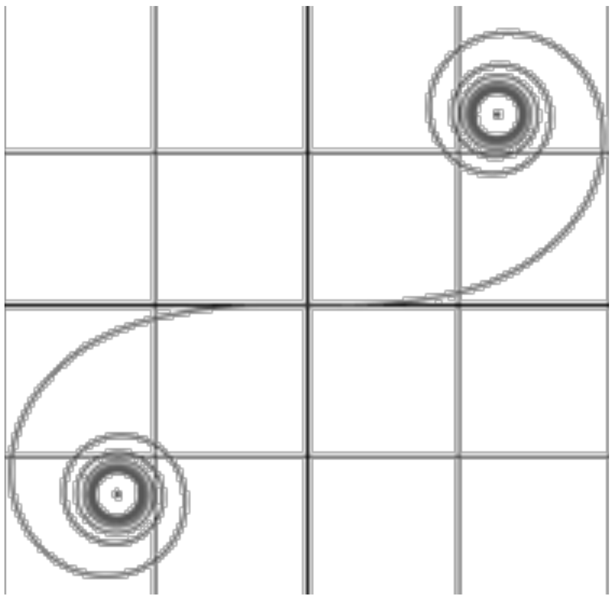
C7 : Intégration sur un intervalle quelconque



La spirale de Cornu, ou d'Euler, ou de Fresnel. Jacques Bernoulli l'a étudiée (le premier), Césaro l'a nommée clothoïde. Le paramétrage en est

$$t \longmapsto \int_0^t e^{iu^2}\,du$$

L'existence de « points limites » est liée à la convergence de l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iu^2}\,du$.

Les fonctions dont il est question dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de **R**, à valeurs dans **R** ou **C**. Il ne serait pas difficile d'étendre beaucoup de définitions et résultats aux fonctions à valeurs dans un evn de dimension finie.

I Intégrale d'une fonction sur $[a,+\infty[$

Soit $a \in \mathbf{R}$. On considère une fonction f définie sur $[a,+\infty[$, continue par morceaux, à valeurs dans **R** ou **C**. On peut alors définir sur $[a,+\infty[$ la fonction

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\, dt$$

qui est continue sur $[a,+\infty[$.

Insistons bien : il n'y a pas de problème en la borne gauche de l'intervalle, qui est fermé en a.

I.1 Intégrale généralisée

Définition On dit que l'intégrale « généralisée » $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est « convergente » lorsque F a une limite finie en $+\infty$. Cette limite est notée $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ ou $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$.

Autrement dit,

$$\int_a^{+\infty} f(t)\, dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right)$$

lorsque cette limite existe.

Exemple

Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} dt$

I.2 Intégrabilité

Définition On dit que f est « intégrable » sur $[a, +\infty[$ lorsque l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente. On dit aussi que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est absolument convergente.

I.3 Lien entre intégrabilité et existence d'une intégrale généralisée

Proposition Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. Autrement dit, si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est absolument convergente, elle est convergente. Et on a dans ce cas :

$$\left|\int_a^{+\infty} f\right| \leq \int_a^{+\infty} |f|$$

Démonstration : Supposons d'abord f à valeurs réelles ; définissons, sur $[a, +\infty[$, les fonctions f^+ et f^- par :

La réciproque est fausse!
Il existe des fonctions f non intégrables sur $[a,+\infty[$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.
On parle parfois d'intégrale semi-convergente, voire même d'intégrale impropre semi-convergente.

Un exemple très classique et très important :
Etudions l'intégrabilité de la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ sur $[\pi,+\infty[$, et la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.
A bien comprendre, on retrouvera la méthode (intégration par parties) assez souvent, parfois précédée d'un changement de variable.

I.4 Etude de l'intégrabilité et de l'existence d'une intégrale généralisée

Remarquons préalablement que, si f est à valeurs réelles positives, f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge : dans ce cas, la convergence et l'absolue convergence, c'est la même chose.

Remarquons aussi que la divergence grossière des séries n'a pas son équivalent pour les intégrales : une fonction peut être intégrable sur $[a,+\infty[$ sans avoir une limite nulle en $+\infty$ (en revanche, bien sûr, si f a une limite non nulle en $+\infty$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge).

