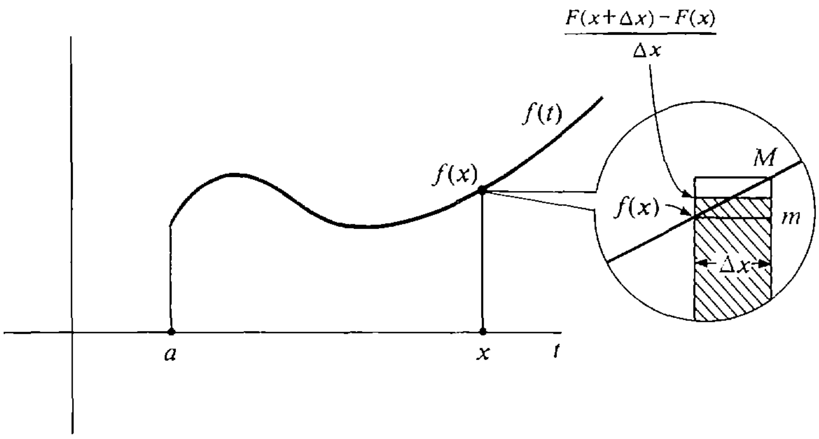
C5 : Intégration et dérivation



Le théorème fondamental en Analyse Non Standard (H. Jerome Keisler, Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach)

Les fonctions dont il est question dans ce chapitre sont définies sur un intervalle I de **R**, à valeurs dans **R** ou **C**.

I Intégrale et primitive

I.1 Primitive

Définition (primitive d'une fonction continue) : Soit f une application continue sur l'intervalle I de **R**. On appelle primitive de f sur I toute application dérivable sur I et dont la dérivée est f (une telle application est alors nécessairement de classe C^1).

Proposition Si F et G sont deux primitives de f sur l'intervalle I, alors $F-G$ est constante sur I.

Remarque Si I n'est pas un intervalle, c'est faux...

I.2 Intégrale et primitive

Théorème fondamental (lien entre intégration et dérivation) : Soit f une application continue sur I, a un point de I. Il existe une unique primitive de f sur I qui s'annule en a. Cette primitive est l'application

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt\ .$$

Pour toute primitive h de f et tous points a et x de I, on a donc

$$\int_a^x f(t)dt = h(x) - h(a)\ .$$

Démonstration Voir la première page...ou l'annexe.

Corollaire : Si f est de classe C^1 sur I, pour tous points a et x de I,

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt\ .$$

Ecriture utile pour déduire de propriétés de f' des conclusions sur f.

Notation : On note souvent $[h]_a^b$ ou $[h(t)]_{t=a}^{t=b}$ ou encore, lorsqu'il n'y a pas d'équivoque possible sur le nom de la variable, $[h(t)]_a^b$ l'expression $h(b)-h(a)$.

Un résultat utile

Tout le monde sait dériver $x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$. Il faut être à l'aise aussi avec la dérivation de

$$x \longmapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$$

(f est continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, u et v le sont sur un intervalle J de $\mathbf{R}$, à valeurs dans I. La méthode est simple : introduire une primitive F de f sur I...

Exercice Calculer la dérivée sur $]1,+\infty[$ de

$$x \longmapsto \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$$

Remarque hors-programme : Si f n'est que continue par morceaux sur I, et si $a \in I$, la fonction

$$F : x \longmapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

a encore les propriétés suivantes :

(i) Elle est continue sur I.

(ii) en tout point de continuité b de f, F est dérivable, et $F'(b) = f(b)$.

On dit encore que F est une « primitive » de f.

II Intégration par parties, changement de variables

II.1 Intégration par parties

Théorème d'intégration par parties

Si f et g sont de classe C^1 sur $[a,b]$ à valeurs réelles ou complexes, si a et b sont deux éléments de I,

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt\ .$$

Démonstration Il suffit d'utiliser la formule de dérivée d'un produit.

Utilisation Cette formule est très utilisée :

• Pour le calcul d'intégrales : ce n'est pas l'application la plus fréquente, mais quand même :

Mauvais exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^x e^{-t}\ \sin t\ \mathrm{d}t$ (mauvais exemple car ce n'est probablement pas la meilleure méthode).

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^3}\ \mathrm{d}t$.

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_1^x \frac{\text{Arctan t}}{t^2}\mathrm{d}t$.

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^x t^3 \sin t\ \mathrm{d}t$.

• Pour des récurrences : la plus célèbre est celle qui concerne la fonction Γ, voir plus tard, le chapitre sur les intégrales généralisées.

