeur 0), ce qui assure son intégrabilité sur $]0,1]$.

• Si $0<\alpha<\beta$, on peut dominer :

$$\forall (a,x)\in[\alpha,\beta]\times]0,+\infty[\qquad \left|\frac{\partial h}{\partial a}(a,x)\right| \leq \frac{2\beta}{x^2}\exp\left(-x^2-\frac{\alpha^2}{x^2}\right)$$

et la fonction majorante est (même démonstration que ci-dessus) intégrable sur $]0,+\infty[$.

Par théorème de « dérivation sous le signe inf », f est de classe C^1 sur $]0,+\infty[$, et

$$\forall a>0 \qquad f'(a) = -2a\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\exp\left(-x^2-\frac{a^2}{x^2}\right)dx$$

On peut avoir l'idée d'un changement de variable $x=1/u$, qui nous donne

$$\forall a>0 \qquad f'(a) = -2a\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{u^2}-a^2u^2\right)du$$

puis le changement de variable $u=v/a$ nous rapproche du résultat :

$$\forall a>0 \qquad f'(a) = -2\int_0^{+\infty}\exp\left(-\frac{a^2}{v^2}-v^2\right)dv$$

et donc f vérifie sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$y' = -2y$$

ce qui nous permet d'affirmer l'existence d'une constante C telle que

$$\forall a>0 \quad f(a) = Ce^{-2a}$$

La continuité de f sur $\mathbf{R}$ ne pose guère de problème si on se souvient de la majoration du début (qui était en fait une domination), on en déduit que $C = f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. D'où, pour tout a réel et par parité,

$$f(a) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2|a|}$$

(on pourrait tracer le graphe de f, il y a deux demi-tangentes en 0 mais f n'est pas dérivable en 0).

Exercice 80. *Demande d'avoir vu l'extension du théorème de continuité sous le signe $\int$ aux fonctions de deux variables.*

D éterminer le domaine de définition Ω de l'application

$$(\alpha, \beta) \mapsto \int_0^1 (-\ln t)^\alpha (1-t)^\beta \, \mathrm{d}\, t$$

puis étudier sa continuité.

Exercice 81. Soit f de classe C^1 sur un segment $[a, b]$ de $\mathbf{R}$ telle que $f(a) = 0$. Démontrer que

$$\int_a^b |ff'| \leq \frac{b-a}{2} \int_a^b (f')^2 \, .$$

Exercice 82. Soit $f \in C^0([0,+\infty[,\mathbf{R})$ et $F\ :\ x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que si f^2 est intégrable sur $[0,+\infty[$, F^2 l'est, et

$$\int_0^{+\infty} F^2 \ \leq\ 4\int_0^{+\infty} f^2$$

Cette inégalité, apparemment trouvée par Hardy, est un grand classique de l'oral. Assez purement technique, pas évidente, ce n'est pas pour autant un excellent exercice d'oral.

Commençons par remarquer que F se prolonge par continuité en 0 : si g est une primitive de f sur $[0,+\infty[$, alors

$$F(x) = \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} g'(0) = f(0)$$

ce qui fait qu'il n'y a pas de problème en 0. Cela dit, F n'est pas a priori dérivable en 0, on fait donc une intégration par parties sur $[a,b]$, $0<a<b$:

$$\begin{aligned}\int_a^b F^2 &= \left[-\frac{1}{x}(\int_0^x f)^2\right]_a^b + 2\int_a^b \frac{1}{x}f(x)(\int_0^x f(t)dt)dx\\ &= \left[-xF^2(x)\right]_a^b + 2\int_a^b fF\end{aligned}$$

On fait tendre a vers 0, on utilise la positivité de $bF^2(b)$ et on obtient

$$\int_0^b F^2 \leq 2\int_0^b fF \leq 2\sqrt{\int_0^b f^2}\sqrt{\int_0^b F^2}$$

(inégalité de Cauchy-Schwarz). Si F est nulle, f l'est et rien n'est à démontrer. Sinon, au moins pour b assez grand, on peut diviser pour obtenir

$$\sqrt{\int_0^b F^2} \leq 2\int_0^b f^2$$

ce qui permet de conclure en même temps à l'intégrabilité et à l'inégalité de Hardy.