Remarquons enfin que, si $b > a$, si f est continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, la convergence de $\int_a^{+\infty} f$ équivaut à celle de $\int_b^{+\infty} f$. Et l'intégrabilité de f sur $[a,+\infty[$ équivaut à l'intégrabilité de f sur $[b,+\infty[$: peut importe le « point de départ ».

a. Un exemple de référence : les intégrales de Riemann

Proposition

Soit $c > 0$. La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est intégrable sur $[c,+\infty[$ si et seulement si $\alpha < -1$;
ou encore, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ est intégrable sur $[c,+\infty[$ ($c > 0$) si et seulement si $\beta > 1$

Proposition bis

Soit $a > 0$. L'intégrale $\int_a^{+\infty} t^\alpha \, dt$ converge si et seulement si $\alpha < -1$;
ou encore, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \dfrac{dt}{t^\beta}$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

b. Un autre exemple de référence

Nouveau au programme, et bienvenu, car cela évite dans certains cas un retour un peu fastidieux à la comparaison à Riemann.

Proposition Soit $a \in \mathbf{R}$. La fonction $t \longmapsto e^{-bt}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $b > 0$.

Enoncé équivalent Soit $a \in \mathbf{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} e^{-bt}\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $b > 0$.

c. Un lemme pour les fonctions positives

Proposition Soit f continue par morceaux sur $[a, +\infty[$, à valeurs réelles positives. Alors f est intégrable sur sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $F\ :\ x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$. Et lorsque c'est le cas, on a $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = \sup_{[a,+\infty[} (F)$.

En cas de divergence de l'intégrale de f, et seulement si $f \geq 0$, on s'autorise la notation

$$\int_a^{+\infty} f = +\infty$$

d. Etude de l'intégrabilité par comparaison à une fonction intégrable

Proposition Soit f, ϕ continues par morceaux sur $[a, +\infty[$; on suppose $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O\big(\phi(x)\big)$. Alors, si ϕ est intégrable sur $[a, +\infty[$, f l'est.

Cas particulier Soit f, ϕ continues par morceaux sur $[a, +\infty[$; on suppose $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} \mathrm{o}\big(\phi(x)\big)$. Alors, si ϕ est intégrable sur $[a, +\infty[$, f l'est.

Une application courante Si f est continue sur $[a, +\infty[$, si $t^2 f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, alors f est intégrable sur $[a, +\infty[$.

C'est par exemple un moyen commode pour justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Autre déclinaison Soit f, ϕ continues par morceaux sur $[a, +\infty[$, ϕ ; on suppose $0 \leq |f| \leq \phi$ au voisinage de $+\infty$. Alors, si ϕ est intégrable sur $[a, +\infty[$, f l'est.

Mais la symétrie de la relation $\sim$ permet de dire plus :

Proposition Soient f, ϕ continues par morceaux sur $[a, +\infty[$.
Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \phi(x)$, alors
$\Big(\phi \text{ intégrable sur } [a, +\infty[\Big) \Longleftrightarrow \Big(f \text{ intégrable sur } [a, +\infty[\Big)$

On sera donc amené, pour des études d'intégrabilité, à utiliser des équivalents, des croissances comparées...les techniques utilisées étant similaires à celles utilisées pour étudier la convergence des séries à termes réels positifs, ou l'absolue convergence des séries.
Remarque : on notera que tous les résultats de comparaison qui viennent d'être vus concernent l'intégrabilité, c'est-à-dire l'**absolue convergence** des intégrales étudiées. Comment fait-on donc si on cherche à montrer qu'une intégrale est « semi-convergente » ? on utilisera généralement des intégrations par parties, l'exemple typique étant $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$.

II Intégrale sur $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$

II.1 Intégrale sur $[a, b[$, a et b réels

On suppose a, b réels, $a < b$. On peut alors réécrire le **I.** en remplaçant $+\infty$ par b, la principale différence (à bien noter !) concernant les intégrales de Riemann :

Proposition (« Riemann en un point fini »)
La fonction $t \mapsto (b-t)^\alpha$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\alpha > -1$; ou encore, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\beta}$ est intégrable sur $[a, b[$ si et seulement si $\beta < 1$

Proposition bis

L'intégrale $\int_a^b (b-t)^\alpha \, dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$; ou encore, l'intégrale $\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

II.2 Intégrale sur $]a, b]$

Soit $a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R}$, $a < b$.
On considère une fonction f définie sur $]a, b]$, continue par morceaux, à valeurs dans **R** ou **C**.
On peut définir sur $]a, b]$ la fonction

$$F : x \longmapsto \int_x^b f(t) \, dt$$

qui est continue sur $]a, b]$.

a. Intégrale généralisée, intégrabilité

Définition On dit que l'intégrale « généralisée » $\int_a^b f$ est « convergente » lorsque F a une limite finie en a. Cette limite est notée $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(t) \, dt$.