La relation de récurrence des intégrales de Wallis est aussi à savoir faire ; elle n'est pas si évidente, car l'intégration par parties est un peu astucieuse :

Exercice : On définit, si $n \in \mathbf{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\ \mathrm{d}t$. Trouver une relation entre I_n et I_{n+2} de la forme $I_{n+2} = \alpha_n I_n$.

Plus automatique, la récurrence permettant d'établir la formule de Taylor avec reste intégral :

Exercice : Soit f une fonction de classe C^{n+2} sur un intervalle I, et soit $(a,x)\in I^2$. Montrer :

$$\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\,\mathrm{d}t$$

• Pour montrer que l'intégrale « généralisée » d'une fonction non intégrable converge : voir chapitre sur les intégrales sur un intervalle quelconque, l'exemple fondamental de $t \longmapsto \sin t\ /\ t$.

• Pour connaître l'ordre de grandeur d'une intégrale, obtenir un développement asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre, etc... L'intégration par parties servant à écrire une intégrale comme somme d'un terme « prépondérant » (le « crochet » [.]) et d'une intégrale petite devant la première. Voici un exemple, qui approfondit l'étude asymptotique des sommes partielles de la série harmonique, en étudiant « de près » les w_n introduits dans ce but.

Exercice On définit, si $n\geq 2$,

$$w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \frac{1}{n}$$

1. Ecrire w_n sous forme d'une intégrale entre $n-1$ et n, puis montrer, par exemple à l'aide une intégration par parties, que

$$w_n = \int_{n-1}^{n} \frac{t-(n-1)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

2. En déduire que

$$w_n = \frac{1}{2n^2} + \int_{n-1}^{n} \frac{(t-(n-1))^2}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

puis que

$$w_n = \frac{1}{2n^2} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^3}\right)$$

(c'est bien un « grand O »).

3. En déduire que $\sum_{n\geq 2} w_n$ converge. On note σ sa somme.
4. Montrer qu'il existe un réel M tel qu'à partir d'un rang n_0 on ait

$$\left| w_n - \frac{1}{2n^2} \right| \leq \frac{M}{n^3}$$

En déduire que, si $n \geq n_0$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(w_k - \frac{1}{2k^2} \right) \right| \leq \frac{M}{3n^2}$$

5. Montrer que

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$$

6. Conclure de tout ce qui précède l'existence d'une constante γ telle que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n \ + \ \gamma \ + \ \frac{1}{2n} \ + \ \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Rédaction On veut calculer

$$I = \int_1^x t^3 \ln t \, \mathrm{d}t$$

« Intégration par parties : $t \longmapsto \frac{t^4}{4}$ et $t \longmapsto \ln t$ sont de classe C^1 sur $[0,1]$. On a donc : » etc…

On a le droit de détailler un peu plus, de dire « on pose $u \ : \ t \mapsto \ldots$ », mais c'est surtout conseillé si on a peur de se tromper.

Remarque « IPP », ça n'existe pas…

II.2 Changement de variable

Théorème de changement de variable

Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur un segment $[\alpha, \beta]$ de $\mathbf{R}$, à valeurs dans I. Alors

$$\int_{\phi(\alpha)}^{\phi(\beta)} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} f\big(\phi(u)\big)\phi'(u)du\,.$$

Lorsqu'on écrit cette égalité, on dit qu'on fait le « changement de variable » $t = \phi(u)$ dans l'intégrale de gauche.

Rédaction

Un changement de variable dans une intégrale pour laquelle la variable d'intégration s'appelle t , c'est $t = \phi(u)$. Si (cela arrive) l'idée du changement de variable se présente sous la forme $u = \psi(t)$, il faut que ψ soit bijectif, pour que l'on puisse annoncer :

« Changement de variable : $t = \phi(u)$ »

Ce qui n'empêche pas de donner aussi u en fonction de t, c'est encore plus clair. Par exemple, on veut calculer

$$I = \int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

On écrit : « Changement de variable : $t = \sin u$ ». Et on doit aussi écrire : « $\sin : [0, \pi/2] \to [0, 1]$ est de classe C^1 ».

En revanche, écrire « $u = \mathrm{Arcsin}(t)$ » est facultatif. Mais cela rend les calculs plus clairs (quoiqu'ici, pas tant que ça).

Remarque Le programme indique quelques cas où le changement de variable peut être effectué sans justification. Il est prudent de justifier tout changement de variable autre qu'affine ($t = ku+\ell$). Et évidemment, pour un changement de variable affine, la partie

« Changement de variable : $t = ku + \ell$ »

doit être gardée. Ce qu'on peut laisser tomber, c'est « $\phi\ :\ u \longmapsto ku+\ell$ est de classe C^1 de $[\ldots,\ldots]$ dans $[\ldots,\ldots]$ ».

