C4 : Intégration des fonctions numériques sur un segment

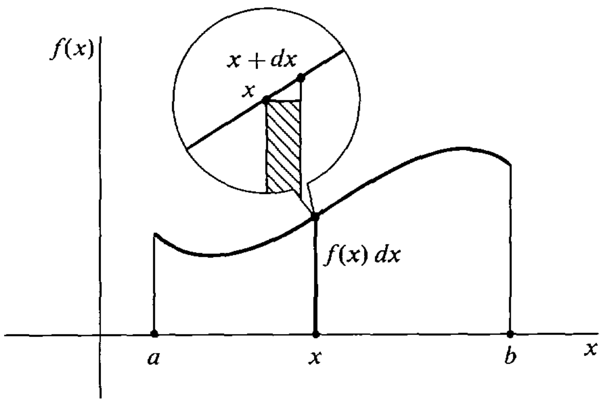


Figure 4.1.11 Infinite Riemann Sum

Définition de l'intégrale en Analyse Non Standard (H. Jerome Keisler, Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach)

I Intégration des fonctions à valeurs réelles

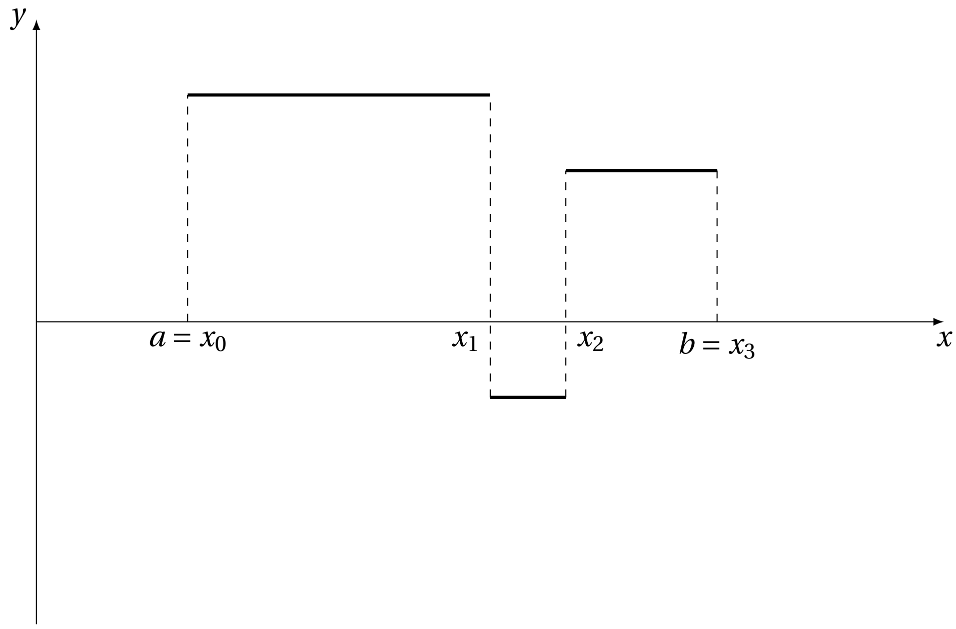
La construction d'une intégrale, suivant les idées de Riemann (XIXème siècle) est intéressante en soi, mais on ne sera pas interrogé sur ce sujet aux concours. Il faut quand même savoir ce qu'est une fonction en escalier, savoir qu'une fonction continue par morceaux sur un segment peut s'approcher uniformément par des fonctions en escalier sur un segment, et bien sûr connaître les propriétés de l'intégrale.

Dans cette partie, sans qu'on le rappelle systématiquement, les fonctions sont toutes à valeurs réelles.

I.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

a. Fonction en escalier

Une fonction ϕ est dite en escalier sur le segment $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ du segment $[a,b]$ (ce qui signifie $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$) telle que la restriction de ϕ à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit constante. Une telle subdivision est parfois dite subordonnée (ou adaptée) à ϕ. Elle n'est pas unique : si on rajoute des points à une subdivision subordonnée, on obtient une autre subdivision subordonnée. On peut bien sûr avoir l'idée d'une subdivision « minimale », mais ce n'est pas très utile, on n'insiste pas.



Assez souvent, l'utilisation que l'on fait d'une fonction en escalier rend inutile la connaissance de ses valeurs en les points de discontinuité. On remarquera que sur le dessin ci-dessus, il n'est pas très facile de deviner quelle peut être la valeur de la fonction en les x_i. Cela n'a pas d'importance.

b. Stabilité, structure

Proposition Une combinaison linéaire de fonctions en escalier sur un segment en est une : si f et g sont en escalier sur $[a,b]$, si $(\alpha,\beta)\in\mathbf{R}^2$, $\alpha f+\beta g$ est en escalier sur $[a,b]$.

Un produit de fonctions en escalier sur $[a,b]$ est en escalier sur $[a,b]$.

Traduction L'ensemble $\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs réelles, muni des opérations « évidentes », est une $\mathbf{R}$-algèbre.

