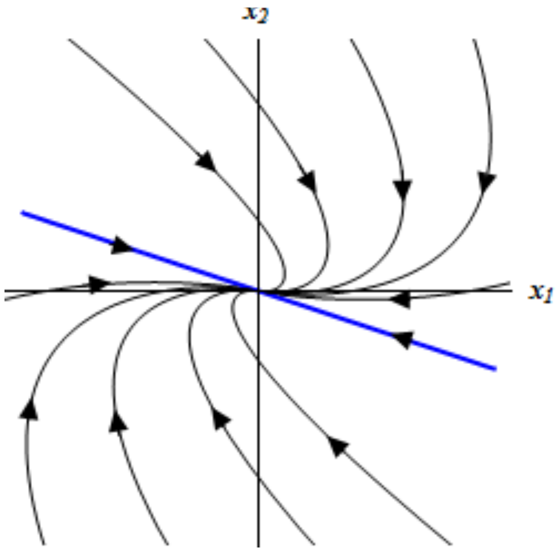
Al6 : Réduction (suite et fin)



Solutions d'un système différentiel $X' = AX$, avec $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ trigonalisable non diagonalisable

I Valeurs propres et polynômes annulateurs

I.1 Calcul préliminaire

a Version vectorielle

Proposition Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, $x \in E$. Si $u(x) = \lambda x$, et si $P \in \mathbf{K}[X]$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

Remarque Surtout ne pas écrire $P(u(x))$. On peut écrire $[P(u)](x)$

Démonstration Importante, à savoir écrire.

b Version matricielle

Proposition Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$. Si $AX = \lambda X$ et si $P \in \mathbf{K}[X]$, alors $P(A)X = P(\lambda)X$

Remarque Là aussi, ne pas écrire $P(AX)$.

Démonstration *Là aussi schéma de démonstration typique, qu'on réutilisera*

I.2 Valeurs propres et racines de polynômes annulateurs

Proposition 1

Si P est annulateur de u, toute valeur propre de u est racine de P.

Si P est annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de P.

Proposition 2

Les valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie sont les racines de son polynôme minimal.

Les valeurs propres d'une matrice carrée sont les racines de son polynôme minimal.

Corollaire Le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines.

Résumé Les valeurs propres sont les racines du polynôme minimal ; Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique ; si P est annulateur, les valeurs propres font partie des racines de P.

Exemple Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal d'un projecteur en dimension finie.

Exemple Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de la matrice J à n lignes et n colonnes dont tous les coefficients valent 1.

Exemple Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

II Le lemme de décomposition des noyaux

Théorème

Soit E un **K**-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie), soit $u \in (E)$. Si P_1, P_2 sont deux polynômes premiers entre eux ($P_1 \wedge P_2 = 1$), alors, en notant $P = P_1 P_2$,

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \operatorname{Ker}(P_1(u)) \oplus \operatorname{Ker}(P_2(u))$$

Démonstration Théorème de Bezout.

Extension

Soit E un **K**-espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie), soit $u \in (E)$. Si $P_1, \ldots, P_m$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux $((i \neq j) \Rightarrow (P_i \wedge P_j = 1))$, alors, en notant $P = \prod_{i=1}^{m} P_i$,

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{Ker}(P_i(u))$$

Remarque Le théorème des noyaux ne se limite pas à la dimension finie.

Un exemple d'application en analyse

Le théorème des noyaux pemet de « casser » un gros problème en plusieurs problèmes plus petits. Supposons donc qu'on veuille résoudre l'équation différentielle

$$y^{(3)} + 4y'' + 4y' + 3y = 0 \tag{1}$$

où y est une fonction inconnue définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$. On montre assez classiquement que si ϕ est une solution de cette équation différentielle, elle est de classe C^∞ (en montrant que si elle est de classe C^k elle est de classe C^{k+1}).

On se place donc sur $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, et on considère l'endomorphisme de dérivation :

$$u : \phi \longmapsto \phi'$$

Remarquons que $u^k(\phi) = \phi^{(k)}$ pour tout $\phi \in E$ et $k \in \mathbf{N}$. Donc résoudre l'équation (1), c'est chercher $\operatorname{Ker}(P(u))$ avec

$$P = X^3 + 4X^2 + 4X + 3$$

Mais on peut factoriser P en polynômes deux à deux premiers entre eux...

