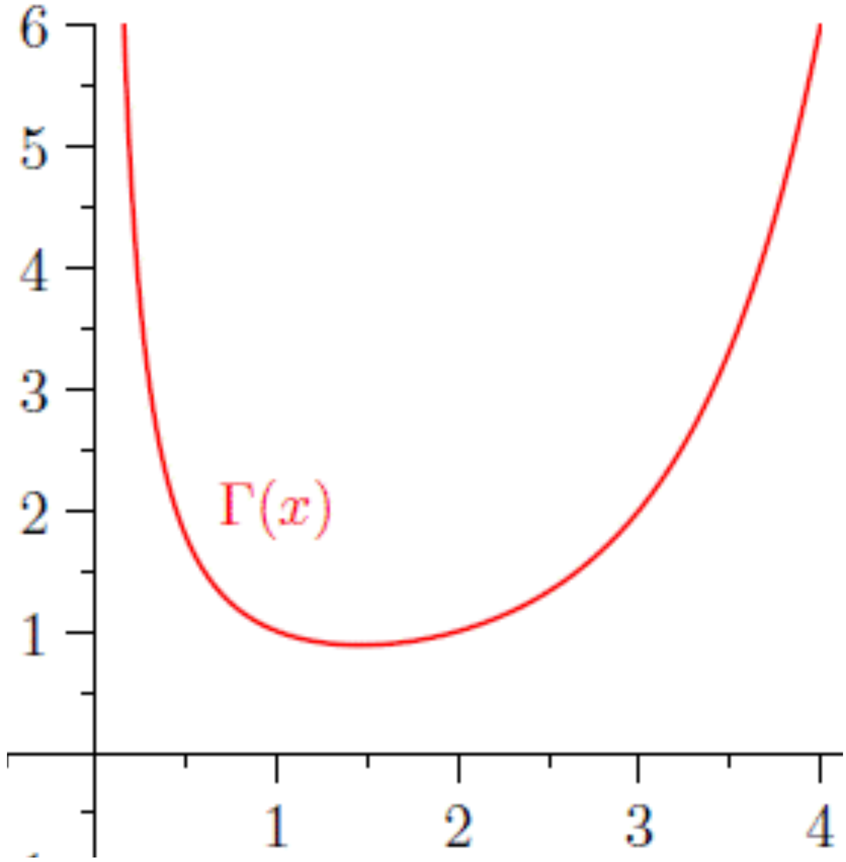
C8 : Intégrales à paramètres



Graphe de la fonction $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$

Jusqu'à présent, les fonctions avec lesquelles on travaillait étaient fabriquées à partir d'un petit nombre de fonctions (puissances, exponentielle, sinus, cosinus, etc...) par des opérations algébriques (combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque) ou analytiques (dérivation, primitivation). Ces fonctions sont dites « usuelles ».
L'étude de problèmes issus de la Physique impose rapidement l'utilisation de fonctions qui ne sont pas des fonctions usuelles. Elles sont souvent définies comme sommes de séries entières (voir le chapitre correspondant) ou comme intégrales dépendant d'un paramètre (voir l'exemple de la fonction Γ page précédente). Les fonctions de Bessel, les fonctions Beta, la fonction Gamma sont de telles fonctions, et appartiennent à la vaste famille des « fonctions spéciales ».

Le but de ce chapitre est de donner les moyens d'étudier et de manipuler des fonctions définies par des intégrales. Les résultats sont assez techniques, mais si on apprend bien à utiliser le premier (théorème de convergence dominée), on aura compris l'essentiel, car la vérification d'une hypothèse de domination est le point crucial du chapitre.
Depuis l'introduction des probabilités dans le programme, ce chapitre est assez sollicité aux écrits des concours.

Dans le cadre du programme, toutes les fonctions dont il est question dans ce chapitre sont à valeurs réelles ou complexes.

I Interversion de limites et d'intégrales

...ou « passage à la limite sous l'intégrale »

I.1 Le théorème de convergence dominée

Théorème Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

On suppose :

(i) que la suite (f_n) converge simplement sur I vers une fonction f continue par morceaux,

(ii) qu'il existe une fonction ϕ continue par morceaux intégrable sur I telle que

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \forall t \in I \quad |f_n(t)| \leq \phi(t)$$

(*Hypothèse de domination.*)

Alors les f_n et f sont intégrables sur I, et

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$$

Quelques précisions :

« continues par morceaux » (pour les f_n) est une hypothèse rendue nécessaire par le fait que nous ne savons pas intégrer autre chose.

