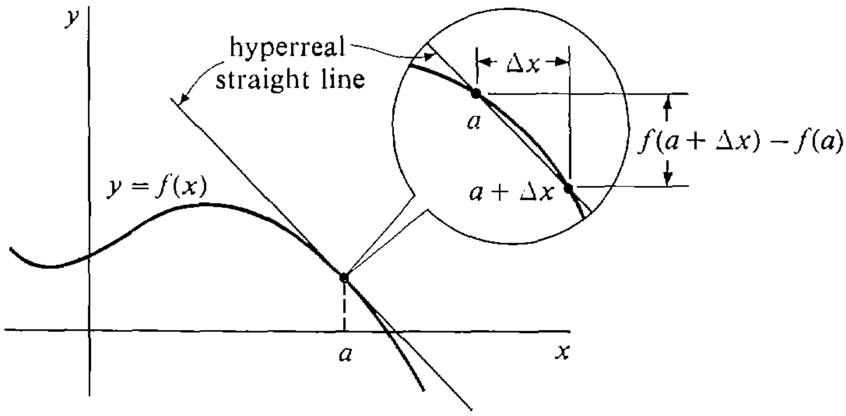
C3 : Dérivation des fonctions numériques



Définition de la dérivée en Analyse Non Standard (extrait de H. Jerome Keisler, Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach)

Le contenu de ce chapitre, principalement de révision, sera étendu (pour ce qui peut l'être) aux fonctions vectorielles dans un futur chapitre C 3,1.

On ne considèrera dans ce chapitre que des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ non réduit à un point, et à valeurs réelles ou complexes. Dans tout le chapitre, lorsque ce n'est pas précisé, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$.

I Définitions de la dérivée

I.1 Dérivée en un point : taux d'accroissement

Définition par taux d'accroissement Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{K}$ définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$ non réduit à un point, et à valeurs réelles ou complexes.
Sur $I \setminus \{a\}$ on définit la fonction

$$g : x \longmapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

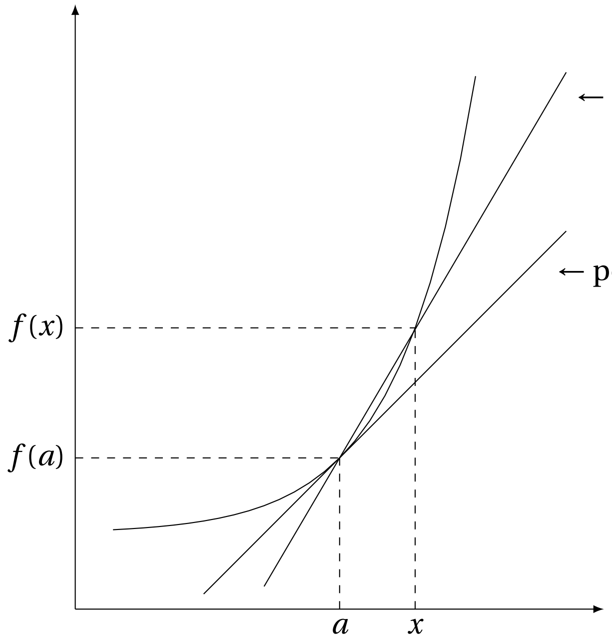
($g(x)$ est le taux d'accroissement de f entre a et x, ou entre x et a, c'est la même chose).
On dit que f est dérivable en a lorsque g admet une limite en a. Cette limite est alors appelée dérivée de f en a, et est notée $f'(a)$.

Tangente ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$) Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable en $a \in I$. La tangente au graphe de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point $\big(a, f(a)\big)$ et de coefficient directeur $f'(a)$. Elle a donc pour équation :

Remarque Ici, il faut comprendre « lorsque g admet une limite » dans le sens « lorsque g admet une limite finie ». La question se pose uniquement dans le cas réel. Rappelons qu'on dit qu'une suite converge pour signifier qu'elle a une limite finie, mais qu'on ne dit pas qu'une fonction converge.

Remarque On peut aussi appeler $f'(a)$ « nombre dérivé » de f en a. C'est quand même un peu désuet.

Il est bien entendu nécessaire d'en connaître l'interprétation graphique (valable seulement si **K**=**R**) : la pente de la tangente est limite des pentes des cordes. On appelle « corde » une droite joignant deux points sur le graphe de f.



Dérivée à gauche, à droite On reprend les notations précédentes. Lorsque

$$g(x) \xrightarrow[x\to a,\ x>a]{} \ell \in \mathbf{K}$$

on dit que f est dérivable à droite en a, et la dérivée de f en a à droite est $f'_d(a) = \ell$.

Lorsque

$$g(x) \xrightarrow[x\to a,\ x<a]{} \ell \in \mathbf{K}$$

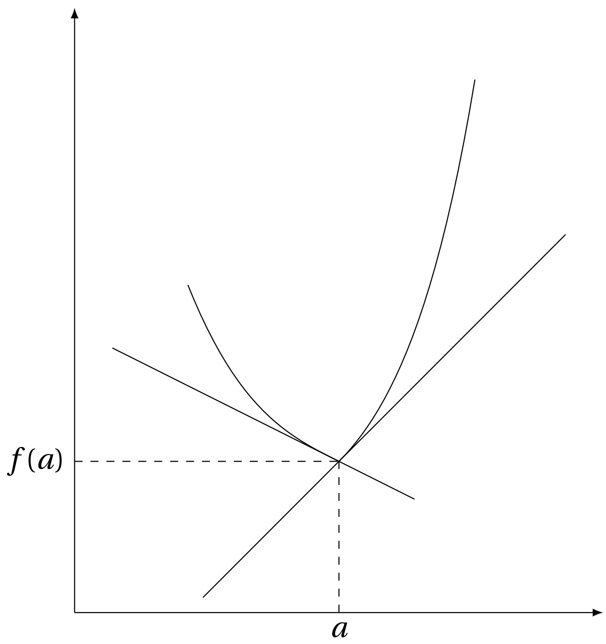
on dit que f est dérivable à gauche en a, et la dérivée de f en a à gauche est $f'_g(a) = \ell$.

f est dérivable en a si et seulement si elle l'est à gauche et à droite, avec égalité des dérivées à gauche et à droite.

Demi-tangentes (si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$) Si f est dérivable à droite en a, on peut définir la demi-tangente à droite en a au graphe de f. C'est la demi-droite d'équation

$$y - f(a) = f'_d(a)(x-a) \qquad , \; x \geq a$$

On devinera dans quelles conditions et comment il est possible de définir une demi-tangente à gauche.



I.2 Dérivée en un point : développement limité

Définition On dit que f est dérivable en a si et seulement si il existe un réel ℓ tel que, au voisinage de 0 :

$$f(a+h) = f(a) \ + \ h\ell \ + \ \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

ce qui équivaut à dire, au voisinage de a :

$$f(x) = f(a) \ + \ (x-a)\ell \ + \ \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)$$

et, bien sûr, on définit $\ell = f'(a)$.

Equivalence avec la première définition Rappelons la définition, valable si ψ ne s'annule pas au voisinage de a (sauf éventuellement en a) :

$$\phi(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\big(\psi(x)\big) \iff \frac{\phi(x)}{\psi(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Alors on réécrit la limite avec un o :

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \ell + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(1)\\ &\iff f(x)-f(a) = \ell(x-a) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}(x-a)\end{aligned}$$

Remarque Ces deux définitions équivalentes de la dérivée (par les taux d'accroissement et par les développements limités) sont aussi utiles l'une que l'autre.