On trouvera des applications dans le contexte similaire des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire, voir fin du chapitre

Un exercice (posé à un mp* de La Martinière, oral Mines 2022)

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $f \in L(E)$, P un polynôme annulateur de f tel que 0 est racine simple de P. Montrer que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

III Une dernière cns de diagonalisabilité

...mais la plus utilisée dans les exercices.

Proposition Une matrice A (resp. un endomorphisme u d'un espace de dimension finie E) est diagonalisable si et seulement si il existe un polynôme annulateur de A (resp. de u) scindé à racines simples.

Proposition bis Une matrice A (resp. un endomorphisme u d'un espace de dimension finie E) est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

Corollaire important Voir rubrique suivante : l'endomorphisme induit sur un sous-espace stable par un endomorphisme diagonalisable est diagonalisable.

Exemple classique On considère $A \in M_n(\mathbf{C})$ telle que $A^q = I_n$, où $q \geq 1$. Montrer que A est diagonalisable.

Il est maintenant très simple d'étudier la diagonalisabilité d'un projecteur ou d'une involution linéaire (symétrie) sans aucune idée de leur nature géométrique. On peut aussi étudier la diagonalisabilité des matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

ou $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

IV Sous-espaces stables

IV.1 Définition ; caractérisation matricielle dans une base adaptée

Définition Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E. On dit que le sous-espace F de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$, i.e. lorsque

$$\forall x \in F \qquad u(x) \in F$$

Lecture matricielle On reprend les notations précédentes. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n)$ une base « adaptée » à F, $(e_1, \ldots, e_p)$ étant une base de F. Alors F est stable par u si et seulement si $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u)$ est de la forme

Remarque Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E, $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors

$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(u) \in T_n^+(\mathbf{K}) \iff \forall k \in [\![1, n-1]\!] \qquad$ Vect(stable par u.

IV.2 Produit par blocs

Déjà vu. . .et on va s'en servir !

IV.3 Polynôme caractéristique, polynôme minimal d'un endomorphisme induit

Proposition

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in L(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est stable par u, et on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F. On note enfin P et μ le polynôme caractéristique et le polynôme minimal. Alors

$$P_{u_F} \mid P_u \qquad \text{et} \qquad \mu_{u_F} \mid \mu_u$$

IV.4 Endomorphisme induit par un endomorphisme diagonalisable sur un sous-espace stable

Proposition

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in L(E)$. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est stable par u, et on note u_F l'endomorphisme induit par u sur F. Alors

$$\Big(u \text{ diagonalisable}\Big) \Longrightarrow \Big(u_F \text{ diagonalisable}\Big)$$

IV.5 Endomorphisme laissant stables les facteurs d'une somme directe

On suppose que $F_1, \dots, F_m$ sont des sous-espaces vectoriels d'un **K**-espace vectoriel $(E, +, .)$ de dimension finie tels que

$$F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m = E$$

On considère une base $\mathscr{B}$ adaptée à cette somme directe :

$$\mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_{d_1}}_{\text{base de } F_1}, \underbrace{e_{d_1+1}, \dots, e_{d_1+d_2}}_{\text{base de } F_2}, \dots, \dots)$$

(on note donc $d_k = \dim(F_k)$).

Proposition

Soit $u \in L(E)$. Les F_i sont tous stables par u si et seulement si $M_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale par blocs, de la forme

$$\begin{pmatrix} A_1 & (0) & \cdots & \cdots & (0) \\ (0) & A_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \cdots & \cdots & (0) & A_m \end{pmatrix}$$

où chaque A_j est dans $\mathscr{M}_{d_j}(\mathbf{K})$. De plus, quand c'est le cas, on a pour chaque j

$$A_j = \mathrm{Mat}_{(e_{d_1+\cdots+d_{j-1}+1},\ldots,e_{d_1+\cdots+d_{j-1}+d_j})}(u_{F_j})$$

où u_{F_j} désigne l'endomorphisme induit par u sur F_j.

Proposition

Sous les hypothèses précédentes, on peut écrire le polynôme caractéristique P_u en fonction des $P_{u_{F_i}}$:

et le polynôme minimal μ_u en fonction des $\mu_{u_{F_i}}$:

IV.6 Stabilité et commutation

Exercice facile et classique : Montrer que si u, v sont deux endomorphismes de E tels que $u \circ v = v \circ u$, alors l'image et le noyau de v sont stables par u (et réciproquement, bien sûr).