Autrement dit,

$$\int_a^b f(t) \, dt = \lim_{x \to a} \left(\int_x^b f(t) \, dt \right)$$

lorsque cette limite existe.

Définition On dit que f est « intégrable » sur $]a, b]$ lorsque l'intégrale $\int_a^b |f|$ est convergente. On dit aussi que l'intégrale $\int_a^b |f|$ est absolument convergente.

Proposition Si f est intégrable sur $]a, b]$, l'intégrale $\int_a^b f$ converge, et $\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$. La réciproque est fausse : il y a des intégrales convergentes non absolument convergentes, dites semi-convergentes.

En revanche, si f est à valeurs réelles positives, f est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si l'intégrale $\int_a^b f$ converge.

b. Intégrales de Riemann

Le résultat sur les intégrales de Riemann ressemble en $-\infty$ à celui en $+\infty$, à une différence notable près : t^α n'est pas défini sur $\mathbf{R}_*^-$ pour n'importe quel réel α. Voilà pourquoi on suppose ci-dessous les exposants entiers :

Proposition Soit $b<0$. La fonction $t \mapsto t^\alpha$ ($\alpha \in \mathbf{Z}$) est intégrable sur $]-\infty,b]$ si et seulement si $\alpha < -1$; ou encore, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ ($\beta \in \mathbf{Z}$) est intégrable sur $]-\infty,b]$ ($b<0$) si et seulement si $\beta > 1$

Proposition Soit $b<0$. L'intégrale $\int_{-\infty}^b t^\alpha\ dt$ ($\alpha \in \mathbf{Z}$) converge si et seulement si $\alpha < -1$; ou encore, l'intégrale $\int_{-\infty}^b \dfrac{dt}{t^\beta}$ ($\beta \in \mathbf{Z}$) converge si et seulement si $\beta > 1$.

En revanche, les intégrales de Riemann en un point réel, c'est toujours la même chose : on suppose dans les deux propositions suivantes que $a<b$, a et b **réels**.

Proposition La fonction $t \mapsto (t-a)^\alpha$ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $\alpha > -1$; ou encore, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\beta}$ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si $\beta < 1$

Proposition bis L'intégrale $\int_a^b (t-a)^\alpha\ dt$ converge si et seulement si $\alpha > -1$; ou encore, l'intégrale $\int_a^b \dfrac{dt}{(t-a)^\beta}$ converge si et seulement si $\beta < 1$.

D'une manière générale, pour les intégrales de Riemann, si on se souvient de la convergence (absolue, d'ailleurs) de $\int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{t}}$ et de $\int_1^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$, on risque peu de se tromper.

c. Un lemme pour les fonctions positives

Proposition Soit f continue par morceaux sur $]a,b]$, à valeurs réelles positives. Alors f est intégrable sur sur $]a,b]$ si et seulement si $F : x \mapsto \int_x^b f(t)\, dt$ est majorée sur $]a,b]$

d. Etude de l'intégrabilité par comparaison

Proposition Soit f, ϕ continues par morceaux sur $]a,b]$; on suppose $f(x) = \underset{x \to a}{O}\big(\phi(x)\big)$. Alors, si ϕ est intégrable sur $]a,b]$, f l'est.

Cas particuliers Soit f, ϕ continues par morceaux, ϕ; si $f(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\big(\phi(x)\big)$, ou si $0 \leq |f(x)| \leq \phi(x)$ au voisinage de a, et si ϕ est intégrable sur $]a,b]$, f l'est.

Proposition Soient f, ϕ continues par morceaux sur $]a,b]$. Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} \phi(x)$, alors ϕ est intégrable sur $]a,b]$ si et seulement si f l'est.

II.3 Intégrale sur $]a,b[$

Définition Soit f continue par morceaux sur $]a,b[$ ($a \in \mathbf{R} \cup \{-\infty\}$, $b \in \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$, $a < b$). Soit $c \in]a,b[$ (c réel, nécessairement). On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ converge lorsque les deux intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. Et on définit alors

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

(on vérifie bien sûr que cette définition ne dépend pas de c).