Remarque L'existence d'une dérivée en a est donc équivalente à l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en a. Mais on ne doit pas généraliser imprudemment : une fonction peut avoir un développement limité à l'ordre 2 en a sans avoir une dérivée seconde en ce point (voir chapitre intégration et dérivation, où l'on construit un exemple en s'aidant de la fonction $x \mapsto \exp(1/x^2)$).

I.3 Dérivabilité et continuité

Proposition si f est dérivable en a, f est continue en a.

C'est peu dire que la réciproque est fausse ; la recherche d'une fonction continue qui ne soit dérivable en aucun point a été un grand « challenge » mathématique au XIX[e] siècle. Bolzano en a défini une, Weierstrass en a trouvé toute une famille.

I.4 Fonction dérivée

On dit que f est dérivable sur I lorsque f est dérivable en tout point de I. On définit alors sa fonction dérivée : $f' : x \mapsto f'(x)$. On a aussi droit à la notation $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$. *Retour dans le programme de cette notation bien commode !*

I.5 Parties réelle et imaginaire

Soit f $I \longrightarrow \mathbf{C}$. On définit bien sûr

$$\mathrm{Re}(f)\ :\ x \longmapsto \mathrm{Re}\big(f(x)\big)$$

et $\mathrm{Im}(f)$ de même.

Proposition Soit f $I \longrightarrow \mathbf{C}$. Alors f est dérivable en a si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont, et si c'est le cas,

$$f'(a) = \big(\mathrm{Re}(f)\big)'(a) + i\ \big(\mathrm{Im}(f)\big)'(a)$$

Autrement dit, la partie réelle (respectivement imaginaire) de la dérivée est la dérivée de la partie réelle (respectivement imaginaire).

Démonstration Reprenant

$$g\ :\ x \longmapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

on a

$$\forall x \in I\setminus\{a\} \qquad g(x) = \frac{\big(\mathrm{Re}(f)\big)(x) - \big(\mathrm{Re}(f)\big)(a)}{x-a} + i\frac{\big(\mathrm{Im}(f)\big)(x) - \big(\mathrm{Im}(f)\big)(a)}{x-a}$$

Il suffit alors de se rappeler du résultat sur les limites d'une fonction complexe : g a une limite en a si et seulement si $\mathrm{Re}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ en ont une.Et le cas échéant, la limite de la partie réelle (resp. imaginaire) est la partie réelle (resp. imaginaire) de la limite.

I.6 Une dérivée à connaître...et à utiliser !

Proposition Soit $a \in \mathbf{C}$ quelconque. L'application

$$e_a : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & e^{at} \end{array}$$

a pour dérivée

$$e'_a : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ t & \longmapsto & ae^{at} \end{array}$$

Autrement dit,

$$e'_a = ae_a$$

Surtout ne pas repasser par sinus et cosinus ! Il est d'une manière générale maladroit de représenter systématiquement un nombre complexe sous la forme partie réelle $+i$ fois partie imaginaire.
Par exemple, on est autorisé à écrire directement

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{it}\right) = ie^{it}$$

et en détaillant partie réelle et partie imaginaire, on retrouve $\sin'$ et $\cos'$.

La démonstration du résultat peut s'écrire facilement en décomposant

$$a = \alpha + i\beta$$

et en utilisant les dérivées de cos, sin et exp. Comme ce n'est pas particulièrement élégant, on attendra les séries entières pour avoir une démonstration plus satisfaisante.

II Le théorème de Rolle

Il importe de se souvenir que le théorème de Rolle est réservé aux fonctions à valeurs réelles. Si on parle d'extremum d'une fonction, cela suppose qu'il y ait une relation d'ordre sur son ensemble d'arrivée. Le théorème de Rolle et ses conséquences ne se généralise pas aux fonctions à valeurs complexes ou vectorielles.

II.1 Extremum local, condition nécessaire

Définition Soit I un intervalle, $a \in I$. On dit que $f : I \to \mathbf{R}$ atteint un maximum (local) en a lorsqu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I \cap [a-\delta, a+\delta] \qquad f(x) \leq f(a)$$

On définit de même un minimum local, et on parle d'extremum local lorsqu'il y a un minimum ou un maximum local.

Vocabulaire Lorsque f atteint un maximum en a, ce maximum est $f(a)$. Ne pas confondre le maximum ($f(a)$) et là où il est atteint (a, mais il peut aussi être atteint ailleurs, penser par exemple à une fonction constante).

Vocabulaire Si on a

$$\forall x \in I \qquad f(x) \leq f(a)$$

alors f atteint un maximum global, ou absolu, en a.

Proposition : Si f admet un extremum local en un point intérieur à I, et si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Démonstration Considérer le signe des taux d'accroissement entre a et x pour $x < a$ et pour $x > a$. On voit bien l'utilité de l'hypothèse « a intérieur à I », c'est-à-dire que a n'est pas une extrémité de I. On voit facilement que si f atteint un extremum local en a, si a est une borne de I, f peut être dérivable en a sans que l'on ait $f'(a) = 0$.

Point critique On dit parfois que a est un point critique pour f lorsque f est dérivable en a et $f'(a) = 0$, mais c'est surtout un vocabulaire utilisé pour les fonctions de plusieurs variables. Si f atteint un extremum local en a intérieur à I, si f est dérivable en a, alors $f'(a) = 0$.

Réciproque fausse …bien évidemment !

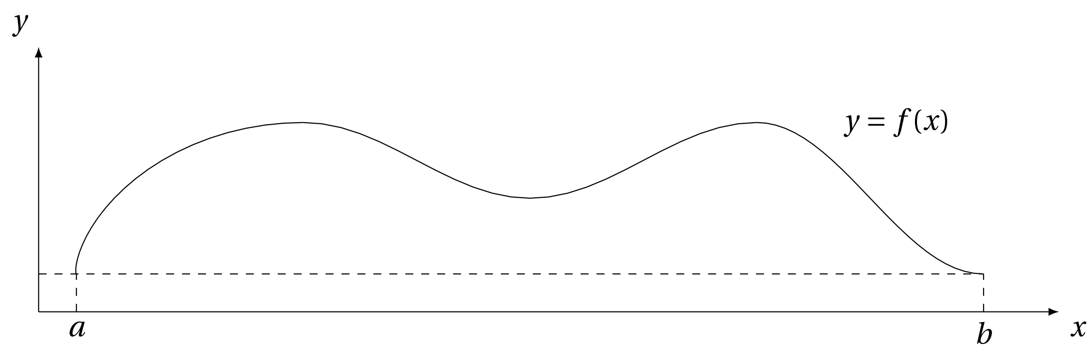
II.2 Théorème de Rolle

Théorème :

On suppose $a \neq b$. Si f est continue sur $[a, b]$, à valeurs réelles, dérivable sur $]a, b[$, et si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration La fonction f, continue sur le segment $[a, b]$, est bornée et atteint ses bornes. Si f est constante, alors $f'(c) = 0$ pour tout $c \in]a, b[$.

Sinon, il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) \neq f(a)$. Quitte à remplacer f par $-f$ (ce qui ne change rien aux hypothèses et conclusions du théorème) on peut supposer $f(x) > f(a)$. Soit c tel que f attteigne son maximum en c. On ne peut avoir $c = a$ ni $c = b$, donc c est intérieur à $[a, b]$ (i.e. $c \in]a, b[$), et $f'(c) = 0$, ce qui conclut.



Insistons encore : ce théorème important n'est valable que pour des fonctions à valeurs réelles.