Proposition : Si deux endomorphismes commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
Autrement dit, si $(u, v) \in L(E)^2$, si $u \circ v = v \circ u$, alors, pour toute valeur propre λ de u, $E_\lambda(u)$ est stable par v.

Applications : Diagonalisation simultanée (ou : « codiagonalisation »). Voir exercices. Mais aussi résolution d'équations matricielles (voir cadre ci-dessous). C'est un résultat très simple et très important dans les exercices et les problèmes.

Méthode pour l'oral : résolution d'une équation matricielle
On trouve à l'oral des exercices du type : résoudre $P(X) = M$, où M est une matrice donnée, P un polynôme, X une matrice inconnue. Par exemple :
Résoudre $\quad X^2 + X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ (inconnue $X \in M_2(\mathbf{R})$).
Il n'y a pas **une** méthode pour aborder ce problème, mais quand même...il est important de remarquer que si $P(X) = M$, X et M commutent. Et donc X laisse stables l'image, le noyau, les sous-espaces propres de M. Ce qui délimite pas mal les choses.
Comme toujours, il peut y avoir d'autres méthodes : les connaissances au programme sur les matrices nilpotentes permettent parfois de conclure très vite (exemple classique : résoudre $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$).
Posé à un mp* de La Martinière à l'oral des Mines 2022 : résoudre $X^2 = M$ où $M \in M_n(\mathbf{R})$ vérifie $a_{i,j} = 1$ si $i = j$ ou $j = i + 1$, $a_{i,j} = 0$ sinon.
Signalons enfin (voir plus tard) qu'une solution de l'équation $\exp(X) = M$ commute nécessairement avec M.

V Le théorème de Cayley-Hamilton

Théorème : Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie, ou d'une matrice, est un polynôme annulateur.

Ou encore, en résumant avec des notations habituelles :
Si $u \in L(E)$ avec $\dim(E) < +\infty$, alors $\mu_u \mid \chi_u$.
Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, alors $\mu_A \mid \chi_A$.

Corollaire : Le polynôme minimal d'un endomorphisme en dimension n, ou d'une matrice de $\mathbf{M}_n(\mathbf{K})$, est de degré $\leq n$.

Exercice A l'aide du théorème de Cayley-Hamilton, retrouver la condition suffisante de diagonalisabilité (méthode classique, importante).

Une démonstration *La démonstration du théorème de Cayley-Hamilton n'est pas exigible, mais celle qui se trouve en annexe présente des techniques utiles dans un nombre non négligeable de problèmes de réduction.*

VI Trigonalisabilité

VI.1 Définition (endomorphismes-matrices)

On fait arbitrairement le choix de la trigonalisabilité « supérieure »

Définition

Un endomorphisme u de E (espace de dimension finie) est dit trigonalisable lorsqu'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure.

Une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est trigonalisable lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ et T triangulaire supérieure telles que

$$A = PTP^{-1}$$

VI.2 Trois caractérisations qui n'en font presque qu'une...

a Les résultats

Proposition Un endomorphisme en dimension finie (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.

Proposition (bis) Un endomorphisme en dimension finie (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé.

Proposition (ter) Un endomorphisme en dimension finie (ou une matrice) est trigonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé.

Corollaire Toute matrice réelle ou complexe est trigonalisable sur $\mathbf{C}$, tous les endomorphismes d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie sont trigonalisables.

b Remarque préliminaire

Une implication est nettement plus facile que l'autre.

c Démonstration de l'implication difficile

C'est une démonstration assez élaborée, et très importante. On commence par remarquer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de $u \in$

$\mathscr{L}(E)$ est triangulaire supérieure, e_1 est un vecteur propre de u. C'est le point de départ de la démonstration, et il est préférable de le voir d'un point de vue « endomorphismes ». Ensuite, la démonstration se fait par récurrence sur la dimension (c'est assez habituel), et là il vaut mieux passer aux matrices et raisonner par blocs. Ce double jeu (endomorphismes puis matrices) rend les choses un peu délicates.
On commence par remarquer que les théorèmes suivants :

Théorème Vect Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $u \in L(E)$. Alors u est trigonalisable si $\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)$ est scindé.