On dit que f est intégrable sur $]a,b[$, ou que $\int_a^b f$ est absolument convergente, lorsque $\int_a^b |f|$ converge. Toute intégrale absolument convergente est convergente.

III Etude et rédaction de l'existence d'une intégrale

On considère le problème suivant : étudier l'intégrabilité de f sur I. Ou, ce qui n'est pas la même chose, étudier l'existence de $\int_a^b f$.

a. Position du problème

• Si I est un segment, il n'y a pas de problème.

• Il n'y a guère de problème non plus lorsque I est un intervalle borné sur lequel f est bornée, ce qui recouvre entre autres le cas où f se prolonge en une fonction continue par morceaux à tout le segment $\overline{I}$.

En effet, une fonction constante est intégrable sur un intervalle borné. Par comparaison, une fonction bornée est intégrable sur un intervalle borné.

Ainsi, $x \mapsto \dfrac{1-\cos x}{x}$, $x \mapsto \sin^2(1/x)$ sont intégrables sur $]0,1]$. On dira simplement « f, continue par morceaux et bornée sur l'intervalle I borné, est intégrable sur I ».

• Si I est un intervalle ouvert $]a,b[$ (a réel ou $-\infty$, b réel ou $+\infty$), on étudie séparément l'existence de $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ (on « coupe le problème en deux »). On choisit c comme on veut dans $]a,b[$. On ramène ainsi tous les cas à un problème de convergence d'une intégrale (ou d'intégrabilité) sur un intervalle semi-ouvert.

b. Fonctions positives

Si la fonction considérée est positive, la convergence de l'intégrale de f équivaut à l'intégrabilité de f. La rédaction commencera par

> « la fonction $f : x \mapsto \ldots$ est continue par morceaux (ou continue), **positive**, sur l'intervalle $\cdots$ »

Il est important de bien préciser l'intervalle. Si celui-ci est ouvert ($]a,b[$), on fera en général deux études, en présentant les choses de la manière suivante :

Soit c **un élément de** $]a,b[$ (*on peut fixer c si on veut. Par exemple, si* $]a,b[=]0,+\infty[$, *on peut fixer* $c=1$. *Cela n'a pas d'influence sur le raisonnement.*)

• **Etude de l'intégrabilité sur** $[c, b[$ **(...)**

Le programme autorise une variété de formulations : « étude de l'intégrabilité en b », « étude de la convergence en b de l'intégrale »...

• **Etude de l'intégrabilité sur** $]a, c]$ **(...)**

Exemple : Etudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$

c. Fonctions non positives

...ni négatives.

Ici, sauf précision de l'énoncé, deux questions différentes peuvent se poser : la convergence de $\displaystyle\int_I f$ et l'intégrabilité de f sur I (ou absolue convergence de $\displaystyle\int_I f$). On s'orientera plus souvent vers la deuxième question : la semi-convergence n'est pas un objectif du programme.

Exemple : Etudier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\sin(xt)\,dt$ ($x \in \mathbf{R}$).

Mauvaise rédaction :

$$\left|\int_0^y e^{-t}\sin(xt)\,dt\right| \leq \int_0^y e^{-t}\,dt \leq 1$$

donc l'intégrale est absolument convergente.

Bonne rédaction :

IV Propriétés de l'intégrale

IV.1 Linéarité

Proposition Si I est un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$, si f et g sont continues par morceaux sur I, si $\displaystyle\int_I f$ et $\int_I g$ sont convergentes, si λ et μ sont dans $\mathbf{K}$, alors $\displaystyle\int_I (\lambda f + \mu g)$ converge.

Proposition Si I est un intervalle quelconque de $\mathbf{R}$, si f et g sont continues par morceaux intégrables sur I, si λ et μ sont dans $\mathbf{K}$, alors $\lambda f + \mu g$ est intégrable sur I.

Proposition Sous chacune des hypothèses précédentes,

$$\int_I (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_I f + \mu \int_I g$$

Reformulation L'ensemble des fonctions continues par morceaux dont l'intégrale sur I converge est un espace vectoriel qui n'a pas de nom ;
l'ensemble des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel (sous-espace vectoriel du précédent). Il est noté $L^1(I, \mathbf{K})$.
On peut d'ailleurs dire que l'application $f \longmapsto \displaystyle\int_I f$ est une forme linéaire sur chacun de ces espaces vectoriels.