« à valeurs réelles ou complexes » est aussi une hypothèse rendue nécessaire par le fait que lorsqu'on parle d'intégrales ailleurs que sur un segment, on se limite aux fonctions à valeurs complexes.

« continue par morceaux » (pour ϕ) : déjà, la convergence uniforme ne transmet pas la continuité par morceaux (elle transmet la continuité), et ici on n'impose que la convergence simple, ce qui ne transmet vraiment rien du tout.

Le programme précise que si on ne vérifie que la convergence simple et la domination, on mérite le maximum des points.

I.2 Exemples

a. Intégrales de Wallis

Démontrer que la suite de terme général

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,dt$$

converge, donner sa limite.

b. Un problème pas très différent...

Démontrer que la suite de terme général

$$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$$

converge, donner sa limite.

c. Un classique plus difficile

Démontrer que, si $x > 0$, la suite de terme général

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{x-1}\,dt$$

converge vers $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$.
On suggère d'introduire la fonction $\mathbf{1}_{[0,n]}$ *caractéristique du segment* $[0, n]$.

d. Une indication technique

On rencontre beaucoup de suites monotones de fonctions (à ne pas confondre avec une suite de fonctions monotones : une suite croissante de fonctions, c'est

une suite (f_n) telle que, pour tout n, $f_n \leq f_{n+1}$, autrement dit pour tout n et pour tout x, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$).
Si on ne sait pas par quoi dominer la famille f_n, on pourra donc essayer de dominer soit par la valeur absolue de la limite simple de la suite (f_n), soit par $|f_0|$ (ou $|f_1|\ldots$).

e. Cas d'un intervalle borné

...on se contente de chercher en général à dominer par une constante : toute fonction constante est intégrable sur un intervalle borné.

I.3 Utilité de l'hypothèse de domination

Définissons, sur $[0,1]$, f_n continue affine par morceaux nulle en 0 et sur $[\frac{1}{n+1}, 1]$, et prenant en $\frac{1}{2(n+1)}$ la valeur $n+1$. La suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, mais la suite $\left(\int_{[0,1]} f_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ ne converge pas vers 0.

I.4 A propos de la convergence uniforme

Il y a un autre théorème d'interversion de limite et d'intégrale :

Théorème Si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur le **segment** I converge uniformément sur I vers une fonction f continue par morceaux, alors

$$\int_I f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f$$

(On remarque que la continuité par morceaux, contrairement à la continuité, ne se transmet pas par convergence uniforme).

Ce théorème s'applique moins souvent que le théorème de convergence dominée. La convergence uniforme n'est pas nécessaire pour appliquer le théorème de convergence dominée,ce qui est bien commode. D'ailleurs, sur un intervalle non borné, la convergence uniforme n'est ni nécessaire ni suffisante pour avoir convergence d'une suite d'intégrales (prendre par exemple les fonctions f_n définies sur $[0,+\infty[$ par : $f_n(t) = \dfrac{1}{n}$ sur $[n, 2n]$, $f_n(t) = 0$ ailleurs).

I.5 Un découpage d'intégrale

Démontrons la convergence vers 0 de la suite des intégrales de Wallis sans utiliser le théorème de convergence dominée : on considère

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$$

On remarque d'abord que l'on est sur un segment, mais qu'il n'y a pas convergence uniforme de la suite $\left(t \to \sin^n t\right)$.
En traçant le graphe de la fonction $t \mapsto \sin^n t$, on voit qu'elle concentre son intégrale au voisinage de $\pi/2$, ce qui motive le découpage suivant :
Soit $\epsilon > 0$. On a, pour tout n,

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2-\epsilon/2} \sin^n t \, dt \; + \int_{\pi/2-\epsilon/2}^{\pi/2} \sin^n t \, dt \\ &\leq (\pi/2-\epsilon/2)\big(\sin(\pi/2-\epsilon/2)\big)^n + \epsilon/2 \end{aligned}$$

Mais $\left|\sin(\pi/2-\epsilon/2)\right| \leq 1$, donc il existe un rang N tel que

$$n \geq N \;\Rightarrow\; (\pi/2-\epsilon/2)\left|\sin(\pi/2-\epsilon/2)\right|^n \leq \epsilon/2$$

Alors $n \geq N \;\Rightarrow\; 0 \leq I_n \leq \epsilon$. On conclut donc.

