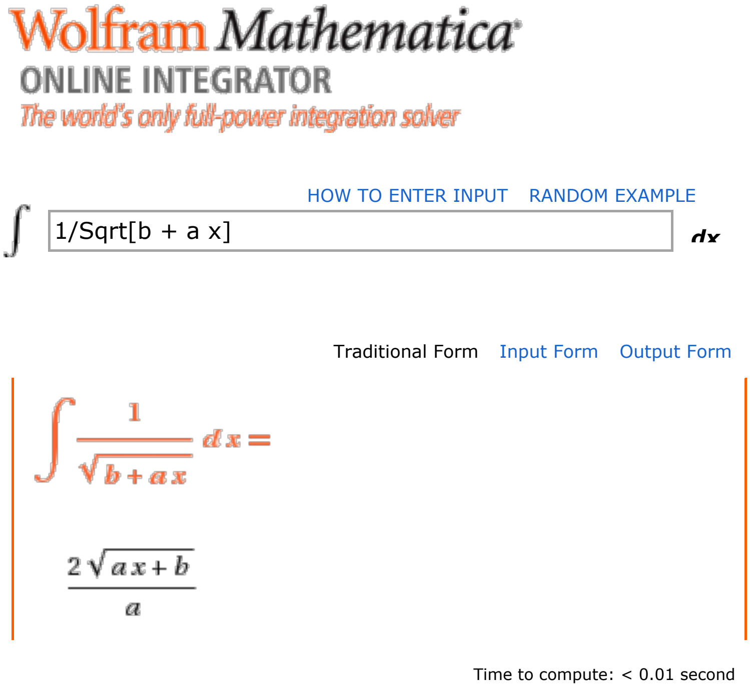
C6 : Calcul de primitives



Une méthode efficace pour le calcul des primitives

I Préliminaire

I.1 Notations

La notation $\int f(x)\ dx$ désigne « une primitive quelconque de la fonction f sur l'intervalle considéré, exprimée comme fonction de x ». Cette notation est souvent dangereuse (elle ne définit en effet une fonction qu'à une constante près, il faut préciser l'intervalle...) , il est en général plus sûr d'écrire que, si a est un point de l'intervalle considéré, l'application $x \mapsto \int_a^x f(t)\ dt$ est une primitive de f : on travaille alors avec de vraies intégrales.

I.2 Remarque

On remarquera, dans les exercices et problèmes, que le calcul d'une intégrale $\int_a^b f(t)\ dt$ ne nécessite pas en général la connaissance d'une primitive de f. Il y a d'autres techniques de calcul que la formule $\int_a^b f(t)dt = \left[F(t)\right]_a^b$.

II Primitives usuelles

II.1 Primitives usuelles

On réécrit à l'envers un tableau des dérivées usuelles. C'est cohérent : la primitivation est l'opération inverse de la dérivation.

$$\begin{array}{llll}
\int e^{ax}\ dx = \dfrac{e^{ax}}{a} & +\text{Cte} & (a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}) \\
\int \cos x\ dx = \sin x & +\text{Cte} & \\
\int \sin x\ dx = -\cos x & +\text{Cte} & \\
\int \operatorname{ch} x\ dx = \operatorname{sh} x & +\text{Cte} & \\
\int \operatorname{sh} x\ dx = \operatorname{ch} x & +\text{Cte} & \\
\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{Arctan} x & +\text{Cte} & \\
\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{Arcsin} x & +\text{Cte} & (\text{sur }]-1,1[)
\end{array}$$

Remarquons que la première de ces primitives est valable pour tout $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$; et par exemple, pour calculer

$$\int e^{-t} \cos(\pi t)\, dt$$

il est plus habile d'utiliser cette formule que de faire deux intégrations par parties (avec les risques d'erreurs de signes que cela implique).

Exercice : Calculer une primitive de $t \longmapsto e^{-t} \cos(\pi t)$ sur $\mathbf{R}$.