IV.2 Positivité

Proposition Si f est continue par morceaux positive sur I, si $\displaystyle\int_I f$ converge (ce qui équivaut, par positivité, à dire « si f est intégrable sur I »), alors $\displaystyle\int_I f \geq 0$.

Proposition Si f est **continue** positive sur I, si $\displaystyle\int_I f$ converge (i.e. si f est intégrable sur I), et si $\displaystyle\int_I f = 0$, alors $f = \widetilde{0}$ sur I.

Ce dernier résultat est faux si f n'est que continue par morceaux

IV.3 Relation de Chasles ; intégrale fonction d'une borne

Les définitions données précédemment de

$$\int_a^b f$$

supposent $a < b$. Etendre ces définitions aux cas $a = b$ et $a > b$ ne pose pas de difficulté. Il faut bien sûr être attentif au fait que la positivité de l'intégrale peut se transformer en négativité. On obtient alors la relation de Chasles :

Si, parmi les intégrales $\int_a^b f(t)\ dt$, $\int_a^c f(t)\ dt$ et $\int_b^c f(t)\ dt$, deux convergent (a fortiori si f est intégrable sur deux des trois intervalles $]a,b[$, $]a,c[$, $]b,c[$), la troisième converge, et

$$\int_a^c f(t)\ dt \ = \ \int_a^b f(t) \ + \ \int_b^c f(t)\ dt$$

Peut-on dériver $\int_0^x \frac{\sin t}{t^{3/2}}, \int_x^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$ comme on a dérivé jusqu'ici des intégrales fonctions de leur borne supérieure, mais sur des segments ? la réponse est oui, assez simplement. Par exemple :

Proposition Si f est **continue** sur $[a,+\infty[$, si $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $x \longmapsto \int_x^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe C^1 sur $[a,+\infty[$, et

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t\right) = -f(x)$$

On peut bien sûr écrire des résultats analogues pour des intégrales qui posent problème ailleurs qu'en $+\infty$.

Démonstration 1

$$\int_x^{+\infty} f(t)\ dt \ = \ \int_a^{+\infty} f(t)\ dt - \int_a^x f(t)\ dt$$

Démonstration 2 Soit F une primitive de f sur $[a,+\infty[\ldots$ *Cette dernière manière de voir les choses est à retenir*

V Changement de variable, intégration par parties

V.1 Changement de variable

Proposition Soit $\phi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une bijection de classe C^1 (α,β,a,b dans $\mathbf{R}\cup\{\pm\infty\}$). On a alors ϕ strictement monotone. Supposons $\lim\limits_{\alpha}\phi = a, \lim\limits_{\beta}\phi = b$. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f\left(\phi(u)\right)\,\phi'(u)\,du$ ont même nature. Et en cas de convergence, elles sont égales.

Remarque 1 On ne suppose ni $a<b$ ni $\alpha<\beta$: cela obligerait à énoncer le résultat de manière différente suivant que ϕ croît ou décroît.

Remarque 2 Si on n'est pas dans le cas $\lim\limits_{\alpha}\phi = a$, $\lim\limits_{\beta}\phi = b$, on est dans le cas $\lim\limits_{\alpha}\phi = b$, $\lim\limits_{\beta}\phi = a$: l'hypothèse porte donc seulement sur les notations.

Remarque 3 « ont même nature » est très précis : cela signifie que si l'une des deux intégrales est absolument convergente, l'autre aussi. Et que si l'une des deux intégrales est semi-convergente, l'autre aussi.

Règle d'utilisation Le programme donne le droit d'appliquer ce résultat sans justification dans les cas usuels. Il n'est pas certain que ce soit très prudent...surtout quand on voit ce que coûte (voir ci-dessous) la rédaction détaillée d'un changement de variable. Néanmoins, les changements de variables $t=u+a$ ou $t=b-u$ peuvent être faits sans autre rédaction que « changement de variable : ».

Rédaction « Changement de variable : $t=\phi(u)$. $\phi : \ldots \longrightarrow \ldots$ est une bijection de classe C^1. »

L'expression de la réciproque : « Changement de variable : $t=\phi(u)$, $u=\psi(t)$. $\phi : \ldots \longrightarrow \ldots$ est une bijection de classe C^1. » est facultative mais recommandée. Contrairement au cas d'un segment, on impose ici la bijectivité du changement de variable.