I.6 Extension du théorème

En utilisant le théorème de convergence dominée et la caractérisation des limites par les suites, on obtient :

Théorème Soit $\Lambda \subset \mathbf{R}$ (au programme, Λ est un intervalle, mais cela importe peu), et soit $\lambda_0 \in \overline{\Lambda}$ (éventuellement $\lambda_0 = \pm\infty$).

Soit $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I, à valeurs réelles ou complexes.

On suppose :

(i) $\forall x \in I \quad f_\lambda(x) \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} f(x)$ où f est une fonction continue par morceaux sur I,

(ii) il existe une fonction ϕ continue par morceaux intégrable sur I telle que

$$\forall \lambda \in \Lambda \; \forall x \in I \quad |f_\lambda(x)| \leq \phi(x)$$

(*Hypothèse de domination.*)

Alors les f_λ et f sont intégrables sur I, et

$$\int_I f_\lambda \xrightarrow[\lambda\to\lambda_0]{} \int_I f$$

Remarque Ce théorème n'est jamais indispensable. On peut le remplacer par le théorème de convergence dominée suivi de la caractérisation des limites par les suites. L'extension présentée ici permet seulement de raccourcir la rédaction.

I.7 Exemples d'utilisation

a. Calcul de limite d'une transformée de Laplace

Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ a une limite quand $x \to +\infty$; la calculer.

b. Théorèmes de la valeur initiale, de la valeur finale

Soit f une fonction continue sur $[0,+\infty[$, ayant une limite (finie) en $+\infty$. On sait alors qu'elle est bornée. On définit, si $s > 0$,

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $sF(s)$ a des limites en 0 et en $+\infty$, les calculer.

I.8 Interversion de séries et d'intégrales

a. Fonctions réelles positives

Théorème Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, **à valeurs réelles positives**, intégrables. On suppose :

(i) La série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et

(ii) La somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I.

Alors, dans $[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$ (alias $[0,+\infty]$),

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

Corollaire Sous les hypothèses précédentes, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I si et seulement si $\sum \int_I f_n$ converge, i.e. si et seulement si

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n < +\infty$$

b. Fonctions réelles ou complexes

Théorème Soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de fonctions continues par morceaux sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose :

(i) La série $\sum f_n$ converge simplement sur I, et que sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue par morceaux sur I,

(ii) Chaque f_n est intégrable sur I,

(iii) La série $\sum \int_I |f_n|$ converge.

Alors $\sum \int_I f_n$ converge, $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I, et $\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

On note en général $N_1(f_n) = \int_I |f_n|$. L'hypothèse cruciale **(iii)** s'écrit alors : $\sum N_1(f_n)$ converge.

Le programme stipule que l'on ne doit pas être sanctionné pour l'oubli des hypothèses de continuité par morceaux.

Méthodes d'interversion série/intégrale

On se retrouve assez fréquemment (presque sûrement au moins une fois dans une session d'écrits) devant le problème suivant :
Montrer que $\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right)$ où a et b peuvent être réels ou $\pm\infty$. Pour cela, par ordre décroissant de fréquence, on dispose de 3 méthodes princpales.

Méthode 1 Les théorèmes qui viennent d'être vus.
Exemple : montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

Méthode 2 Si $[a, b]$ est un segment sur lequel les f_n sont continues, on peut regarder si $\sum f_n$ converge uniformément. Le plus agréable serait qu'elle converge normalement. Si elle converge normalement, comme

$$N_1(f_n) \leq |b - a| N_\infty(f_n)$$

on pourra aussi appliquer le théorème ci-dessus, mais il est un peu plus long à rédiger car il y a plus d'hypothèses à vérifier.
Exemple : on suppose que (a_n) est une suite de nombres complexes telle que $\sum |a_n|$ converge. On définit, sur $\mathbf{R}$,

$$f \ : \ t \mapsto \sum_{p=1}^{+\infty} a_p \sin(pt)$$

Montrer que, pour tout $m \in \mathbf{N}_*$,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(mt) f(t) \mathrm{d}t = a_m$$

Méthode 3 Aucun des deux théorèmes précédents ne s'applique. Posant alors $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$, on écrit, pour tout $n \geq 0$,

$$S = \sum_{k=0}^{n} f_k \; + \; R_n$$

avec des notations habituelles : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k$. Si on montre, par exemple avec l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_a^b R_n(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et on conclut…Cette situation se rencontre raisonnablement souvent à l'oral.