Un point de rédaction Si on veut démontrer les propriétés de stabilité, on voit bien qu'on a besoin, étant données deux fonctions en escalier, de définir une subdivision qui soit adaptée aux deux fonctions. Ce n'est pas compliqué à rédiger si on utilise la réunion ensembliste :

Soit $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f $(a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)$, et $(y_j)_{0\leq i\leq p}$ $(a = y_0 < y_1 < \cdots < y_p = b)$ une subdivision adaptée à g. On considère l'ensemble

$$A = \{x_0, \ldots, x_n\} \cup \{y_0, \ldots, y_p\}$$

qui est un ensemble fini de points de $[a, b]$ contenant a et b. On peut donc écrire

$$A = \{z_0, \ldots, z_q\}$$

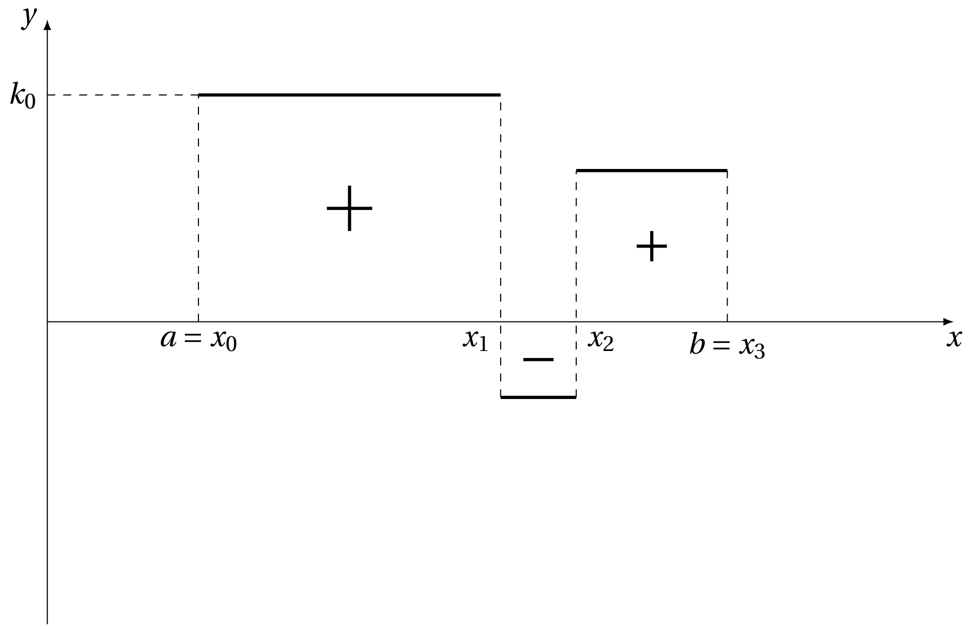
où $a = z_0 < z_1 < \cdots < z_q = b$; alors la subdivision $(z_i)_{0\leq i\leq q}$ « contient » chacune des subdivisions $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(y_j)_{0\leq i\leq p}$ (en fait, c'est l'ensemble $\{z_i\ ;\ 0 \leq i \leq q\}$ qui contient chacun des ensembles $\{x_i\ ;\ 0 \leq i \leq n\}$ et $\{y_i\ ;\ 0 \leq i \leq p\}$, mais l'abus de langage est ici tolérable). On dit parfois que la subdivision $(z_i)_{0\leq i\leq q}$ est plus fine que les subdivisions $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $(y_j)_{0\leq i\leq p}$. Elle est donc adaptée à la fois à f et à g.

c. Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier

Soit ϕ une fonction en escalier sur $[a, b]$, $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée. Des considérations simples d'aire « algébrique » (contrairement à l'aire géométrique, qui correspond à la notion d'aire habituelle, l'aire algébrique a un signe) conduisent à définir, avec les notations ci-dessus (on suppose $a < b$) :

$$\int_{[a,b]} \phi = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) k_i$$

où k_i désigne la valeur constante prise par ϕ sur $]x_i, x_{i+1}[$.
Cette définition n'a un sens que si l'on vérifie que toute subdivision subordonnée à ϕ donne la même définition de la valeur de $\int_{[a,b]} \phi$, ce qui se fait simplement en considérant, étant données deux subdivisions de $[a, b]$, la subdivision constituée par la réunion des points de ces deux subdivisions.



d. Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier

Linéarité Si ϕ, ψ sont en escalier sur $[a,b]$, alors $\lambda\phi+\mu\psi$ l'est aussi (λ, μ réels) et

$$\int_{[a,b]} \lambda\phi+\mu\psi = \lambda\int_{[a,b]}\phi+\mu\int_{[a,b]}\psi$$

Positivité Si $\phi \geq 0$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_{[a,b]}\phi \geq 0$$

En combinant les deux propriétés, on obtient

$$\left|\int_{[a,b]}\phi\right| \leq \int_{[a,b]}|\phi|$$

(intéressant à montrer, car c'est un schéma qu'on rencontre de temps à autre) et, également :

$$\left(\phi \leq \psi \text{ sur } [a,b]\right) \Longrightarrow \left(\int_{[a,b]}\phi \leq \int_{[a,b]}\psi\right)$$

que l'on appelle parfois la croissance de l'intégrale.

I.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

a. Fonction continue par morceaux sur un segment

Définition

On dit que l'application f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ du segment $[a,b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit la restriction à cet intervalle ouvert d'une fonction f_i continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$.