II.2 Dérivations « à l'envers »

Pour savoir calculer des primitives, il faut savoir dériver. On peut même dire que le calcul de primitives aux concours, c'est :

— Savoir « reconnaître » une dérivée.

— Savoir primitiver les fractions rationnelles.

On considère une fonction u de classe C^1 (il suffirait qu'elle soit dérivable) sur un intervalle I, à valeurs réelles. On demande de calculer sur I les primitives suivantes :

Si u ne s'annule pas sur I,

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} \mathrm{d}x =$$

Si $u > 0$ sur I, et si $\alpha \neq -1$,

$$\int (u(x))^{\alpha} u'(x) \mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{u'(x)}{1+u^2(x)} \mathrm{d}x =$$

$$\int u'(x) \sin(u(x)) \, \mathrm{d}x =$$

$$\int u'(x) \cos(u(x)) \, \mathrm{d}x =$$

$$\int u'(x) \operatorname{sh}(u(x)) \, \mathrm{d}x =$$

$$\int u'(x) \operatorname{ch}(u(x)) \, \mathrm{d}x =$$

Si $|u| < 1$ sur I,

$$\int \frac{u'(x)}{\sqrt{1-(u(x))^2}} \mathrm{d}x =$$

III Primitives de fractions rationnelles

III.1 Introduction ; deux primitives fondamentales

L'obtention des primitives d'une fonction rationnelle peut s'obtenir par une décomposition en éléments simples, dans la mesure où celle-ci est possible.
Cette méthode est fortement limitée par notre faible capacité à calculer des décompositions en éléments simples ! Il y a d'autres algorithmes, utilisés dans les systèmes de calcul formel, hors programme.
On obtient par exemple par ce moyen une primitive que l'on peut qualifier d'usuelle (calcul à bien savoir faire) :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= \int \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C\end{aligned}$$

(valide sur chacun des trois intervalles suivants : $]-\infty,-1[$, $]-1,1[$, $]1,+\infty[$).

Ce résultat n'est pas à connaître par coeur, mais à savoir retrouver rapidement et sûrement. Par exemple, si on doit calculer une primitive de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur $]-1,1[$, on s'organisera un petit peu autrement :

La décomposition en éléments simples ramènera à la recherche de primitives des éléments simples de première espèce et de deuxième espèce. Pour ceux de deuxième espèce, la primitive de base sera

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \mathrm{Arctan}\, x \ + \ C$$

III.2 Primitivation des éléments simples de première espèce

C'est immédiat : on applique directement les formules de « dérivation à l'envers » suivantes :

$$\int \frac{dx}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} dx \ = \ \frac{1}{1-m}(x-a)^{1-m} + Cte \qquad (m \in \mathbf{Z} \setminus \{1\} \text{ et } a \in \mathbf{C})$$

$$\int \frac{dx}{x-a} = \int (x-a)^{-1} dx \ = \ \ln\big(|x-a|\big) + Cte \qquad (a \in \mathbf{R} \textbf{ seulement})$$

Notons que la première est valable sur **R** si a est complexe non réel ; si a est réel, les primitives obtenues sont valables sur $]-\infty, a[$ ou sur $]a, +\infty[$. Si a n'est pas réel, la deuxième formule est fausse (voir plus loin pour le calcul, dans le cas où a est complexe non réel, d'une primitive de $x \mapsto 1/(x-a)$).