Théorème Mat Soit $n \geq 1$, et soit $A \in M_n(\mathbf{K})$. Alors A est trigonalisable si $\chi_A = \det(XI_n - A)$ est scindé.

sont équivalents. On note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble de ces deux théorèmes. On va démontrer $\mathscr{P}_n$ par récurrence sur n. Comme d'habitude, on initialise avec $n = 1$, comme d'habitude cela semble ridicule, comme d'habitude c'est rigoureusement correct.
Hérédité : Montrons, pour $n \geq 1$, $\mathscr{P}_n \Rightarrow \mathscr{P}_{n+1}$.
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$, et $u \in L(E)$. Supposons P_u scindé. Alors $\mathrm{Sp}(u) \neq \emptyset$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, et $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$u(e) = \lambda e$$

Complétons e en une base $B = (e, e_2, \ldots, e_{n+1})$ de E, et soit $A = M_B(u)$.

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ & A' \\ & \end{array}\right)$$

Remarque : il n'y a aucune raison pour que $\mathrm{Vect}(e_2, \ldots, e_{n+1})$ soit stable par u. Et A' n'est donc pas la matrice d'un endomorphisme induit par u sur un sous-espace vectoriel. C'est pourquoi il est plus commode de continuer matriciellement.
Par blocs, on peut exprimer $\chi_A = \chi_u$ à l'aide de $\chi_{A'}$:

Un polynôme qui divise un polynôme scindé est scindé, donc $P_{A'}$ est scindé, on peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}_n$ à A' : il existe $T \in T_n^+(\mathbf{K})$ et $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que $A' = PTP^{-1}$, ou $T = P^{-1}A'P$.
Comment trouver alors une matrice de passage qui agisse sur A en rendant A' triangulaire supérieure sans toucher à la première colonne ? En définissant

$$Q = \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & \\ & P \\ & \end{array}\right)$$

On vérifie facilement que $Q \in GL_{n+1}(\mathbf{K})$ en voyant que $Q^{-1} =$

Et on calcule par blocs $Q^{-1}AQ$ ce qui conclut la récurrence.

d Variations

Que faut-il modifier dans la démonstration précédente pour obtenir la proposition (ter) ? (avec le polynôme minimal à la place du polynôme caractéristique).

e Un exercice classique

La démonstration vue précédemment peut être adaptée et réutilisée dans un assez grand nombre d'exercices classiques. Il est donc important de bien la comprendre. Voici un exemple.
Exercice : Montrer qu'une matrice de $M_n(\mathbf{K})$ est de trace nulle si et seulement si elle est semblable à une matrice de diagonale nulle.
Il vaut mieux avoir préalablement fait l'exercice suivant, autre classique :
Exercice : Soit $u \in L(E)$, où E est un **K**-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que si u n'est pas une homothétie, il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $(x, u(x))$ soit une famille libre.

VI.3 En cas de trigonalisabilité, expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres

Quand χ_u ou χ_A est scindé, i.e. quand u ou A est trigonalisable, on exprime la trace et le déterminant à l'aide de la somme et du produit des valeurs propres (comptées autant de fois que leur multiplicité).

VI.4 Trigonalisabilité et stabilité

On a noté il y a longtemps le résultat suivant :

Proposition $M_{e_1,\dots,e_n}(u) \in T_n^+(\mathbf{K}) \iff \forall k \in [\![1, n-1]\!]$ stable par u

VII Nilpotence

VII.1 Définition : nilpotence, indice de nilpotence

Définition

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$u^k = \Theta \tag{1}$$

(remarque : on peut remplacer $k \in \mathbf{N}$ par $k \in \mathbf{N}_*$, car $u^0 = Id_E \neq \Theta$).

Il existe alors un plus petit k vérifiant (1), on l'appelle indice de nilpotence de u.

Cet indice de nilpotence $m \in \mathbf{N}_*$ est donc caractérisé par

$$u^m = \Theta \qquad , \qquad u^{m-1} \neq \Theta$$

On dit que $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente lorsqu' il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que

$$M^k = (0)$$

Le plus petit k vérifiant cela est appelé indice de nilpotence de M.

VII.2 Polynômes minimal et caractéristique d'un endomorphisme nilpotent

Proposition

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent si et seulement si $\chi_u =$

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent d'indice m si et seulement si $\mu_u =$

Proposition

Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. M est nilpotente si et seulement si $\chi_M =$. M est nilpotente d'indice m si et seulement si $\mu_M =$

VII.3 Nilpotence et trigonalisabilité

Théorème :

Un endomorphisme est nilpotent si et seulement si il est trigonalisable et a pour seule valeur propre 0.

Une matrice carrée est nilpotente si et seulement si elle est trigonalisable et a pour seule valeur propre 0.