Le théorème de Rolle est graphiquement simple à illustrer (voir ci-dessus!) ; il a aussi une interprétation cinématique (promenade sur un axe, aves même point de départ et d'arrivée) ; celle-ci aide à trouver un exemple montrant que le théorème de Rolle ne s'étend pas aux fonctions à valeurs complexes.
[Si $f : [a,b] \to \mathbf{C}$ continue, dérivable sur $]a,b[$ est telle que $f(a) = f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$. Pourquoi cela ne permet-il pas de généraliser le théorème de Rolle aux fonctions complexes ?]

II.3 Parenthèse : le théorème de Darboux

Il est peu probable que la démonstration du théorème de Rolle soit demandée à un Ecrit ou un Oral de concours. Mais on retrouve des idées de la démonstration lorsqu'on essaye de prouver le célèbre, mais complètement hors-programme

Théorème (Darboux) Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable, où I est un intervalle. Alors $f'(I)$ est un intervalle.

Autre formulation Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable, où I est un intervalle. Alors f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Ce théorème, posé ces derniers temps à l'oral (Mines, X par exemple), n'est pas trop difficile à prouver (plusieurs méthodes possibles), mais ce n'est pas forcément évident d'avoir les bonnes idées (surtout à l'oral, surtout sans préparation). Voici, justement, plusieurs idées :
Première étape L'énoncé peut être rédigé de la manière plus concrète suivante : si f est dérivable sur $[a,b]$, si $\gamma \in [f'(a), f'(b)]$, il existe $c \in [a,b]$ tel que $f'(c) = \gamma$.
Explication : Montrer que $f'(I)$ est un intervalle, c'est montrer que $f'(I)$ est convexe (voir S1), c'est montrer que

$$\forall (\alpha,\beta) \in f'(I)^2 \qquad [\alpha,\beta] \subset f'(I)$$

ou encore que

$$\forall (\alpha,\beta) \in f'(I)^2 \quad \forall \gamma \in [\alpha,\beta] \qquad \gamma \in f'(I)$$

ou encore que

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall \gamma \in [f'(a), f'(b)] \qquad \gamma \in f'(I)$$

ou encore que

$$\forall (a,b) \in I^2 \quad \forall \gamma \in [f'(a), f'(b)] \quad \exists c \in I \qquad \gamma = f'(c)$$

et bien sûr, si le théorème est vrai, on peut trouver c dans $[a,b]$, on ne voit pas très bien comment on le trouverait ailleurs que dans $[a,b]$ (il se pourrait fort bien que cet ailleurs n'existe pas, rien n'empêche d'avoir $I = [a,b]$).

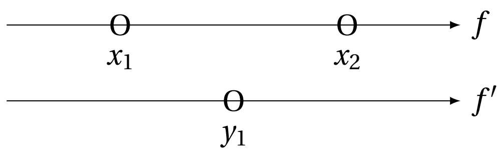
Deuxième étape : on s'inspire du théorème de Rolle On se souvient que le théorème de Rolle aboutit à une conclusion du même type que le théorème de Darboux, mais pour $\gamma = 0$, et à partir d'une hypothèse différente. Or il n'est pas très difficile de se ramener à $\gamma = 0$, il suffit de remplacer f par

$$g \; : \; t \longmapsto$$

(pour avoir $f'(c) = \gamma \iff g'(c) = 0$). Et, si on a bien choisi g (c'est-à-dire le plus simplement possible!), on est ramené à montrer :
Si g est dérivable sur $[a,b]$, si $g'(a)g'(b) \leq 0$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
Or un petit dessin nous persuade que si ce n'est pas le théorème de Rolle, il y a quelques ressemblances.

II.4 Utilisation

Dans de nombreux cas, on utilise le théorème de Rolle plusieurs fois. Il est alors commode (surtout à l'oral, où cela peut suffire, mais aussi à l"écrit, où cela sert de support à la démonstration) de représenter les points d'annulation de la dérivée sur un axe réel. Ainsi, le schéma



se lira
« on a deux zéros de f, $x_1 < x_2$, alors il existe $y_1 \in [x_1, x_2[$ tel que $f'(y_1) = 0$. »

Le théorème de Rolle donne l'existence d'un point d'annulation de la dérivée, pas son unicité. Attention donc à ne pas laisser penser, quand on rédige une application du théorème, que l'on croit à cette unicité.

a. Polynômes

Exercice

1. Montrer que si P (de degré ≥ 2) est un polynôme scindé à racines simples de $\mathbf{R}[X]$, alors P' est aussi scindé à racines simples. Montrer par un exemple que ce résultat est faux sur $\mathbf{C}.[X]$.
2. Montrer que si P est un polynôme scindé de $\mathbf{R}[X]$, alors P' est aussi scindé. (Ce résultat est en revanche vrai sur $\mathbf{C}[X]$, mais...).

b. Polynômes (bis)

Exercice Montrer que le polynôme $\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)}$ est scindé à racines simples sur **R**.

c. Débordant un peu...

Exercice Montrer que pour $n \in \mathbf{N}_*$, $\text{Arctan}^{(n)}$ est de la forme

$$x \longmapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

où, si $n \geq 2$, P_n est scindé sur **R**, à racines simples.

d. Autres applications classiques

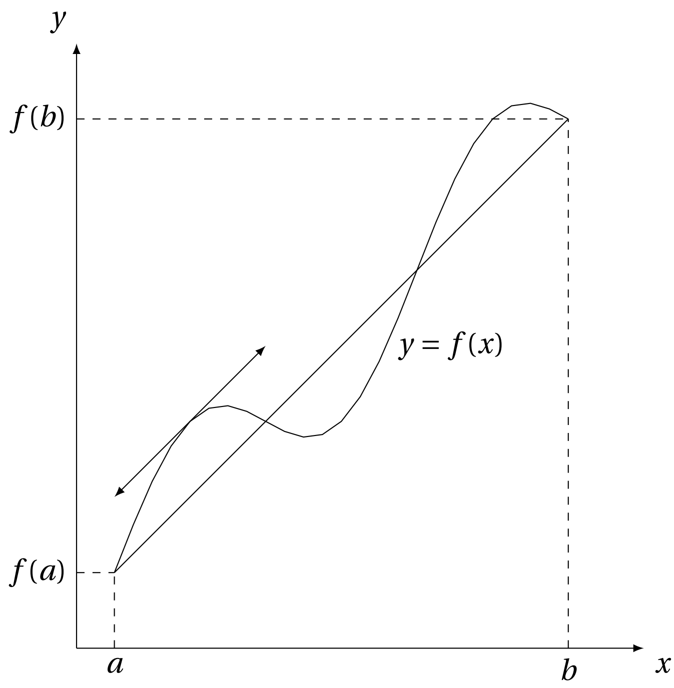
Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange, etc... : voir exercices!

II.5 Egalité (ou formule) des accroissements finis

a. La formule

Proposition : Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, à valeurs dans **R**, il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



Démonstration Là aussi, elle ne sera pas demandée aux concours, mais là aussi elle est intéressante. Au moins deux idées sont envisageables, guidées par le dessin qui montre que nous devons démontrer un « théorème de Rolle penché ».

Idée 1 : Transformer légèrement f pour construire une fonction g qui prenne même valeur en a et b, espérer que ça nous permettra de conclure.

Au hasard, définissons donc

$$g : x \mapsto f(x)(\pm)\ldots\ldots$$

Idée 2 : Transformer légèrement f pour construire une fonction g telle que la conclusion $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ s'écrive $g'(c) = 0$. Et pour cela, définissons simplement

$$g : x \mapsto f(x)(\pm)\ldots\ldots$$

(La première idée est de se ramener aux hypothèses du théorème de Rolle, la deuxième idée est de se ramener à sa conclusion).