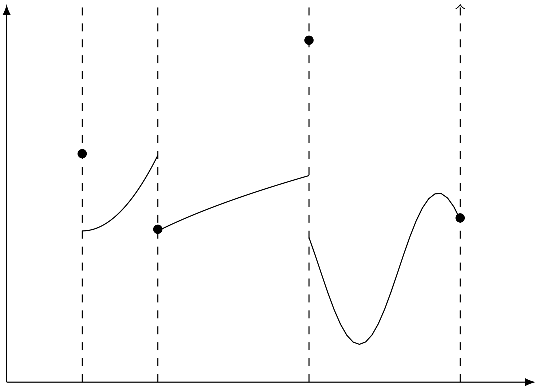
Définition On dit que l'application f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ lorsqu'elle est continue sur $[a,b]$ sauf en un nombre fini de points, en lesquels elle admet une limite à gauche et une limite à droite (« strictes »). Autrement dit lorsqu'il existe $y_1,\ldots,y_p$ (éventuellement $p=0$, mais alors f est continue) tels que

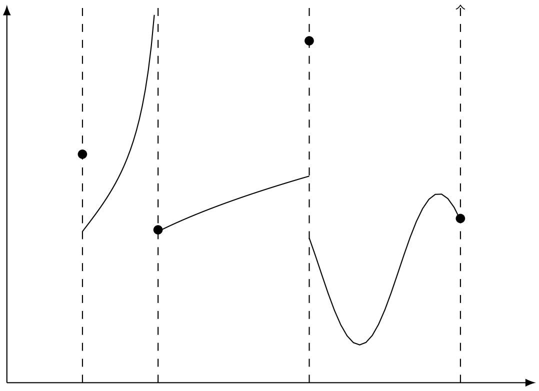
- f est continue sur $[a,b]\setminus\{y_1,\ldots,y_p\}$
- Pour chaque $i\in[\![1,p]\!]$, $\lim\limits_{\substack{x\to y_i\\ x<y_i}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to y_i\\ x>y_i}} f(x)$ existent et sont finies.

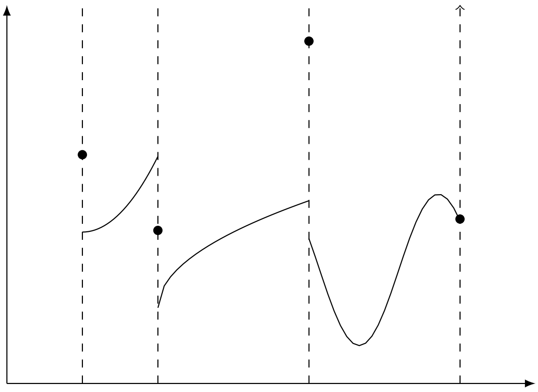
Bien évidemment, dans la deuxième définition, si $y_i=a$ (resp. $y_i=b$) on n'impose que l'existence de $\lim\limits_{\substack{x\to y_i\\ x>y_i}} f(x)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to y_i\\ x<y_i}} f(x)$).

Il importe de voir que le simple fait que la restriction de f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ soit continue ne suffit pas.

Quelques exemples de fonctions continues par morceaux. . . ou pas. . .







b. Approximation par des fonctions en escalier

Proposition

$\mathscr{E}([a,b],\mathbf{R})$ est dense dans $\left(C_{\text{pm}}([a,b],\mathbf{R}),\|.\|_\infty\right)$

Traduction

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier.

Corollaire Si f est continue par morceaux sur le segment $[a,b]$, à valeurs réelles, alors pour tout réel strictement positif ϵ, il existe deux fonctions en escalier ϕ et ψ sur $[a,b]$ telles que :

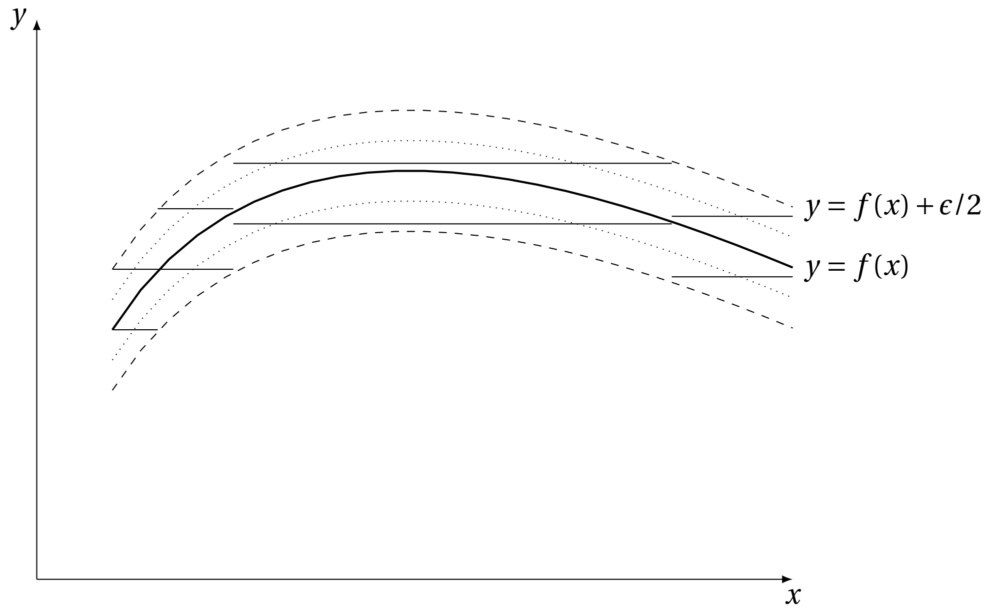
$$\phi \leq f \leq \psi \quad \text{et} \quad \psi - \phi \leq \epsilon$$

L'idée pour passer de la proposition au corollaire est graphique et intéressante : il suffit d'approcher $f + \dfrac{\widetilde{\epsilon}}{4}$ uniformément à $\epsilon/4$ près, on obtient ψ telle que

$$f \leq \psi \leq f + \frac{\widetilde{\epsilon}}{2}$$

puis on prend $\phi = \psi - \dfrac{\widetilde{\epsilon}}{2}$.