III.3 Primitives des éléments simples de deuxième espèce

On a aussi, sur **R**, des éléments simples de deuxième espèce ; examinons le cas de l'ordre 1, le seul explicitement au programme. L'idée est la mise sous forme canonique des trinômes du second degré. L'abondance des lettres pouvant nuire à la compréhension du cas général, on peut essayer dans un premier temps de calculer les primitives

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

et

$$\begin{aligned}
\int \frac{x+1}{x^2+x+1}dx &= \int \frac{1}{2}\frac{(2x+1)+1}{x^2+x+1}dx \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\big) + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\big) + \frac{1}{2}\frac{4}{3}\int \frac{dx}{(2x/\sqrt{3}+1/\sqrt{3})^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\big) + \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{(2/\sqrt{3})dx}{(2x/\sqrt{3}+1/\sqrt{3})^2+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C
\end{aligned}$$

a. Première étape

(dans la suite, on suppose $\alpha^2-4\gamma<0$, sinon la fraction pourrait se réduire en éléments simples d'ordre 1). On commence par faire apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur (lorsque c'est possible, bien entendu, i.e. lorsqu'il y a un terme en x au numérateur, sinon on passe directement à l'étape suivante) ; ainsi :

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{x^2+\alpha x+\gamma}dx &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+\alpha+b_1}{x^2+\alpha x+\gamma}dx \\ &= \frac{a}{2}\ln(x^2+\alpha x+\gamma)+\frac{ab_1}{2}\int \frac{dx}{x^2+\alpha x+\gamma}\end{aligned}$$

b. Deuxième étape

Il n'y a plus de x au numérateur. On écrit le dénominateur sous forme canonique (si $b_1 \neq 0$ bien entendu) et on finit l'intégration à l'aide d'une arctangente ;

$$\begin{aligned}&= \frac{a}{2}\ln(x^2+\alpha x+\gamma)+b_1'\int \frac{dx}{(x-k)^2+\ell^2} \qquad (b_1' = ab_1/2)\\ &= \frac{a}{2}\ln(x^2+\alpha x+\gamma)+\frac{b_1'}{\ell}\int \frac{\frac{1}{\ell}dx}{(\frac{x-k}{\ell})^2+1}\\ &= \frac{a}{2}\ln(x^2+\alpha x+\gamma)+\frac{b_1'}{\ell}\operatorname{Arctan}\frac{x-k}{\ell}+\mathrm{Cte}\end{aligned}$$

c. Remarque importante

Bien suivre l'ordre des étapes. Si au numérateur figure exactement la dérivée du dénominateur, mettre celui-ci sous forme canonique est une perte de temps, un risque d'erreur de calcul, une maladresse.

d. Eléments simples d'ordre > 1

Un peu hors programme

Les calculs sont plus compliqués. Mais on commence comme précédemment :

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{(x^2+\alpha x+\gamma)^m}dx &= \frac{a}{2}\int \frac{2x+\alpha+b_1}{(x^2+\alpha x+\gamma)^m}dx \\ &= \frac{a}{2(1-m)}(x^2+\alpha x+\gamma)^{1-m}+b_1\int \frac{dx}{\left((x-k)^2+\ell^2\right)^m}\end{aligned}$$

Après changement de variable $u=\dfrac{x-k}{\ell}$, on est ramené au problème de recherche de $\displaystyle\int \frac{du}{(1+u^2)^m}$ que l'on peut déterminer par changement de variable $u=\tan v$; on est ramené à une recherche de primitive de polynôme en $\cos v$, on linéarise ou on fait une intégration par parties et une récurrence (voir intégrales de Wallis).

e. Une primitive assez importante...

...et un calcul intéressant.

On peut aussi avoir à calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{x-a}$ où a est un complexe non réel (la variable x est, elle, toujours réelle). On ne peut pas écrire de logarithme (le problème des « logarithmes » sur $\mathbf{C}$ n'est pas du tout aussi simple que sur $\mathbf{R}$). On sépare alors simplement partie réelle et partie imaginaire, en commençant par multiplier haut et bas par l'expression conjuguée du dénominateur ; pour cela, on écrira $a=\alpha+i\beta$, $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\setminus\{0\}$;