La formule des accroissements finis, qui, comme le théorème de Rolle, admet une interprétation graphique simple (et également cinématique), n'est valable que pour les fonctions à valeurs réelles. Ne pas la confondre avec l'inégalité des accroissements finis, beaucoup plus générale, beaucoup plus importante. Cette formule des accroissements finis sert assez rarement dans les exercices et problèmes.

b. Une « petite » inégalité d'accroissements finis. . .et la grande

Proposition Si f est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, à valeurs réelles, et si, sur $]a,b[$,
$m \leq f' \leq M$, alors, en supposant de plus $a<b$,

$$m(b-a) \leq f(b)-f(a) \leq M(b-a)$$

. . .pas spécifiquement au programme, valable seulement pour des fonctions à valeurs réelles. . .et à ne pas confondre avec la « vraie » inégalité des accroissements finis :

Proposition Si f est de classe C^1 sur $[a,b]$, et si $|f'| \leq k$ sur $[a,b]$, alors

$$\left|f(b)-f(a)\right| \leq k|b-a|$$

(Cette inégalité est beaucoup plus importante, car elle est valable pour les fonctions à valeurs réelles, complexes, vectorielles, bref dans tous les cas. Elle sera d'ailleurs revue.)
Cette inégalité est assez claire : quand on ne va pas vite, on ne va pas loin (du moins dans un temps raisonnable).
Signalons une étourderie commune : remplacer l'hypothèse $|f'| \leq k$ par l'hypothèse $|f| \leq k$. A éviter...

Autre formulation Si f est de classe C^1 sur $[a, b]$, et si $|f'| \leq k$ sur $[a, b]$, alors f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$.

Exercice : Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad |\sin x| \leq |x|$$

Exercice : Démontrer l'inégalité

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad |\ln(1+x)| \leq |x|$$

Exercice : Démontrer la réciproque de l'inégalité des accroissements finis :
Si f est dérivable et k-lipschitzienne sur $[a, b]$, alors $|f'| \leq k$ sur $[a, b]$.

Exercice : (Mines 2009 math 1) Soit a, b deux réels, $a < b$. On définit, si $t \neq 0$,

$$h_{a,b}(t) = \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \quad \text{si} \, t \neq 0 \, , \qquad h_{a,b}(0) = b - a$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad \left|h_{a,b}(t)\right| \leq b - a$$

Exercice : (Oral PLCR 2017) Soient $(a, b) \in \mathbf{R}^2$ avec $a < b$, $f \in C^1([a, b], \mathbf{R})$ telle que $f(a)f(b) < 0$ et $|f| + |f'| > 0$.

1. Montrer que pour $\epsilon > 0$ suffisamment petit, $f^{-1}(]-\epsilon,\epsilon[)$ est une union finie d'intervalles ouverts disjoints.
2. Montrer que $\dfrac{1}{2\epsilon}\displaystyle\int_a^b |f'|\,\mathbf{1}_{|f|<\epsilon} \xrightarrow[\epsilon\to 0]{} \mathrm{Card}\left(f^{-1}(\{0\})\right)$

Exercice : (Oral Lyon 2017) Soit $\beta \in \mathbf{R}_*^+$, f une fonction de classe C^1 de $\mathbf{R}^+$ dans $\mathbf{R}_*^+$ telle que

$$\frac{xf'(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \beta$$

Montre que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$,

$$\frac{f(\lambda x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \lambda^\beta$$

La « vraie » inégalité des accroissements finis sera vue dans le chapitre Dérivation et Intégration. On la démontrera en partant de la formule fondamentale

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

Cette formule est tellement usuelle qu'il arrive qu'on n'utilise pas l'inégalité des accroissements finis mais directement (1).

II.6 Caractérisation de la monotonie, de la stricte monotonie

Ici encore, les fonctions sont à valeurs réelles. Mais c'est à peine utile de le dire, la monotonie a besoin d'une relation d'ordre sur l'ensemble d'arrivée. On vient de dire que la formule des accroissements finis ne servait à rien...ce n'est pas vrai, elle sert ;

Lemme Si f est dérivable sur I à valeurs réelles, f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I.

Démonstration Si f est constante, les taux d'accroissement sont nuls, toute limite de tels taux est donc nulle. Si $f' = 0$, on peut appliquer la formule des accroissements finis. Notons quand même que la « vraie » inégalité des accroissements finis conclut très bien : ce réultat est encore valable pour les fonctions à valeurs complexes ou vectorielles, ce qui n'est bien sûr pas le cas pour les deux suivants.

Proposition Une fonction f dérivable sur un intervalle I, à valeurs réelles est croissante (resp. décroissante) sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée est positive (resp. négative) sur cet intervalle.

Démonstration Si f est croissante, on utilise la définition de la dérivée comme limite de taux d'accroissement dont on connaît les signes.
Si $f' \geq 0$, on utilise la formule des accroissements finis.

Proposition Une fonction f dérivable sur un intervalle I est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur cet intervalle si et seulement si sa dérivée est positive (resp. négative) sur cet intervalle et n'est nulle sur aucun intervalle non réduit à un point.

Formulation topologique Soit $f : I \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable, I étant un intervalle.
f est strictement croissante sur I si et seulement si
$f' \geq 0$ sur I et $\{x \in I\ ;\ f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide.

Démonstration On utilise le résultat précédent, on ajoute le fait que si f' est nulle sur $]a, b[$ avec $a < b$, f est constante sur $]a, b[$ et donc n'est pas strictement monotone. Réciproquement, si f est croissante mais pas strictement croissante sur I, il existe a et b tels que $a < b$ et $f(a) = f(b)$. Par croissance, f est constante sur $[a, b]$ donc de dérivée nulle sur $[a, b]$.

La connaissance de la fonction $x \longmapsto x^3$ évite de dire une bêtise : il n'est bien sûr pas nécessaire que f' soit > 0 partout pour avoir f strictement croissante. Construire une fonction strictement croissante sur $[0, 1]$ dont la dérivée (positive, évidemment) est nulle sur un ensemble qui n'est même pas dénombrable est possible...mais pas si facile (il vaut mieux avoir une idée de certains ensembles définis par Cantor).

III Opérations sur les dérivées

III.1 Combinaison linéaire

Proposition : On considère deux fonctions f, g définies sur un intervalle I de **R**, à valeurs dans **K**.
Si f, g sont dérivables en a, si λ est un élément de **K**, $\lambda f + g$ est dérivable en a, et
$(\lambda f + g)'(a) = \lambda f'(a) + g'(a)$.

Démonstration

Méthode 1 : Avec les taux d'accroissement.

$$\frac{1}{x-a}\big((\lambda f + \mu g)(x) - (\lambda f + \mu g)(a)\big) = \lambda \frac{1}{x-a}(f(x) - f(a)) + \mu \frac{1}{x-a}(g(x) - g(a))$$
$$\xrightarrow[x \to a, x \neq a]{} \lambda f'(a) + \mu g'(a)$$

ce qui conclut.

Méthode 2 : En partant des développements limités

$$f(a+h) = f(a) \ + \ h f'(a) \ + \ \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

et

$$g(a+h) = g(a) \ + \ hg'(a) \ + \ \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

on obtient

$$(\lambda f + \mu g)(a+h) = (\lambda f + \mu g)(a) \ + \ h\big(\lambda f'(a) + \mu g'(a)\big) \ + \ \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$$

ce qui conclut aussi bien (rappel : une combinaison linéaire de fonctions négligéables devant h au voisinage de 0 l'est).