La densité des fonctions en escalier dans les fonctions continues par morceaux reste vraie pour les fonctions à valeurs complexes ou vectorielles (il suffit d'ailleurs de passer par les fonctions composantes dans une base pour le montrer à partir du résultat pour les fonctions réelles). En revanche, le corollaire n'a évidemment de sens que pour des fonctions réelles, à cause de la relation $\leq$.



c. Une définition de l'intégrale

On suppose que f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$.

Notons $\mathscr{I}^-(f)$ l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui minorent f sur $[a, b]$;

$$\mathscr{I}^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \phi \; ; \; \phi \in \mathscr{E}([a,b], \mathbf{R}) \; , \; \phi \leq f \right\}$$

de même, on désigne par $\mathscr{I}^+(f)$ l'ensemble des intégrales des fonctions en escalier qui majorent f sur $[a, b]$:

$$\mathscr{I}^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \phi \; ; \; \psi \in \mathscr{E}([a,b], \mathbf{R}) \; , \; \psi \geq f \right\} .$$

De la propriété d'approximation précédente on déduit que

$$\sup\big(\mathscr{I}^-(f)\big) = \inf\big(\mathscr{I}^+(f)\big)$$

Cette valeur commune est appelée intégrale de f sur $[a, b]$.

Cette définition n'est pas très opérationnelle. Mais on en déduit déjà un résultat intéressant (que l'on reverra dans un cadre un peu plus large) :

Pour toute suite (ϕ_n) de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$, la suite $(\int_{[a,b]}\phi_n)$ converge vers $\int_{[a,b]} f$.

I.3 Propriétés de l'intégrale

Remarque préliminaire : on écrit (très) rarement des $\int_{[a,b]}$, on écrit à peu près tout le temps des $\int_a^b$. Voir paragraphe suivant. Néanmoins, l'intégrale « sur $[a,b]$ » a quelques avantages (et elle est au programme) : par exemple, pour dire que si $f \geq 0$ on a $\int_{[a,b]} f \geq 0$, inutile de supposer $a \leq b$...en effet, $[a,b] = [b,a]$. Quand on manipule des intégrales doubles et triples en Physique (elles ne sont pas au programme de math), ce sont des intégrales du type « sur quelque chose », pas « de quelque chose à quelque chose ».

Néanmoins, on peut très bien se contenter de retenir les propriétés pour des intégrales « de ...à ... ». Il suffit alors de sauter ce paragraphe!

Linéarité Si ϕ, ψ sont continues par morceaux sur $[a,b]$, alors $\lambda\phi+\mu\psi$ l'est aussi (λ, μ réels) et

$$\int_{[a,b]} \lambda\phi + \mu\psi = \lambda \int_{[a,b]} \phi + \mu \int_{[a,b]} \psi$$

Positivité Si $\phi \geq 0$ sur $[a,b]$, alors

$$\int_{[a,b]} \phi \geq 0$$

En combinant les deux propriétés, on obtient toujours

$$\left|\int_{[a,b]} \phi\right| \leq \int_{[a,b]} |\phi|$$

(qui restera valable pour des fonctions à valeurs vectorielles) et

$$\left(\phi \leq \psi \text{ sur } [a,b]\right) \Longrightarrow \left(\int_{[a,b]} \phi \leq \int_{[a,b]} \psi\right)$$

que l'on appelle parfois la croissance de l'intégrale et qui, elle, ne peut être vraie que pour des fonctions à valeurs réelles.

Additivité de l'intégrale par rapport à l'intervalle d'intégration : si I et J sont deux segments dont l'intersection est un point (i.e. deux segments « contigus »),

$$\int_{I\cup J} f = \int_I f + \int_J f$$

(cette propriété n'est pas destinée à être mémorisée sous cette forme, on l'englobera dans la relation de Chasles).

Valeur moyenne La valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est

$$m = \frac{1}{b-a}\int_{[a,b]} f$$

L'expression « valeur moyenne » ne figure dans le programme qu'en vue de son utilisation en Physique ou en SI, pas la peine là non plus de faire marcher sa mémoire.

Notons enfin le résultat suivant, très utile :

Proposition : si une fonction continue positive sur un segment (non réduit à un point) a une intégrale nulle sur ce segment, elle est nulle.

Remarque : Il n'est pas difficile de faire un dessin montrant que c'est faux si on suppose la fonction seulement continue par morceaux.

Démonstration Elle est intéressante et repose sur un dessin : supposons f continue, ≥ 0 sur $[a,b]$, non nulle : il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) > 0$. Fixons $\epsilon \in]0, f(c)[$, par exemple $\epsilon = \frac{f(c)}{2}$. Il existe alors $\eta > 0$ tel que

$$\forall x \in [a,b] \qquad |x-c| \leq \eta \implies \left|f(x)-f(c)\right| \leq \frac{f(c)}{2}$$

Et donc

$$\forall x \in [a,b] \qquad |x-c| \leq \eta \implies f(x) \geq \frac{f(c)}{2}$$

La fonction en escalier ϕ qui vaut $\frac{f(c)}{2}$ sur $[a,b]\cap[c-\eta, c+\eta]$ et 0 ailleurs est $\leq f$ et a une intégrale non nulle...