Utilisation Cette formule peut être utilisée pour le calcul d'intégrales, l'étude asymptotique d'une intégrale dépendant d'un paramètre, les recherches d'intégrabilité ou d'existence d'une intégrale « généralisée », etc. . .Les changements de variables les plus simples (changements de variables affines) sont aussi les plus utiles : ils permettent d'exploiter des propriétés de parité ou de périodicité de la fonction intégrée, de ramener le segment d'intégration au segment $[0,1]$ et ainsi de permettre l'étude d'intégrales dépendant d'un paramètre,. . .

Exercice : Montrer que, si $n \in \mathbf{N}$,

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n t \,\mathrm{d}t \;=\; \int_0^{\pi/2} \sin^n t \,\mathrm{d}t$$

Exercice : Soit f continue et T-périodique sur $\mathbf{R}$ $(T>0)$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépend pas de a (évident sur un dessin, intéressant à écrire. . .).

Exercice : Si f et g sont deux fonctions continues sur $[0,+\infty[$, on définit

$$f\star g\ :\ t\longmapsto \int_0^x f(x-t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

Montrer que $f\star g = g\star f$.

Exercice : Démontrer que la fonction $x\longmapsto \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{x+t}\mathrm{d}t$ est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}_*^+$ (sans, bien sûr, les « gros » théorèmes que l'on n'a pas encore vus). Ecrire sa dérivée (l'expression contiendra une intégrale).

III Inégalités des accroissements finis

III.1 Inégalités

Théorème : Si f est de classe C^1 sur l'intervalle I, si $|f'| \leq k$ sur I, alors f est k-lipschitzienne sur I.

Démonstration :

Il suffit d'écrire
$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\ \mathrm{d}t$$
et de majorer le module (ou valeur absolue) de l'intégrale par l'intégrale du module (ou valeur absolue)...

Exercice : On suppose que f et g sont des applications de classe C^1 sur $[a,b]$, à valeurs dans $\mathbf{K}$ et $\mathbf{R}$ respectivement, et telles que $|f'| \leq g'$ sur $[a,b]$. Montrer que
$$|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$$

Exercice : Montrer que si f est C^1 sur $]a,b[$, continue sur $[a,b]$, si $|f'| \leq k$ sur $]a,b[$, alors
$$\left|f(b) - f(a)\right| \leq k|b-a|$$

Inégalité des accroissements finis et nombres algébriques Soit $x \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ tel qu'il existe un polynôme $P \in \mathbf{Q}[X]$ irréductible, de degré $d \geq 2$ vérifiant $P(x) = 0$ (on dit que x est algébrique). En remarquant que $P\left(\dfrac{p}{q}\right) \neq 0$ pour tout $p \in \mathbf{Z}$ et tout $q \in \mathbf{N}_*$, montrer qu'il existe $a > 0$ tels que, pour tout rationnel $r = p/q$ avec $(p,q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}^*$, $|x - r| \geq \dfrac{a}{q^d}$ (on pourra constater d'abord que pour $|x - r| \geq 1$ la question est facile).
En déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} 10^{-n!}$ est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est pas algébrique.
On a démontré à la fin du XIXe siècle que π et e étaient transcendants; le problème de la transcendance d'un réel n'est donc pas évident.

III.2 Classe C^n par prolongement

Théorème Soit I un intervalle, $a \in I$, $n \geq 1$. Soit f une application de classe C^n sur $I \setminus \{a\}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose que $f^{(j)}$ a, pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, une limite en a. Alors f se prolonge en une fonction de classe C^n sur I.

Remarque C'est vrai aussi pour $n = 0$, mais cela n'a rien à voir avec la dérivation!

Démonstration On fait une récurrence, le cas $n = 1$ va nous suffire. On commence par prolonger f par continuité en a, on suppose que c'est fait (on pose donc $f(a) = \lim_{x \to a} \big(f(x)\big)$; et on note ℓ la limite en a de f'. Il est alors nécessaire et suffisant de montrer que f est dérivable en a, de dérivée ℓ (on montrera ainsi du même coup l'existence et la continuité de f' en a, ce qui est la seule chose qui nous manque pour affirmer la classe C^1 de f).

C'est toujours le même problème : taux d'accroissement ou développement limité? ici, les deux marchent, allons-y pour les développements limités.