III.2 Produit

Proposition On considère deux fonctions f, g définies sur un intervalle I de **R**, à valeurs dans **K**.
Si f, g sont dérivables en a, fg l'est et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Démonstration Elle est faisable par les développements limités, mais un peu longue à rédiger. Avec les taux d'accroissements, c'est un peu plus facile, en notant :

$$\delta(h) = \frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h}$$

on a

$$\delta(h) = \frac{g(a+h) - g(a)}{h} f(a+h) + \frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a)$$

(on rajoute et retranche un terme au numérateur de $\delta(h)$ pour « passer de a à $a+h$ » dans une seule des deux fonctions à la fois).

III.3 Quotient

Proposition Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de **R**, à valeurs réelles **ou complexes** ; si f et g sont dérivables en a et si g n'est pas nulle en a, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Démonstration Commençons par remarquer que, comme $f/g = f \times 1/g$, la règle sur le produit permet de se contenter d'examiner la dérivabilité de $1/g$. Or, par continuité en a de g, au voisinage de a, g ne s'annule pas. On peut donc écrire, au voisinage de a,

$$\frac{\frac{1}{g}(x) - \frac{1}{g}(a)}{x-a} = \frac{-1}{g(x)g(a)}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

et cette expression tend vers $-\dfrac{g'(a)}{g^2(a)}$ lorsque x tend vers a.

III.4 Composition de fonctions dérivables

Proposition On considère deux intervalles I et J de $\mathbf{R}$.

Soit $\phi\ :\ I \longrightarrow \mathbf{R}$ définie sur I et à valeurs réelles.

Soit $g\ :\ J \longrightarrow \mathbf{K}$ définie sur J et à valeurs dans $\mathbf{K}$.

On suppose $f(I) \subset J$ (c'est nécessaire pour que $g \circ \phi$ soit bien définie).

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "g \circ \phi"'] & J \arrow[r, "g"] & \mathbf{K} \end{tikzcd}$$

Si ϕ est dérivable en un point a de I, et si g est dérivable en $\phi(a)$, alors $g \circ \phi$ est dérivable en a et

$$(g \circ \phi)'(a) = \phi'(a)g'\left(\phi(a)\right)$$

Démonstration On peut être tenté d'écrire

$$\frac{1}{x-a}\left(g\left(\phi(x)\right) - g\left(\phi(a)\right)\right) = \frac{\phi(x)-\phi(a)}{x-a} \times \frac{g\left(\phi(x)\right) - g\left(\phi(a)\right)}{\phi(x)-\phi(a)}$$

mais ce n'est pas vraiment satisfaisant (pourquoi ?). On écrira donc plutôt une composée de développements limités, en explicitant les o pour ne pas les manipuler n'importe comment.

Au voisinage de 0 (dans **R**),

$$\phi(a+h) = \phi(a) + h\phi'(a) + h\alpha(h)$$

où α est une fonction qui vérifie $\lim\limits_{h\to 0}(\alpha(h)) = 0$.
Au voisinage de 0 (dans **R** aussi),

$$g\big(\phi(a)+k\big) = g\big(\phi(a)\big) + kg'\big(\phi(a)\big) + k\beta(k) \qquad (1)$$

où β est une fonction qui vérifie $\lim\limits_{k\to 0}(\beta(k)) = 0$.
Il est légitime, dans (1), de substituer à k l'expression $h\phi'(a) + h\alpha(h)$; en effet, $h\phi'(a) + h\alpha(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. On obtient

$$g\big(\phi(a+h)\big) = g\big(\phi(a)\big) + h\phi'(a)g'\big(\phi(a)\big) + \eta(h)$$

avec $\eta(h) = h\alpha(h)g'\big(\phi(a)\big) + \big(h\phi'(a) + h\alpha(h)\big)\beta\big(h\phi'(a) + h\alpha(h)\big)$. On voit que $\eta(h) = h\xi(h)$, où $\xi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$, ce qui montre que $\eta(h) = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h)$. Et donc que $g\circ\phi$ est dérivable en a, de dérivée $\phi'(a)g'\big(\phi(a)\big)$. Ceci est vrai pour tout a, on en déduit que $g\circ\phi$ est dérivable sur I, de dérivée ce qu'on voulait.

Une composition particulière

Proposition Si ϕ est une fonction définie sur un intervalle I de **R**, à valeurs réelles **ou complexes**, dérivable en a, alors $t \mapsto e^{\phi(t)}$ est dérivable en a, de dérivée $\phi'(a)\ e^{\phi(a)}$

…et ce sans qu'on sache vraiment donner un sens, dans le cadre du programme, à $(\exp)' = \exp$ si on est dans le cas de l'exponentielle complexe.

Cas particulier On retrouve, si z est un nombre complexe quelconque,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{zt}\right) = ze^{zt}$$

Démonstration On pourrait écrire $\phi(t) = \phi_1(t) + i\phi_2(t)$ où ϕ_1 et ϕ_2 sont à valeurs réelles, et dériver

$$e^{\phi(t)} = e^{\phi_1(t)}\left(\cos\left(\phi_2(t)\right) + i\sin\left(\phi_2(t)\right)\right)$$

mais ce serait inélégant (et surtout mettrait en place ce qu'il ne faut surtout pas s'habituer à faire : écrire $e^{if(t)} = \cos\left(f(t)\right) + i\sin\left(f(t)\right)$ (si f est à valeurs réelles, bien sûr), formule exacte mais qui complique les choses). On remet donc cette preuve à plus tard (dérivation de la somme d'une série de fonctions).

III.5 Fonction réciproque

Proposition Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I de **R**, à valeurs dans **R**, a un point de I. f^{-1} est dérivable en $f(a)$ si et seulement si $f'(a) \neq 0$, et alors

$$\left(f^{-1}\right)'\left(f(a)\right) = \frac{1}{f'(a)}$$

Remarque On ne rencontre pas (ou presque jamais) dans les énoncé de fonction qui ne soit pas de classe C^1. Si f est de classe C^1 sur un intervalle I, si f' ne s'annule pas sur I, f' garde un signe constant strict sur I (par théorème des valeurs intermédiaires). C'est à dire : $f' > 0$ sur I ou $f' < 0$ sur I. Donc, dans ce cas (qui est le cas toujours rencontré) on n'a pas besoin de l'hypothèse de stricte monotonie, elle est incluse dans l'hypothèse $f' \neq 0$.