Remarque Et les autres résultats ? les démonstrations se font toujours un peu de la même manière, prenons par exemple la linéarité. On considère deux suites (ϕ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier qui convergent uniformément sur $[a,b]$ vers f et g respectivement. Alors la suite $(\lambda\phi_n + \mu\psi_n)$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$. Mais la linéarité est déjà acquise pour les fonctions en escalier :

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \int_{[a,b]} (\lambda\phi_n + \mu\psi_n) = \lambda \int_{[a,b]} \phi_n \; + \; \mu \int_{[a,b]} \phi_n$$

On n'a plus qu'à passer à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette égalité.

I.4 L'intégrale « avec bornes »

a. Définition

On a jusqu'à présent souvent supposé que le segment $[a,b]$ était écrit « dans le bon sens », c'est-à-dire avec $a < b$. Et comme $[a,b] = [b,a]$, ce n'est pas bien important.

Si maintenant f est continue par morceaux sur $[a,b] = [b,a]$, on définit

$\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f$ si $a < b$,

$\displaystyle\int_a^b f = 0$ si $a = b$,

$\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = -\int_{[a,b]} f$ si $a > b$. Le « dt » est surtout approprié aux changements de variables. Pour l'énumération des propriétés, on peut donc l'oublier un peu.

b. Réécriture des propriétés

Bien noter la présence de quelques « si $a \leq b$ ».

Linéarité Si ϕ, ψ sont continues par morceaux sur $[a,b]$, alors $\lambda\phi + \mu\psi$ l'est aussi (λ, μ réels) et

$$\int_a^b \left(\lambda\phi + \mu\psi\right) = \lambda \int_a^b \phi + \mu \int_a^b \psi$$

Positivité Si $\phi \geq 0$ sur $[a, b]$, et si $a \leq b$, alors

$$\int_a^b \phi \geq 0$$

Corollaire Si $a \leq b$,

$$\left|\int_a^b \phi\right| \leq \int_a^b |\phi|$$

et

$$(\phi \leq \psi \text{ sur } [a,b]) \Longrightarrow \left(\int_a^b \phi \leq \int_a^b \psi\right)$$

Relation de Chasles Si f est continue par morceaux sur un intervalle I, si a, b, c sont dans I, alors

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Proposition : Si f est continue et positive sur $[a, b]$, avec $a < b$, si $\displaystyle\int_a^b f = 0$, alors $f = \widetilde{0}$ sur $[a, b]$.

I.5 Majorer une intégrale

a. Quelques principes

Il faut distinguer deux problèmes : majorer $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ et majorer $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right|$, le second étant rencontré plus fréquemment.

Pour le premier, il faut faire attention à l'ordre des bornes pour que la positivité ne se transforme pas en négativité. En effet, déduire de

$$\forall t \in [a, b] \qquad f(t) \leq g(t)$$

que

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$$

n'est possible que si $a \leq b$. Si $a > b$, pour majorer $\int_a^b f$ il est préférable de commencer par écrire

$$\int_a^b f = -\int_b^a f$$

Pour le second, il faut se méfier des fausses majorations : par exemple,
$\left|\int_a^b f(t)\sin t\ dt\right| \leq \left|\int_a^b f(t)\ dt\right|$.
est tout-à-fait incorrect (essayer par exemple avec $f(t) = \sin t$, $a = 0$, $b = 2\pi$.)

Une majoration correcte serait (si toutefois $a \leq b$, ce qu'on suppose) :
$\left|\int_a^b f(t)\sin t\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,|\sin t|\ dt \ \leq\ \int_a^b |f(t)|\ dt$.

La majoration la plus utilisée, c'est aussi la plus simple :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| \leq |b-a| \times \mathrm{Sup}_{[a,b]}(|f|)$$

(le majorant peut aussi s'écrire $\|f\|_\infty$).

b. Quelques exemples

Exercice : Montrer que la suite des intégrales de Wallis $\left(\int_0^{\pi/2} \sin^n t\ \mathrm{d}t\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

Exercice 2 : On note encore $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t\ \mathrm{d}t$ $(n \geq 0)$.

1. Montrer que $0 \leq I_n \leq 1$.
2. On fixe $\delta \in]0, \pi/2[$. Majorer simplement $J_n = \int_0^\delta \sin^n t\ \mathrm{d}t$ et $K_n = \int_\delta^{\pi/2} \sin^n t\ \mathrm{d}t$ (le premier majorant dépendra de n, le deuxième non).
3. Soit $\epsilon > 0$. Trouver une valeur de δ judicieuse pour pouvoir déduire de la question précédente qu'à partir d'un certain rang N on a $I_n \leq \epsilon$. Conclusion ?

Exercice 3 Montrer, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\sin t\ \mathrm{d}t\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice 4 Montrer, si $x \leq 0$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

et, si $x > 0$,

$$\left|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \, \mathrm{d}t\right| \leq e^x \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exercice 5 (plus difficile, posé à l'oral des Mines, et parfois raffiné pour construire des exercices d'oral X ou ens)

Soit f une fonction continue positive sur $[a, b]$ $(a < b)$. Montrer que

$$\left(\int_a^b f^n(t)\mathrm{d}t\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Sup}_{[a,b]} f$$

II Sommes de Riemann

II.1 Le théorème au programme

Proposition Soit f continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, alors