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-\alpha-i\beta} &= \int \frac{(x-\alpha)+i\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)+i\int \frac{1/\beta}{\left(\dfrac{x-\alpha}{\beta}\right)^2+1}dx \\ &= \frac{1}{2}\ln\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)+i\,\mathrm{Arctan}\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right)+C\end{aligned}$$

f. Remarques

Les techniques qui sont exposées dans la suite ont souvent pour but de ramener à des primitives ou intégrales de fractions rationnelles, après changement de variable ou intégration par parties.
Ne pas oublier de bien observer la fraction à intégrer pour chercher des calculs simples : par exemple, éviter de décomposer en éléments simples pour calculer $\int \frac{u^3+u}{u^4+1}du$ qui vaut « à vue »

$$\frac{1}{4}\ln(u^4+1)+\frac{1}{2}\text{Arctan}(u^2)+C$$

IV Primitives de fractions rationnelles en $\cos x$ et $\sin x$

(…et $\tan x$ éventuellement, $\tan x$ étant déjà une fraction rationnelle en $\cos x$ et $\sin x$).

IV.1 Polynômes : utilisation de la linéarisation

Si on doit primitiver un polynôme trigonométrique, on peut linéariser. Il faut donc savoir calculer une primitive de $x \longmapsto \sin^4 x$.

Mais la linéarisation ne doit surtout pas être un automatisme. Par exemple, on peut calculer une primitive de $x \mapsto \sin^3 x \ \cos^{34} x$:

Et on remarque que le calcul d'une primitive de

$$x \mapsto \sin^m x \ \cos^n x$$

ne nécessite une linéarisation que dans le cas où n et m sont

IV.2 Fractions rationnelles

Rien au programme n'est exigible à ce sujet. Depuis longtemps, d'ailleurs. Et il semble que cela commence enfin à se savoir. Le principe est néanmoins intéressant.

On considère $f : x \longmapsto \phi(\cos x, \sin x)$ où ϕ est une fraction rationnelle de deux variables. Les règles suivantes partent d'une constatation : si on peut écrire f sous l'une des trois formes

$$f(x) = \psi(\cos x)\sin x \qquad f(x) = \psi(\sin x)\cos x \qquad f(x) = \psi(\tan x)$$

où ψ est une fraction rationnelle, que l'on sait donc primitiver, alors on sait primitiver f (pourquoi ?).

Remarquons alors, simplement, que

Si $f(x) = \psi(\cos x)\sin x$, alors $f(-x) = -f(x)$.

Si $f(x) = \psi(\sin x)\cos x$, alors $f(\pi - x) =$

Si $f(x) = \psi(\tan x)$, alors $f(\pi + x) =$

La réciproque est vraie. . .

• Si $f(\pi - x) = -f(x)$ (on dit parfois que « $f(x)\,\mathrm{d}x$ est invariant par $x \leftarrow \pi - x$, comme $(\sin x)\,\mathrm{d}x$ »), on admet (ce n'est pas très difficile à démontrer) que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $R(\sin x)\cos x$ où R est une fraction rationnelle d'une seule variable ; le changement de variable $u = \sin x$ ramène alors à une fraction rationnelle en u (symboliquement, $\mathrm{d}u = \cos x\,\mathrm{d}x$).

• Si $f(-x) = -f(x)$ (on dit parfois que « $f(x)dx$ est invariant par $x \leftarrow -x$, comme $(\cos x)\,\mathrm{d}x$ »), on montre que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $R(\cos x)\sin x$ où R est une fraction rationnelle ; le changement de variable $u = \cos x$ ramène alors à une fraction rationnelle en u ($du = \sin x\;dx$).