On doit montrer :

$$f(x) - f(a) - (x-a)\ell = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}(x-a)$$

Pour cela, intéressons-nous à la fonction $g \ : \ x \mapsto f(x) - f(a) - (x-a)\ell$, continue sur I, de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$, de dérivée $g' \ : \ x \mapsto f'(x) - \ell$. Comme g' a pour limite 0 en a, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$0 < |t-a| \leq \eta \ \Rightarrow \ |g'(t)| \leq \epsilon$$

Si $0 < |x-a| \leq \eta$, on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis (en fait, un peu étendue : on applique le résultat du deuxième exercice sur les accroissements finis ci-dessus) à g sur $[a, x]$, on obtient

$$|g(x) - g(a)| \ \leq \ \epsilon|x-a|$$

ou encore, en se rappelant la définition de g,

$$|f(x) - f(a) - (x-a)\ell| \ \leq \ \epsilon|x-a|$$

inégalité encore vraie si $x = a$. En conclusion,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \quad |x-a| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(a) - (x-a)\ell| \ \leq \ \epsilon|x-a|$$

Que demander de plus ? on n'a plus alors qu'à faire une récurrence sur n, tout se passe bien.

IV Formules de Taylor

IV.1 Formule de Taylor avec reste sous forme intégrale

Notation : Soit f de classe C^k sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ (à valeurs réelles ou complexes), et soit a un point de I. Le polynôme de Taylor de f en a à l'ordre k est, au point x :

$$T_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a)$$

(il s'agit d'ailleurs plutôt d'une fonction polynôme, même si rien n'empêche d'en faire un polynôme au sens algébrique du terme).

Théorème : Soit f de classe C^{k+1} sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ ($k \geq 0$), à valeurs réelles ou complexes. Soit a un point de I. Alors, pour tout x de I,

$f(x) = T_k(x) + R_k(x)$ où $R_k(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt.$

Autrement dit,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t)\,dt$$

Démonstration Par récurrence et intégration par parties, démonstration intéressante.

Utilisation Voir plus tard...Majoration de la différence entre une fonction et son polynôme de Taylor sur un segment donné (en majorant le reste-intégrale), développabilité en série entière, etc...On transforme parfois le reste par changements de variables, par exemple pour ramener le segment d'intégration à $[0,1]$. Mais une des principales applications de la formule de Taylor avec reste-intégrale est l'inégalité de Taylor-Lagrange.

IV.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème : Soit f de classe C^{k+1} sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ ($k \geq 0$), à valeurs réelles ou complexes. Soit a un point de I. Alors, pour tout x de I,

$$\left| f(x) - \sum_{i=0}^{k} \frac{(x-a)^i}{i!} f^{(i)}(a) \right| \leq \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \sup_{[a,x]} \left| f^{(k+1)} \right|$$

Démonstration Une majoration d'intégrale assez classique, assez intéressante, pas trop difficile.

Remarque Par croissances comparées, $|x-a|^n = \mathrm{o}(n!)$; si les dérivées successives de f sont « bien contrôlées », on aura donc des résultats de convergence de la suite des polynômes de Taylor vers f. Hélas, ce n'est pas si souvent le cas. Mais pour des fonctions bien calmes, comme sin et cos, ça marche très bien.

Exercice : Montrer que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Exercice : Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

V Formule de Taylor-Young

Voir chapitre suivant…

VI Annexe : démonstration du théorème fondamental

Théorème : Soit f une application continue sur I, à valeurs dans un evn de dimension finie $(E, \|.\|)$, a un point de I. Il existe une unique primitive de f sur I qui s'annule en a. Cette primitive est l'application

$$x \longmapsto \int_a^x f(t)dt\,.$$

Démonstration : Notons F l'application définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

On veut démontrer que F est une primitive de f sur I. Ce qui revient à montrer que, pour tout $x \in I$, on a le développement limité au voisinage de 0 :

$$F(x+h) = F(x) + hf(x) + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

Fixons donc $x \in I$. Dans ce qui suit, on suppose que h est assez petit pour que $x+h \in I$ (si x est une borne de I, le signe de h est fixé). On peut écrire, en utilisant la relation de Chasles :

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) - hf(x) &= \int_x^{x+h} f(t)dt \; - \; hf(x) \\ &= \int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)dt \end{aligned}$$

et donc

$$\big|F(x+h) - F(x) - hf(x)\big| \leq \left|\int_x^{x+h} |f(t) - f(x)|dt\right|$$

Soit $\epsilon > 0$; par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall y \in I \qquad |y - x| \leq \eta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

Si $|h| \leq \eta$, on a, pour tout $t \in [x, x+h]$ (que h soit positif ou négatif n'a aucune importance), $|t - x| \leq \eta$ et donc $|f(t) - f(x)| \leq \epsilon$. D'où, finalement,

$$|h| \leq \eta \Rightarrow \big|F(x+h) - F(x) - hf(x)\big| \leq \epsilon |h|$$

On a montré

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \eta > 0 \qquad |h| \leq \eta \Rightarrow \left|F(x+h) - F(x)\right| \leq \epsilon |h|$$

ce qui montre bien que

$$F(x+h) - F(x) - hf(x) = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

On conclut donc (l'unicité ne pose pas de difficulté).

Table des matières