Démonstration Avec les taux d'accroissements, en remarquant que

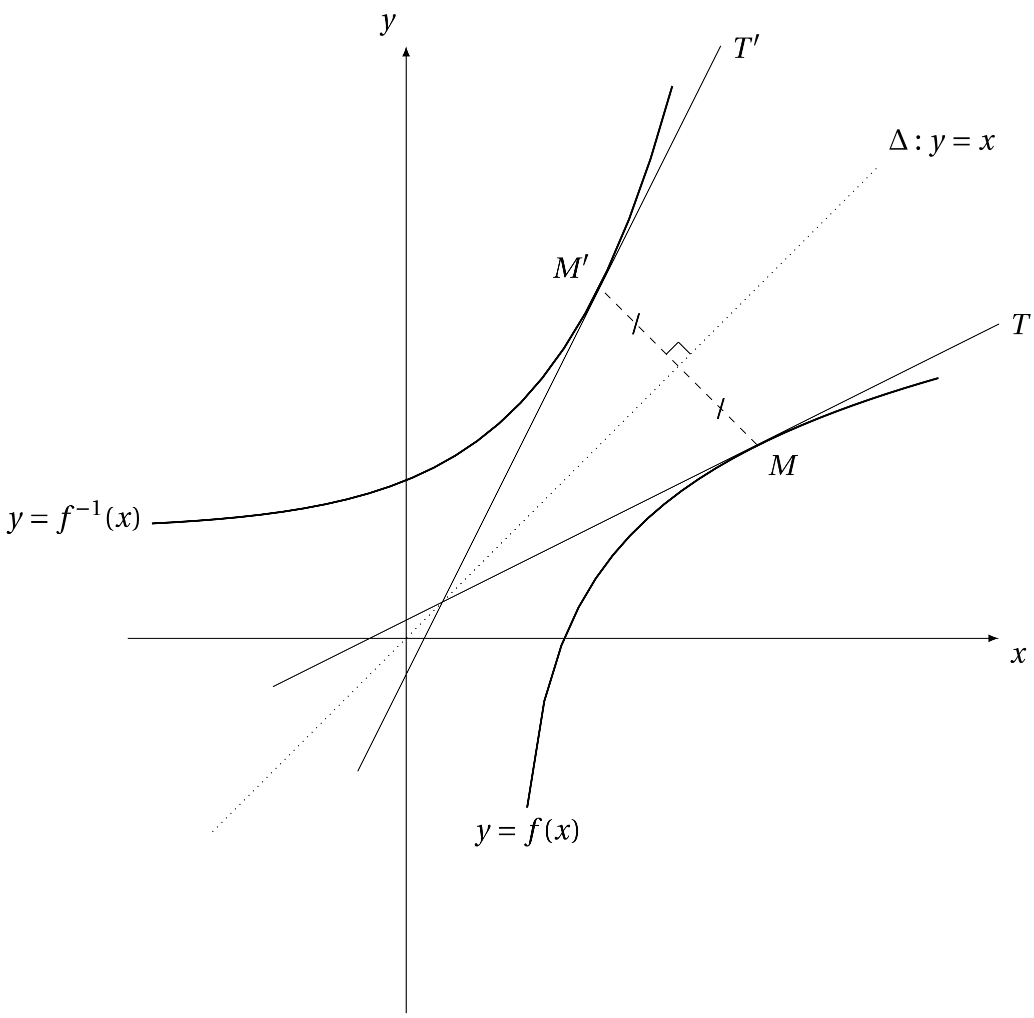
$$\frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}{x-a} = \left[\frac{f\left(f^{-1}(x)\right) - f\left(f^{-1}(a)\right)}{f^{-1}(x) - f^{-1}(a)}\right]^{-1}$$

Remarque Le résultat se retrouve facilement en dérivant la relation

$$\forall x \in I \qquad f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$

mais ce n'est pas une démonstration de la dérivabilité de f^{-1} : c'est un calcul qui, sachant que f^{-1} est dérivable, permet d'obtenir sa dérivée.

Interprétation graphique (tangente au graphe d'une fonction réciproque)



Il suffit de voir et de savoir que les deux tangentes T et T' sont symétriques l'une de l'autre par rapport à Δ. Ce qui suit n'est plus très à la mode. Mais c'est simple et pas inintéressant.

Un peu de géométrie : l'image du point $P(\alpha,\beta)$ par la symétrie orthogonale par rapport à la bissectrice Δ est $P'(\beta,\alpha)$ (preuve : le milieu de $[PP']$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$, donc est sur Δ, et le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ a pour composantes $(\beta-\alpha,\alpha-\beta)$ donc est orthogonal à Δ).

Le point $M\big(a,f(a)\big)$ et le point $M'\big(f(a),a\big)$ (voir figure ci-dessus)sont donc symétriques par rapport à Δ.

Le graphe de f et celui de f^{-1} sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Δ.

Il est assez évident géométriquement que T, tangente en M au graphe de f, et T', tangente en M' au graphe de f^{-1}, sont symétriques par rapport à Δ.

Mais on peut revoir cela analytiquement : comme la symétrie orthogonale s par rapport à Δ s'exprime analytiquement par

$$s\,:\,(x,y)\longmapsto(y,x)$$

Si D est une droite d'équation

$$\alpha x+\beta y+\gamma=0$$

alors $s(D)$ a pour équation

$$\alpha y+\beta x+\gamma=0$$

(le point $P(x,y)$ est dans $s(D)$ si et seulement s'il existe $P'\in D$ tel que $P=s(P')$. Or s est involutive, donc $P=s(P')\iff P'=s(P)$. Et donc $P\in s(D)\iff s(P)\in D$). Posons $b=f(a)$. La tangente T en $\big(a,f(a)\big)$ au graphe de f a pour équation

$$y-b=f'(a)(x-a)$$

et donc son image par s a pour équation

$$x - b = f'(a)(y - a)$$

ou encore, $f'(a)$ étant supposé non nul

$$y - f^{-1}(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}(x - b)$$

c'est-à-dire

$$y - f^{-1}(b) = \frac{1}{(f^{-1})'(b)}(x - b)$$

qui est bien l'équation de T'.

On remarque en particulier que les tangentes T et T' sont parallèles à Δ ou se coupent sur Δ.

Ce qui précède peut paraître un peu trop analytique : comme les cordes du graphe de f sont symétriques de celles du graphe de f^{-1} par symétrie par rapport à Δ, par passage à la limite il en est de même pour les tangentes...

IV Fonctions de classe C^k

IV.1 Définition

a. Classe C^1

Lorsque l'application f' est continue sur I, on dit que f est de classe C^1 sur I.

b. Classe C^k

La définition de la classe C^k et de la dérivée $k$ème se fait par récurrence :
La dérivée « première », c'est, lorsqu'elle existe, la dérivée : $f^{(1)} = f'$.
La dérivée $(k+1)$ème de f est la dérivée $k$ème de f' lorsqu'elle est définie. Mais c'est aussi la dérivée de la dérivée $k$ème de f :

$$f^{(k+1)} = (f^{(k)})' = (f')^{(k)}$$

On dira que f est de classe C^{k+1} sur I lorsque f' est de classe C^k sur I, ou lorsque $f^{(k)}$ est de classe C^1 sur I.

La dérivée $k$ème de f se note $f^{(k)}$ ou $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$, voire $\mathrm{D}^k f$.

c. Classe C^∞

On dit que f est de classe C^∞ sur I lorsqu'elle est de classe C^k sur I pour tout entier naturel k, ce qui signifie que f est indéfiniment dérivable sur I : inutile ici de parler de continuité des dérivées successives, demander qu'elles soient dérivables les force à être continues.

d. Classe C^0, au moins C^k...

Quand on demande de « montrer que f est de classe C^k », on ne demande pas de montrer qu'elle n'est pas C^{k+1} (sauf bien sûr mention explicite). Si on demande la classe de f, en revanche, c'est une autre histoire.

On dit communément d'une fonction continue qu'elle est de classe C^0, c'est parfois commode.

IV.2 Opérations sur les applications de classe C^k

On reprend les opérations sur les dérivées, on rajoute les résultats sur la continuité, on obtient facilement des résultats sur la classe C^k.

Proposition 1 : Si f et g sont k fois dérivables en a (resp. de classe C^k sur I), si λ est un élément de $\mathbf{K}$, $f+\lambda g$ est k fois dérivables en a (resp. de classe C^k sur I), et $(f+\lambda g)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)+\lambda g^{(k)}(a)$.