Exemple : montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$$

II Continuité des fonctions définies par des intégrales

II.1 Théorème de continuité

Théorème Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $X \times I$, où $X \subset \mathbf{R}$. On suppose :

1. f continue par rapport à la première variable : pour tout $t \in I$, la fonction $f(.,t) : x \mapsto f(x,t)$ est continue sur X.
2. f continue par morceaux par rapport à la deuxième variable : pour tout $x \in X$, $f(x,.) : t \mapsto f(x,t)$ continue par morceaux sur I.
3. Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que

$$\forall x \in X \quad \forall t \in I \qquad |f(x,t)| \leq \phi(t)$$

(hypothèse de domination).

Alors $g : x \to \int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur X.

L'oubli de l'hypothèse 2. ne doit pas être sanctionné : la continuité par morceaux n'est qu'une limitation de notre cadre théorique pour l'intégration.

Corollaire *On recopie le résultat précédent dans son contexte d'application le plus fréquent.*

Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie sur $A \times I$, où A est un intervalle de $\mathbf{R}$, et I aussi. On suppose :

1. f continue par rapport à sa première variable (notée ici x).
2. f continue par morceaux par rapport à sa deuxième variable (notée ici t).
3. Pour tout segment K inclus dans A, il existe une fonction ϕ_K continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que

$$\forall x \in K \quad \forall t \in I \qquad |f(x,t)| \leq \phi_K(t)$$

(hypothèse de domination sur tout segment).

Alors $g: x \to \int_I f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur A.

C'est x qu'on a le droit d'enfermer dans un segment, pas t...

II.2 Démonstration

Il suffit d'utiliser la caractérisation de la continuité par les suites et le théorème de convergence dominée.

II.3 Quelques exemples

a. Transformée de Fourier

Soit f une fonction intégrable sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Montrer que la fonction

$$\widehat{f}: x \to \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixt} f(t)\,dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}$.

b. Transformée de Laplace

Soit f une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Montrer que la fonction

$$\mathscr{L}(f): x \to \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)\,dt$$

est bien définie et continue sur $\mathbf{R}^+$.

c. Fonction Γ

Montrer que la fonction

$$\Gamma: x \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

est définie et continue sur $\mathbf{R}_*^+$.

III Classe C^1 (dérivation sous le signe $\int$)

III.1 Théorèmes

Théorème Soit A et I deux intervalles de $\mathbf{R}$, et $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction définie sur $A \times I$, à valeurs dans $\mathbf{K}$=$\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ telle que :

1. Pour tout $x \in A$, $f(x,.) : t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I,
2. Pour tout $t \in I$, $f(.,t) : x \mapsto f(x,t)$ est de classe C^1 sur A,
3. pour tout $x \in A$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,.) : t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I
4. Il existe une fonction ϕ continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que
$$\forall x \in A \quad \forall t \in I \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi(t)$$
ou : Pour tout segment K inclus dans A, il existe une fonction ϕ_K continue par morceaux, positive et intégrable sur I, telle que
$$\forall x \in K \quad \forall t \in I \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \phi_K(t)$$

alors l'application $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est de classe C^1 sur A, et sa dérivée est $g' : x \mapsto \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.

Rappel L'hypothèse 2. signifie que, pour tout $t \in I$, l'application $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur A, sa dérivée étant alors notée $\frac{\partial f}{\partial x}$, et que pour tout $t \in I$ l'application $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur A.

Remarque L'hypothèse 1 (qui est simplement la définition de g) est assez régulièrement oubliée. Or elle n'est pas facultative.

Remarque On domine $\frac{\partial f}{\partial x}$, mais pas f. C'est important, car dans plusieurs cas rencontrés dans les énoncés la domination de f est beaucoup plus technique que celle de $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Théorème (Classe C^k) On note k un entier naturel non nul. Si A et I sont deux intervalles,

si $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ est une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

1. f est k fois dérivable par rapport à sa première variable sur $A \times I$
2. Pour tout j tel que $0 \le j \le k-1$, pour tout $x \in A$,
$\dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,.) \; : \; t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$
est continue par morceaux et intégrable sur I,
3. $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ vérifie les hypothèses du théorème de continuité (avec hypothèse de domination ou de domination sur tout segment),

alors l'application $g \; : \; x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\, dt$ est de classe C^k sur A, et ses dérivées successives sont $g^{(j)} \; : \; x \mapsto \displaystyle\int_I \frac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)\, dt \quad (1 \le j \le k)$