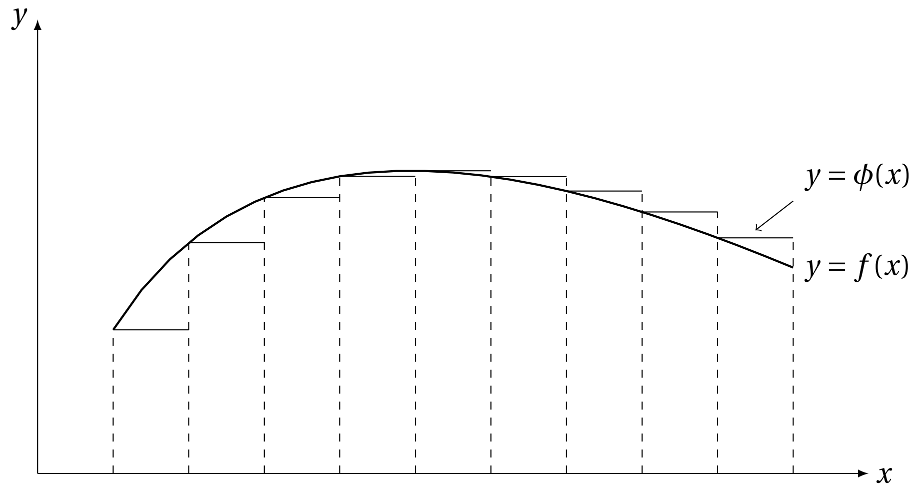
$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Proposition bis Soit f continue par morceaux sur le segment $[0, 1]$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

L'expérience montre qu'il suffit de se souvenir de la proposition bis.

Si on nous demande « que dit le théorème sur les sommes de Riemann », on n'aura pas de mal à répondre, car il dit simplement que l'intégrale de la fonction ϕ_n en escalier ci-dessous tend, quand $n \to +\infty$, vers l'intégrale de la fonction f.



La difficulté est de reconnaître une somme de Riemann lorsqu'il s'en présente une, ce qui n'est pas si fréquent.

Démonstration Le programme impose la démonstration dans le cas où f est de classe C^1. *En fait non, le programme impose la démonstration dans le cas où f est lipschitzienne, mais comme on va le voir cela ne change pas l'écriture de la preuve.*

Il s'agit de montrer

$$\int_a^b f - R_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

où

$$R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Quand on doit examiner la différence entre une intégrale et un nombre, on cherche à écrire ce nombre sous forme d'intégrale. Mais ici, vu l'interprétation graphique, l'intégrale gagne à être coupée en petits morceaux, en observant que $\dfrac{b-a}{n}$ est la longueur du segment $\left[a + k\dfrac{b-a}{n}, a + (k+1)\dfrac{b-a}{n}\right]$:

$$\int_a^b f - R_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_{a+k(b-a)/n}^{a+(k+1)(b-a)/n}\left(f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) - f(t)\right)\mathrm{d}t\right]$$

Or ici, f est de classe C^1, donc, par inégalité des accroissements finis, elle est M-lipschitzienne sur $[a,b]$ avec

$$M = \mathrm{Sup}_{[a,b]}(|f'|)$$

L'inégalité triangulaire nous conduit alors à

$$\left|\int_a^b f - R_n(f)\right| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{a+k(b-a)/n}^{a+(k+1)(b-a)/n} \left(t - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \mathrm{d}t\right]$$

On calcule les intégrales du membre de droite, on arrive à

$$\left|\int_a^b f - R_n(f)\right| \leq M \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{a+k(b-a)/n}^{a+(k+1)(b-a)/n} \left(t - \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \mathrm{d}t\right]$$

$$\left|\int_a^b f - R_n(f)\right| \leq \frac{M}{2} \times n \times \left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

Le majorant converge vers 0, ce qui conclut.

Remarque On a fait la démonstration dans le cas des fonctions lipschitziennes, pas seulement C^1.

Remarque importante Il importe de se rendre compte que le théorème de convergence des sommes de Riemann peut être réécrit sous la forme

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1515}^{n-42} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

On n'ira pas jusqu'à de telles fantaisies, mais on voit qu'on ne sera pas dérangé si $k = 0$ est remplacé par $k = 1$ et/ou $k = n-1$ par $k = n$.

II.2 Utilisation

On ne rencontre pas seulement des sommes de Riemann prêtes à l'emploi :

Exercice 1 Montrer la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

et déterminer sa limite.

Quelquefois il faut bricoler soi-même pour faire apparaître une vraie somme de Riemann :

Exercice 2 Soit $\alpha \geq 0$. Trouver un équivalent simple de

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}$$

Vérifier pour $\alpha = 1$ et $\alpha = 2$ (valeurs pour lesquelles on connaît v_n).

Exercice 3 (Oral Mines) Trouver un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+n^2}$.

Exercice 4 (Oral Centrale) Convergence, limite éventuelle de la suite de terme général

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1-\frac{k}{n}}$$

II.3 Un cadre plus général

Utile pour X-ens, éventuellement. L'argument de lipschitziannité est remplacé par la convergence uniforme.

On désigne par f une fonction continue sur le segment $[a,b]$ $(a < b)$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. Soit $\sigma = (x_0, \ldots, x_n)$ une subdivision du segment $[a,b]$. On appelle somme de Riemann associée à f et à σ toute somme qui peut s'écrire sous la forme :

$$R_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i)$$

où, pour tout i, ξ_i est élément de l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Les sommes de Riemann "tendent vers l'intégrale de f lorsque le pas de la subdivision tend vers 0", c'est-à-dire que pour tout nombre réel strictement positif ϵ, il existe un réel strictement positif δ tel que, pour toute subdivision σ de pas inférieur ou égal à δ,

$$\left| \int_{[a,b]} f - R_\sigma(f) \right| \leq \epsilon$$

où le pas de σ est $\max\limits_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i)$.