(resp., sur I, $(f+\lambda g)^{(k)} = f^{(k)}+\lambda g^{(k)}$).

On peut donc dire que $\mathscr{C}^k(I,\mathbf{K})$, ensemble des applications de classe C^k sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel ($k\in\mathbf{N}\cup\{+\infty\}$).

Proposition 2 :

Si f et g sont de classe C^k sur I, à valeurs dans $\mathbf{K}$, alors fg est de classe C^k sur I, et

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}f^{(i)}g^{(k-i)}$$

(formule de Leibniz).

$\mathscr{C}^k(I,\mathbf{K})$, ensemble des applications de classe C^k sur I à valeurs dans $\mathbf{K}$, muni de $+,.,\times$, est donc une $\mathbf{K}$-algèbre.

Démonstration *Figure dans la liste CCP 8 pts*

La formule de Leibniz se montre par récurrence, en utilisant la relation « du triangle de Pascal »

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Il existe d'ailleurs aussi un triangle de Leibniz…et Leibniz a cherché à améliorer la pascaline.

Pour $k = 1$, la formule est connue et on ne songe guère à l'appeler formule de Leibniz : c'est la dérivée d'un produit.

Montrons que la propriété est récurrente, et pour cela supposons f et g de classe C^{k+1} sur I. Elles sont a fortiori de classe C^k, et

$$(fg)^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

est de classe C^1 comme combinaison linéaire de produits de fonctions de classe C^1 (pour chaque i dans $[\![0;k]\!]$, i et $k-i$ sont $< k+1$, donc $f^{(i)}$ et $g^{(k-i)}$ sont de classe C^1). Donc fg est de classe C^{k+1}, et, par formule de dérivation d'un produit,

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left[f^{(i+1)} g^{(k-i)} + f^{(i)} g^{(k+1-i)} \right]$$

On coupe la somme en deux sommes, on réindexe la première :

$$(fg)^{(k+1)} = \sum_{i=1}^{k+1} \binom{k}{i-1} f^{(i)} g^{(k+1-i)} + \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k+1-i)}$$

ce qui donne bien, avec la formule du triangle de Pascal, le résultat (on met de côté le terme pour $i = k+1$ dans la première somme et le terme pour $i = 0$ dans la deuxième, et on remarque que $\binom{k}{i-1} = \binom{k+1}{k+1}$ et $\binom{k}{0} = \binom{k+1}{0}$).

Dans un énoncé d'écrit d'e.n.s. récent : On considère une fonction f qui ne s'annule pas, et qui est de classe C^∞ sur un intervalle I. Montrer que, sur I,

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{(n)} = -\frac{1}{f} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \left(\frac{1}{f}\right)^{(n-k)}$$

Proposition 3 : Si f est une application de classe C^k sur I, à valeurs dans **K**, si ϕ est une application de classe C^k sur J, à valeurs dans I (J est un intervalle de **R**, comme I), alors $f \circ \phi$ est de classe C^k sur J. De plus,

$$(f \circ \phi)'(t) = \phi'(t) f'\big(\phi(t)\big)$$

$$\begin{tikzcd} J \arrow[r, "\phi"] \arrow[rr, bend right, "f \circ \phi"'] & I \arrow[r, "f"] & \mathbf{K} \end{tikzcd}$$

Démonstration Par récurrence sur k ; le plus dur a été fait en montrant que

$$(f \circ \phi)' \;:\; t \mapsto \phi'(t)\; f'\big(\phi(t)\big)$$

Plus précisément, si f et ϕ sont C^1, on a montré que $f \circ \phi$ était dérivable et que sa dérivée était donnée par la formule ci-dessus. Or f' et ϕ sont continues, donc $f' \circ \phi$ l'est. Et ϕ' l'est aussi, donc $\phi' \times (f' \circ \phi)$ l'est. La propriété est donc vraie pour $k = 1$.

Appelons $\mathscr{P}_k$ la propriété énoncée dans la proposition. Et montrons

$$\mathscr{P}_k \Longrightarrow \mathscr{P}_{k+1}$$

On considère pour cela f et ϕ de classe C^{k+1}. Elles sont donc de classe C^1. Donc $f \circ \phi$ est de classe C^1, et sa dérivée est

$$(f \circ \phi)' = \phi' \times (f' \circ \phi)$$

Mais f' et ϕ sont C^k, donc par $\mathscr{P}_k$ $f' \circ \phi$ l'est. Et ϕ' est C^k aussi. Donc d'après le résultat sur le produit, $\phi' \times (f' \circ \phi)$ l'est. Et donc $f \circ \phi$ est de classe C^{k+1}. On a bien la récurrence.

Formule Pas de formule simple pour $(f \circ \phi)^{(k)}$

V Limite de la dérivée, classe C^k par prolongement

On rencontre fréquemment des fonctions définies par des expressions différentes à droite et à gauche d'un point. Se posent alors des problèmes de raccord.

V.1 Limite de la dérivée

Proposition

Soit I un intervalle, et $a \in I$. Si

(i) f est continue sur I

(ii) f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$

(iii) f' a une limite ℓ en a

alors f est dérivable en a, et $f'(a) = \ell$ (donc f' est continue en a).

Proposition bis (réservée aux fonctions à valeurs réelles)

Soit I un intervalle, et $a \in I$. Si

(i) f est continue sur I

(ii) f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$

(iii) f' a une limite $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ en a

alors

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} \ell$$

Si ℓ est réel, on conclut alors comme dans la proposition 2. Si $\ell = \pm\infty$, f n'est pas dérivable en a, mais le graphe de f admet au point d'abscisse a une tangente verticale (si a est une extrémité de I, c'est une demi-tangente verticale).

Démonstration Formule des accroissements finis, et définition de la limite avec les ϵ.

Exemple : Montrer que le graphe de la fonction

$$x \longmapsto x^{\alpha}$$

où $0 < \alpha$, définie sur $[0, +\infty[$, a une demi-tangente verticale en $(0, 0)$ pour certaines valeurs de α que l'on déterminera.

V.2 Utilisation pour la classe C^1

Le résultat suivant est **hors programme**. Mais il est une conséquence assez simple de la proposition précédente.

Proposition h.p. (théorème de classe C^1 par prolongement)

Soit I un intervalle, $a \in I$, et f de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$; si f et f' ont chacune une limite en a, alors f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur I.

(bis) Soit a un point d'un intervalle I, soit f de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$; si f et f' ont des limites respectives ℓ et ℓ' en a, alors la fonction g définie par

$$\forall x \in I \setminus \{a\} \quad g(x) = f(x) \qquad \text{et} \quad g(a) = \ell$$

est de classe C^1 sur I (et donc $g'(a) = \ell'$).

(ter) Soit f de classe C^1 sur $]a, b]$. Si f et f' ont chacune une limite en a, alors f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[a, b]$.

Exercice : On définit, sur $\mathbf{R}_*$,

$$f\ :\ x \longmapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}$.

Exercice : Même question avec la fonction g qui vérifie $g(x) = \cos\left(\sqrt{x}\right)$ si $x > 0$ et $g(x) = \mathrm{ch}\left(\sqrt{-x}\right)$ si $x < 0$.

Exercice : Montrer que la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} \quad \text{si } x > 0 \qquad , \qquad g(x) = \frac{1}{2} + x^4 \quad \text{si} x \leq 0$$

est de classe C^1 sur **R**.