III.2 Exemples

On remarque que, lorsqu'il s'agit de dériver sous le signe $\int$, il n'est pas nécessaire de dominer f, on ne domine que ses dérivées partielles. Il est donc très important de ne pas perdre du temps à chercher des hypothèses de domination qui ne sont pas nécessaires.

a. Une transformée de Fourier

Calculer, si elle existe,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\frac{\sin(xt)}{t}\,dt$$

b. La fonction Γ

Montrer que la fonction

$$\Gamma : x \to \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\,dt$$

est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Etudier ses variations.

c. Calcul d'une intégrale célèbre à l'aide d'une transformée de Laplace

1. Calculer, si $x > 0$,
$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin t}{t} dt$$

2. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ converge. On définit $F(0) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$.

3. Montrer que F est continue en 0. On pourra utiliser la fonction $g\colon x \to \int_0^{x} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$ et se souvenir des considérations menant aux théorèmes de la valeur initiale et de la valeur finale.

4. Déduite de ce qui précède la valeur de
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$$

IV Annexe 1 : une démonstration restreinte du théorème de convergence dominée

L'intégrabilité des f_n ne pose pas de problème. De plus, pour tout $t \in I$, en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans l'inégalité large

$$|f_n(t)| \leq \phi(t)$$

on obtient $|f(t)| \leq \phi(t)$, d'où l'intégrabilité de f.
Pour la démonstration, on rajoute une **hypothèse additionnelle** : on suppose que la suite (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I. Cette hypothèse est vérifiée dans quasiment tous les cas d'utilisation du tcvd que l'on rencontre dans les exercices.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe un segment J inclus dans I tel que

$$\int_I \phi - \int_J \phi \leq \frac{\epsilon}{4}$$

On noter abusivement, si g est une fonction intégrable sur I,

$$\int_{I \setminus J} g = \int_I g - \int_J g$$

(« abusivement » car c'est en général une somme d'intégrales sur deux intervalles, pas une intégrale sur un intervalle). Alors, pour tout n,

$$\begin{aligned}
|\int_I f - \int_I f_n| &\leq \int_I |f_n - f| \\
&= \int_J |f_n - f| + \int_{I \setminus J} |f_n - f| \\
&\leq \int_J |f_n - f| + 2\int_{I \setminus J} |\phi| \\
&\leq \int_J |f_n - f| + \frac{\epsilon}{2}
\end{aligned}$$

et, comme (f_n) est supposée converger uniformément f sur J, à partir d'un certain rang on a $\int_J |f_n - f| \leq \frac{\epsilon}{2}$, et à partir d'un tel rang on aura $\left|\int_I f - \int_I f_n\right| \leq \epsilon$.
D'où le résultat.

IV.1 Annexe 2 : Démonstration du théorème de dérivation

On note ψ une fonction dominant les $\dfrac{\partial f}{\partial x}$:

$$\forall x \in A\ \forall t \in I \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \psi(t)$$

et ψ intégrable sur I.

Soit $x_0 \in A$, notons $\delta(h) = \left|g(x_0+h) - g(x) - h\displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\ dt\right|$. Alors $\delta(h) = \left|\displaystyle\int_I \Big(f(x_0+h,t) - f(x_0,t) - h\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\Big)\ dt\right|$.

Or $f(x_0+h,t) - f(x_0,t) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial f}{\partial x}(y,t)\ dy$ (on peut aussi bien écrire $f(x_0+h,t) - f(x_0,t) = \displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\ dx$, mais il y a plus de confusion dans les notations). Donc :

$\delta(h) \leq \displaystyle\int_I \left|\int_{x_0}^{x_0+h} \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(y,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\Big)\ dy\right|\ dt.$

Soit alors (h_n) une suite convergeant vers 0, on peut écrire $\dfrac{\delta(h_n)}{|h_n|} \leq \displaystyle\int_I a_n(t)\ dt$ avec $a_n(t) = \dfrac{1}{|h_n|}\displaystyle\int_{x_0}^{x_0+h_n} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(y,t) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,t)\right|\ dy$. On a $|a_n(t)| \leq 2\psi(t)$ (majoration simple) et, pour tout t, $(a_n(t))_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0 (continuité de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$). On applique alors le théorème de convergence dominée, qui permet de conclure que $\dfrac{\delta(h_n)}{|h_n|}$ converge vers 0. La caractérisation des limites par les suites, puis la définition de la dérivée permettent de conclure.

Table des matières