Pour le voir, il est judicieux d'interpréter $R_\sigma(f)$ comme intégrale d'une fonction en escalier sur $[a,b]$:

$$R_\sigma(f) = \int_a^b h$$

où h est la fonction en escalier constante et égale à $f(\xi_i)$ sur $]x_i, x_{i+1}[$ pour tout $i \in [0, n-1]$. Alors

$$\int_{[a,b]} f - R_\sigma(f) \ = \ \sum_{i=0}^{n-1} \left(\int_{[x_i, x_{i+1}]} (f - h) \right)$$

Soit $\epsilon > 0$. Par continuité uniforme de f sur $[a,b]$, soit $\eta > 0$ tel que, pour tous x, y dans $[a,b]$,

$$|y - x| \leq \eta \implies |f(y) - f(x)| \leq \epsilon$$

Si $\delta(\sigma) \leq \eta$, alors, pour tout $i \in [0, n-1]$, pour tout $t \in]x_i, x_{i+1}[$, on a

$$|f(t) - h(t)| \leq |f(t) - f(\xi_i)| \leq \epsilon$$

(car $|t-\xi_i| \leq |x_{i+1}-x_i| \leq \delta(\sigma) \leq \eta$). On peut donc majorer :

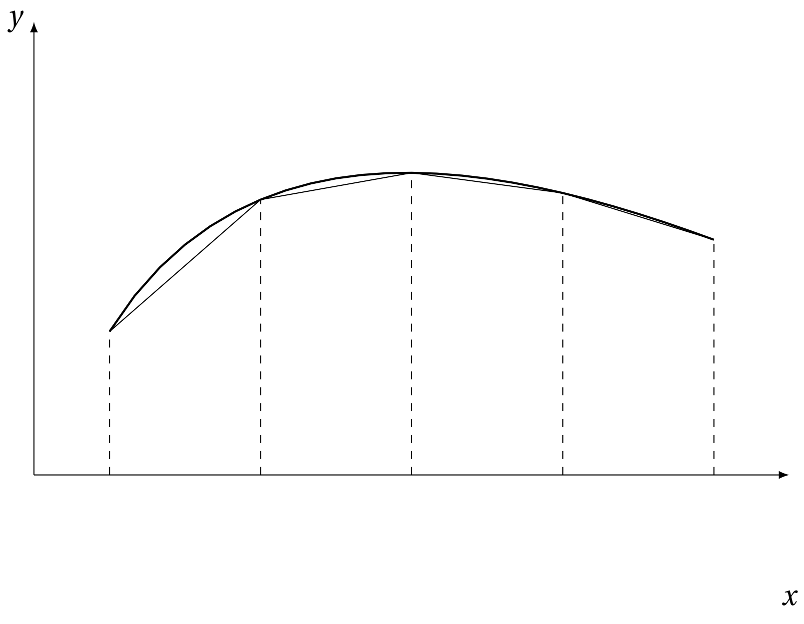
$$\left|\int_{[a,b]} f - R_\sigma(f)\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} \epsilon(x_{i+1}-x_i) = \epsilon(b-a)$$

ce qui démontre bien le résultat annoncé. Pour les fonctions qui ne sont que continues par morceaux, on raffine un petit peu.

III Calcul approché d'une intégrale

Ces chose ne figurent plus au programme de mpsi. Du hors-programme « touristique », donc, dont la compréhension ne demande pas un effort insurmontable : c'est assez graphique. Les formules d'erreur sont évidemment encore plus hors-programme.

III.1 Calcul approché par la méthode des trapèzes



Le principe est simple : on considère une subdivision régulière $(x_0,\ldots,x_n)$ de $[a,b]$ (donc $x_i = a+i(b-a)/n$), et on prend pour valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a,b]$ l'intégrale $I_n(f)$ de la fonction obtenue en remplaçant f sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ par la fonction affine qui coïncide avec f en x_i et en x_{i+1}. Comme on sait calculer l'aire (algébrique ici : comptée avec un signe − si on est en-dessous de l'axe des abscisses) d'un trapèze, on trouve :

$$I_n(f) = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=0}^{n-1} \left[f(x_i) + f(x_{i+1}) \right] .$$

Si ϕ est la fonction affine qui coïncide avec f en α et β, et si f est de classe C^2, on peut majorer, pour tout élément t de $[\alpha, \beta]$:

$$\left| f(t) - \phi(t) \right| \leq \frac{(t-\alpha)(\beta - t)}{2} M_2(f) \quad \text{où} \quad M_2(f) = \sup_{[\alpha,\beta]}(|f''|)$$