Ce théorème est très utile, mais dans certains cas son application mène à des calculs trop compliqués alors que d'autres idées sont plus efficaces. Par exemple, pour montrer que l'application

$$x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$$

se prolonge en une fonction C^1 à **R** *entier, les séries entières sont plus efficaces que le théorème de classe C^1 par prolongement. Et si on passe à C^∞, c'est encore plus vrai.*

Proposition h.p. (théorème de classe C^k par prolongement)

Soit $k \geq 1$. Soit I un intervalle, $a \in I$, et f de classe C^k sur $I \setminus \{a\}$. Si chaque $f^{(j)}$ $(0 \leq j \leq k)$ a une limite en a, alors f se prolonge à I en une fonction de classe C^k.

Exercice (Ecrit Mines 2011) On considère la fonction h définie sur **R**, qui vaut 0 en-dehors du segment $[-1,1]$, et telle que

$$\forall\, t \in [-1,1] \qquad h(t) = (1-t^2)^3$$

Quelle est la classe de h ?

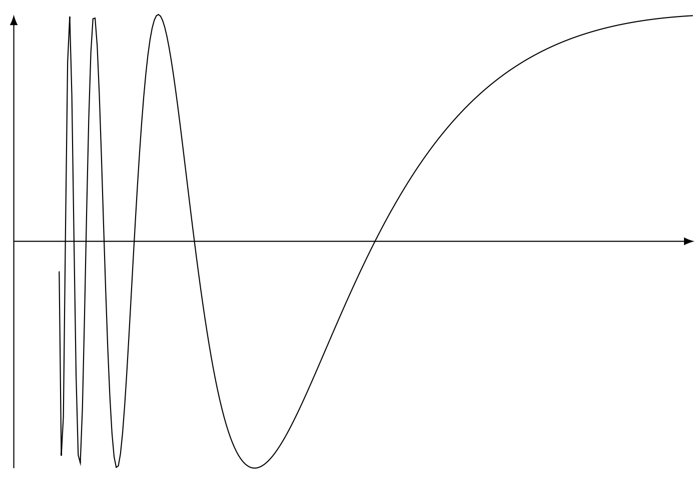
Exercice très classique : Montrer que la fonction $x \longmapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur **R**.

VI Deux fonctions

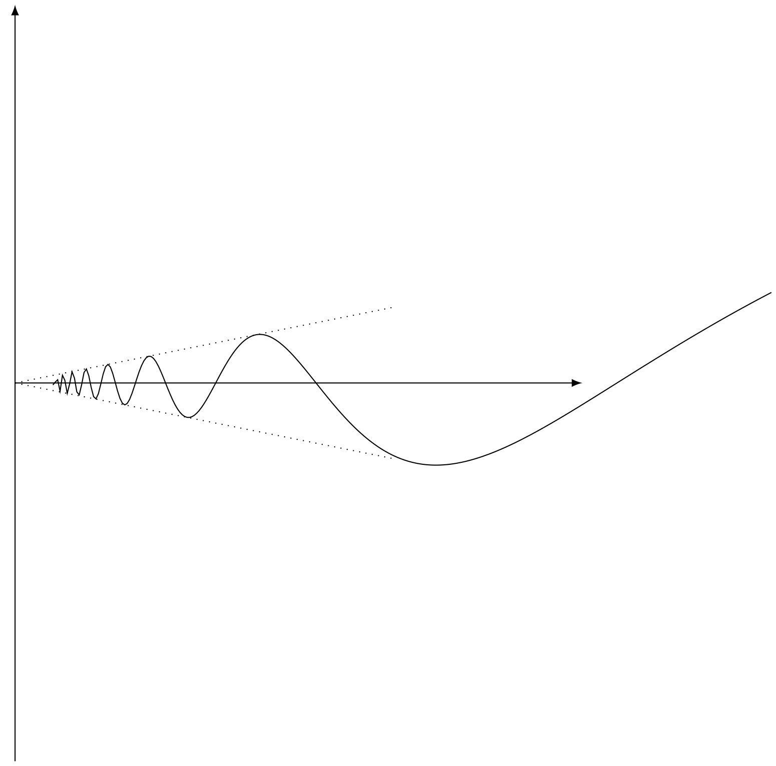
De même qu'il y a deux inégalités importantes en Analyse « de prépa » ($|\sin x| \leq |x|$ et $\ln(1+x) \leq x$), il y a deux fonctions utiles. Elles ne sont pas au programme. Elles ne sont pas aussi importantes que les inégalités, mais on les rencontre assez souvent dans la construction d'exemples et contre-exemples.

VI.1 x->sin (1/x)

En général, à main levée, on fait des oscillations plus « lentes » : déjà sur le graphe ci-dessous, le repère n'est pas orthonormal. . .(on remarquera que les abscisses des maximums, des minimums et des annulations sont plutôt simples à déterminer).



Cette fonction ne se prolonge pas par continuité en 0. Ce à quoi on remédie en la multipliant par une fonction convenable. Par exemple, par x :

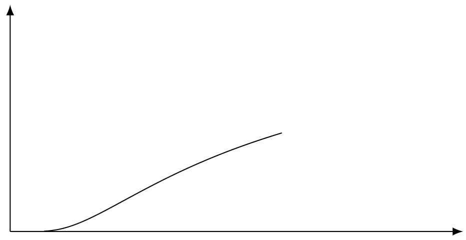


A quoi sert cette fonction ? à voir qu'une fonction sagement bornée peut avoir une dérivée qui elle ne l'est pas du tout : en effet, la fonction passe de -1 à 1 sur des intervalles de plus en plus courts quand on se rapproche de 0. Ce qui oblige la dérivée à prendre de très grandes valeurs.

Exercice (Oral X 2017) Construire $f : [0,1] \longrightarrow \mathbf{R}$ dérivable telle que

$$f'([0,1]) = \mathbf{R}$$

VI.2 x->exp(-1/x^2)



Celle-ci peut paraître plus décevante. Elle est très « écrasée » sur l'axe des abscisses au voisinage de l'origine. On a par exemple, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$e^{-\frac{1}{x^2}} \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

(croissances comparées). On tient alors là une fonction de classe C^∞ (en la prolongeant par 0 en 0) qui n'est pas somme de sa série de Taylor (voir chapitre sur les séries entières). Une fonction qui a des développements limités à tous ordres au voisinage de 0, mais pas très intéressants, car il n'y a pas de « partie principale » (disons que l'échelle des puissances de x n'est pas adaptée à l'étude de cette fonction au voisinage de l'origine).
Plus compliqué : en combinant un peu les idées des deux fonctions qui viennent d'être vues, on peut considérer la fonction

$$f \;:\; x \longmapsto \exp\left(-1/x^2\right)\, \sin\left(\exp\left(1/x^2\right)\right)$$

Cette fonction a encore des développements limités à tous ordres en 0, aussi peu passionnants :

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Elle est aussi de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$ (en la prolongeant par 0 en 0). En la dérivant, le terme à croissance (très) rapide sort du sinus, et vient contrarier sérieusement le terme devant le sinus qui, lui, tend très vite vers 0 (faire le calcul). Et on montre que f' n'a de développement limité à aucun ordre, puisqu'elle n'a pas de limite finie en 0.

VII Trois inégalités

$\forall x \in \mathbf{R} \qquad |\sin x| \leq |x|.$

$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x.$

$\forall x \in \mathbf{R} \qquad e^x \geq 1 + x.$

Les deux premières sont d'une utilité très fréquente. Elles sont faciles à établir, mais c'est une excellente chose de pouvoir les utiliser sans justification.

Table des matières