• Si $f(\pi + x) = f(x)$ (on dit parfois. . .), on démontre que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme $R(\tan x)$ où R est une fraction rationnelle ; le changement de variable $u = \tan x$

ramène alors à une fraction rationnelle en u (en particulier, si f est donnée comme fonction de $\tan x$, on ne cherchera pas plus loin la nouvelle variable à adopter).
Par exemple, on obtient une primitive qui était autrefois qualifiable d'usuelle :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx \\ &= \int \frac{du}{1-u^2}\end{aligned}$$

avec le changement de variable $u = \sin x$. On retombe sur une fraction déjà rencontrée, on conclut. Et en travaillant un peu :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\cos x} &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}\right) \\ &= -\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| \;+\; C \\ &= \ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right| \;+\; C\end{aligned}$$

C'est l'occasion d'insister de nouveau sur l'importance des formules

$$1+\cos(2a) = 2\cos^2 a \qquad , \qquad 1-\cos(2a) = 2\sin^2 a$$

à connaître dans tous les sens : de droite à gauche, de gauche à droite, en remplaçant a par $a/2$...

(Cette primitive intervient dans les formules de calcul de la projection cartographique classique de Mercator; bien entendu, ces primitives sont valables sur un intervalle qui ne contient aucun $\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.)

Dans le cas où aucune de ces règles (dites de Bioche) ne s'applique, on est réduit au changement de variable $t = \tan(x/2)$, les calculs sont vite compliqués ; mais il faut savoir retrouver les formules

$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$.

Notons enfin que tous ces changements de variables peuvent être essayés sur des fonctions de $\sin x$ et $\cos x$ qui ne sont pas des fractions rationnelles.

V Primitivation par parties

On dérive les ln, Arctan,etc. . .Par exemple :

$\displaystyle\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

(on a le droit de connaître cette primitive par cœur).

VI Fractions rationnelles en $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, e^x

S'il s'agit d'une fraction rationnelle en $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, on peut utiliser la recette suivante : si, pour la fraction obtenue en remplaçant $\operatorname{ch} x$ par $\cos x$, $\operatorname{sh} x$ par $\sin x$, $\operatorname{th} x$ par $\tan x$, les règles de Bioche recommandent d'effectuer le changement de variable $u = \cos x$ (resp. $u = \sin x$, resp. $u = \tan x$), alors on fera ici $u = \operatorname{ch} x$ (resp. $u = \operatorname{sh} x$, resp $u = \operatorname{th} x$).
Mais dans tous les cas, on a une fraction en e^x, et on peut effectuer alors le changement de variable $u = e^x$.
Par exemple, pour calculer $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$, on peut partir de

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} = \int \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} dx$$

et faire le changement de variable $u = shx$ ou directement intégrer « à vue » pour obtenir les primitives :

$$\operatorname{Arctan}(\operatorname{sh} x) \; + \; C$$

ou encore (méthode plus universelle) :

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x} &= \int \frac{2e^x}{1 + e^{2x}} dx \\ &= 2 \operatorname{Arctan}(e^x) \; + \; C\end{aligned}$$

(méthode différente, résultat différent...)

VII Changement de variable

VII.1 Principe général

Il faut d'abord reconnaître directement des problèmes tels que :
$\int u'(x) f\big(u(x)\big)\, dx$
lorsque l'on connaît une primitive F de f.

VII.2 Deux exemples importants

Quels changements de variables pourrait-on envisager pour calculer les primitives suivantes ?

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \ln\big(x+\sqrt{1+x^2}\big) \quad +\text{Cte}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\big|x+\sqrt{x^2-1}\big| \quad +\text{Cte} \quad (\text{sur }]-\infty,-1[\text{ ou }]1,+\infty[)$$

VIII Entraînement

1. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{Arctan}^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{Arcsin} x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^5 x}$

4. $\displaystyle\int_{3\pi/4}^{\pi} \tan x \,\mathrm{d}x$

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^4 x \,\mathrm{d}x$

6. $\displaystyle\int \operatorname{Arctan} x \,\mathrm{d}x$

7. $\displaystyle\int \sin t \, e^{2t} \,\mathrm{d}t$

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{1-x^2}}$

9. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \cos^5 u \,\mathrm{d}u$

10. $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \sin^4 x \, \mathrm{d}x$

11. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^x} \mathrm{d}x$

12. $\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$

Table des matières