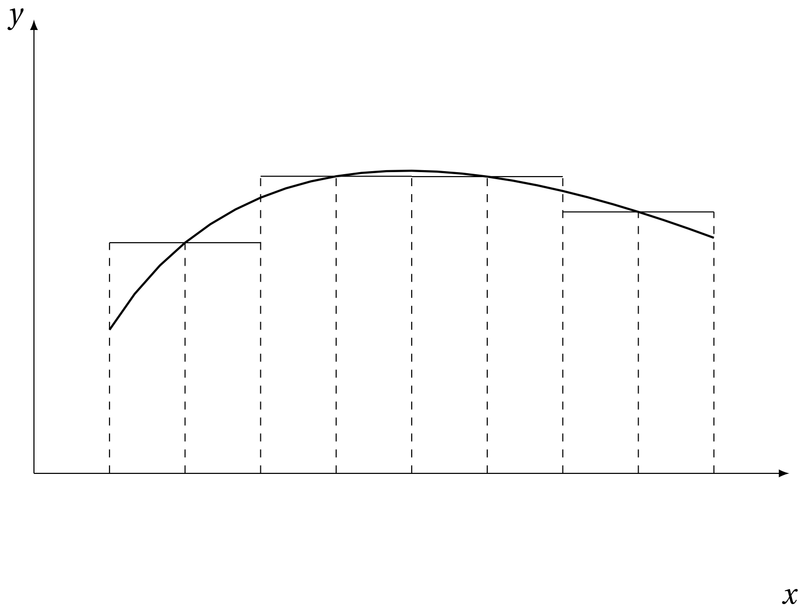
ce qui se montre en utilisant le théorème de Rolle. On en déduit une majoration de l'erreur :

$$\left| \int_a^b f(t)dt - I_n(f) \right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2(f) .$$

(*N.B. : les formules sont hors programme*)

III.2 Calcul approché par les méthodes des rectangles

A priori, il y a trois méthodes, celle des rectangles « à gauche », celle des rectangles « à droite » et celle des rectangles « médians ». C'est cette dernière qui est illustrée ci-dessous.



On considère une subdivision régulière $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ (donc $x_i = a + i(b-a)/n$), et on prend pour valeur approchée de l'intégrale de f sur $[a, b]$ l'intégrale $I_n(f)$ de la fonction obtenue en remplaçant f sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ par la fonction constante qui vaut $f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$ sur ce segment. Comme on sait calculer l'aire (algébrique) d'un rectangle encore mieux que celle d'un trapèze, on trouve :

$$I_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) .$$

Cette méthode des rectangles « médians » donne une majoration d'erreur du même ordre que celle des trapèzes, mais en remplaçant le coefficient 12 par un coefficient 24.

IV Intégration des fonctions à valeurs complexes

Une fonction ϕ en escalier sur le segment $J = [a, b]$, à valeurs dans **C**, est une fonction telle qu'il existe une subdivision $(a_1, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ et une famille $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ d'éléments de **C** telle que, sur chaque intervalle ouvert $]a_i, a_{i+1}[$, ϕ soit constante et égale à v_i. On définit alors l'intégrale de f sur J :

$$\int_J \phi = \int_{[a,b]} \phi = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i)\, v_i\ .$$

C'est un élément de **C**.
La linéarité subsiste.
La positivité n'a aucun sens, mais l'inégalité triangulaire donne la très importante inégalité :

$$\left|\int_J \phi\right| \leq \int_J |\phi|\,.$$

Si f est continue par morceaux sur $[a, b]$, à valeurs dans **C**, elle est limite uniforme sur $[a, b]$ d'une suite (ϕ_n) de fonctions en escalier. On peut avoir l'idée de définir

$$\int_{[a,b]} f \ = \ \lim_{n\to+\infty} \left(\int_{[a,b]} \phi_n\right)$$

mais cela demande de vérifier que cette limite existe (pas très évident) et indépendante de la suite choisie (i.e. si (ψ_n) est une autre suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$, $\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{[a,b]} \phi_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\int_{[a,b]} \psi_n\right)$).
Ce qui n'est pas très difficile.
Il y a évidemment une idée plus bête, qui est de définir

$$\int_{[a,b]} f \ = \ \int_{[a,b]} \mathrm{Re(f)} \ + \ i \int_{[a,b]} \mathrm{Im(f)}$$

Et évidemment cela donne la même intégrale. Les propriétés à retenir étant

Partie réelle, partie imaginaire $\int_a^b f \ = \ \int_a^b \mathrm{Re(f)} \ + \ i \int_a^b \mathrm{Im(f)}$ (mais on ne s'en sert pas si souvent que ça, en tout cas pas systématiquement!)

Linéarité Si ϕ, ψ sont continues par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs complexes, alors $\lambda\phi + \mu\psi$ l'est aussi (λ, μ réels) et

$$\int_a^b \left(\lambda\phi + \mu\psi\right) = \lambda \int_a^b \phi + \mu \int_a^b \psi$$

Inégalité du module Si $a \leq b$, si f est à valeurs complexes,

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

Relation de Chasles Si f est continue par morceaux sur un intervalle I, à valeurs complexes, si a, b, c sont dans I, alors

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$$

Table des matières

I Intégration des fonctions à valeurs réelles **2**

I.1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment 2

a. Fonction en escalier 2

b. Stabilité, structure 3

c. Définition de l'intégrale d'une fonction en escalier 4

d. Propriétés de l'intégrale d'une fonction en escalier 5

I.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . 6

a. Fonction continue par morceaux sur un segment 6

b. Approximation par des fonctions en escalier 8

c. Une définition de l'intégrale 9

I.3 Propriétés de l'intégrale 10

I.4 L'intégrale « avec bornes » 12

a. Définition 12

b. Réécriture des propriétés 12

I.5 Majorer une intégrale 13

a. Quelques principes 13

b. Quelques exemples 14

II Sommes de Riemann **15**

II.1 Le théorème au programme 15

II.2 Utilisation 18

II.3 Un cadre plus général 19

III Calcul approché d'une intégrale **20**

III.1 Calcul approché par la méthode des trapèzes 20

III.2 Calcul approché par les méthodes des rectangles 21

IV Intégration des fonctions à valeurs complexes **23**