Exemple 1 Trouver un lien entre l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,dt$.

Exemple 2 Exprimer, si $n \in \mathbf{N}_*$, l'expression de $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^n}$ à l'aide des intégrales de Wallis $\int_0^{\pi/2} \sin^k t\,\mathrm{d}t$.

Démonstration du résultat sur le changement de variable :

Sans importance...

Supposons ϕ strictement croissante, $\alpha < \beta$, $a < b$, $\lim_\alpha \phi = a$, $\lim_\beta \phi = b$. α, β, a et b ne sont pas nécessairement des réels, a et/ou α peuvent être $-\infty$, b et/ou β peuvent être $+\infty$.

Si $\alpha < c < y < \beta$ on peut écrire (changement de variable $t = \phi(u)$ sur un segment)

$$\int_{\phi(c)}^{\phi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^y f\big(\phi(u)\big)\,\phi'(u)\,\mathrm{d}u$$

Les phrases écrites successivement ci-dessous sont donc équivalentes :

L'intégrale $\int_{\phi(c)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

$\int_{\phi(c)}^{z} f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite quand $z \to b$.

$\int_{\phi(c)}^{\phi(y)} f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite quand $y \to \beta$.

$\int_{c}^{y} f\big(\phi(u)\big)\,\phi'(u)\,\mathrm{d}u$ a une limite quand $y \to \beta$.

L'intégrale $\int_{c}^{\beta} f\big(\phi(u)\big)\,\phi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge.

Et si ces phrases sont vraies, on a $\int_{\phi(c)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{c}^{\beta} f\big(\phi(u)\big)\,\phi'(u)\,\mathrm{d}u$. On montre exactement de même que l'intégrale $\int_{a}^{\phi(c)} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_{\alpha}^{c} f\big(\phi(u)\big)\,\phi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge, et le cas échéant les deux intégrales sont égales.

En rassemblant ces deux résultats, on obtient que $\int_{a}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\int_{\alpha}^{\beta} f\big(\phi(u)\big)\,\phi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge, et le cas échéant les deux intégrales sont égales.

Appliquant ce résultat à $|f|$, on obtient que f est intégrable sur $]a,b[$ (ce qui signifie que $\int_{a}^{b} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge) si et seulement si $\int_{\alpha}^{\beta} |f|\big(\phi(u)\big)\,\phi'(u)\,\mathrm{d}u$ converge, ce qui équivaut (vu que $\phi' \geq 0$) au fait que $\int_{\alpha}^{\beta} \big|f\big(\phi(u)\big)\,\phi'(u)\big|\,\mathrm{d}u$ converge, donc au fait que $(f\circ\phi)\,\phi'$ est intégrable sur $]\alpha,\beta[$.

V.2 Intégration par parties

C'est plus délicat. Par exemple,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \left[\frac{-\cos t}{t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$$

n'est pas acceptable. On peut, en modifiant légèrement ce calcul, le rendre néanmoins exact, et en déduire la surprenante relation

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt$$

(ce qui est encore plus surprenant, c'est que l'on a également

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2} \qquad).$$

Le programme fait néanmoins remarquer

Proposition Si fg a des limites finies en a et en b (« si le crochet existe »), les intégrales $\displaystyle\int_a^b f'g$ et $\displaystyle\int_a^b fg'$ sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux non convergentes (en revanche, contrairement à ce qui se passe pour le changement de variable, l'une peut être absolument convergente et l'autre semi-convergente). Et dans le cas de convergence, on peut écrire la formule

$$\int_a^b f(t)g'(t)\, dt = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\, dt$$

On sera quand même nettement plus attentif pour la rédaction d'une intégration par parties que pour la rédaction d'un changement de variable. Il est souvent préférable d'intégrer par parties « tranquillement », sur un segment, puis de faire tendre les bornes vers les bornes de l'intervalle. Lorsque les fonctions sont « évidemment » C^1, le programme dit qu'on doit pouvoir oublier de le rappeler sans être sanctionnable.

Exemple : On définit, si $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\, dt$$

Trouver une relation de récurrence entre $\Gamma(n+1)$ et $\Gamma(n)$, en déduire $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Table des matières