Corollaire (sur C) : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ est nilpotente si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ (autre version : un endomorphisme u d'un $\mathbf{C}$-espace vectoriel de dimension finie est nilpotent si et seulement si $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$).

Ce résultat est faux sur $\mathbf{R}$, par exemple : la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ a pour unique valeur propre 0, et n'est pas nilpotente. Bien sûr, elle n'est pas trigonalisable. . .et sur $\mathbf{C}$, elle n'a pas pour unique valeur propre 0. . .

Remarque : Une matrice nilpotente n'est pas nécessairement triangulaire. Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ est nilpotente. Attention donc à ne pas confondre matrice nilpotente et matrice nilpotente « réduite », c'est-à-dire triangulaire supérieure « stricte ».

VII.4 Indice et dimension

Théorème

Soit p l'indice de nilpotence d'une matrice M nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$; alors $p \leq n$.

Si $u \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent d'indice p, avec $\dim(E) = n$, alors $p \leq n$.

Démonstration 1 (avec le théorème de Cayley-Hamilton)

Démonstration 2 (avec les noyaux itérés)

Insistons : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est nilpotente, alors $M^n = (0)$. Si par exemple $A \in \mathscr{M}_2(\mathbf{K})$ est telle que $A^2 \neq (0)$, inutile d'espérer que A^3, ou A^4, etc...soit nulle.

VIII Sous-espaces caractéristiques

VIII.1 Définition, propriétés

a Définition

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension finie, et soit $u \in L(E)$. On suppose χ_u scindé :

$$\chi_u = \prod_{k=1}^{q} (X - \lambda_k)^{m_k}$$

où les λ_k sont deux à deux distincts (ce sont les valeurs propres de u), et les m_k sont dans $\mathbf{N}^*$.

Définition Les sous-espaces carctéristiques de u sont les $F_k = \mathrm{Ker}\left((u - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k}\right)$, $1 \leq k \leq q$.

b Propriétés

On reprend les hypothèses (χ_u scindé) les notations du paragraphe de définition. On note pour chaque k : $E_k = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_k \mathrm{Id})$.

Proposition

(i) Chaque F_k est stable par u.

(ii) $E = \displaystyle\bigoplus_{k=1}^{q} F_k$.

(iii) $\forall k \in [\![1, q]\!] \quad E_k \subset F_k$.

(iv) $\forall k \in [\![1, q]\!] \quad \dim(F_k) = m_k$

Démonstration

Importantes justifications.

Pour la propriété **(iv)** on pourra se poser la question suivante : notant $d_k = \dim(F_k)$, quel est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur F_k ?

VIII.2 Application à la réduction

On reprend les notations et les hypothèses (χ_u scindé) du paragraphe précédent.

Théorème Il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, chaque bloc étant triangulaire supérieur à coefficients diagonaux égaux.

Autrement dit, Il existe donc une base $\mathscr{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est à la fois triangulaire et diagonale par blocs, de la forme

$$\begin{pmatrix} T_1 & (0) & \dots & \dots & (0) \\ (0) & T_2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & \dots & (0) & T_m \end{pmatrix}$$

chaque bloc T_k étant triangulaire supérieure de la forme

$$T_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \star & \dots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Théorème bis

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que χ_A soit scindé. Alors A est semblable à une matrice triangulaire supérieure et diagonale par blocs du type précédent.

VIII.3 Décomposition de Dunford (h.p.)

Il est intéressant de prolonger l'étude précédente pour en déduire le résultat (peu utile!) suivant :

Théorème (h.p.) Sous les hypothèses précédentes (χ_u scindé), il existe deux endomorphismes d et n, respectivement diagonalisable et nilpotent, tels que

$$u = d + n \qquad \text{et} \qquad dn = nd$$

On peut énoncer ce résultat sous forme matricielle. Les endomorphismes d et n ci-dessus sont uniques.

IX Un réflexe

Beaucoup d'énoncés parlent de la réduction d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ qui vérifie, par exemple,

$$A^4 = 4A^2$$

En général, on ne prend pas trop le temps de réfléchir, on écrit

$$X^4 - 4X^2 = X^2(X-4)(X+4)$$

et donc (théorème des noyaux)

$$\mathbf{K}^n = \mathrm{Ker}(A^2) \ \oplus \ \mathrm{Ker}(A - 4I_n) \ \oplus \ \mathrm{Ker}(A + 4I_n)$$

d'où l'on tire par exemple l'équivalence

$$\Big[A \text{ diagonalisable}\Big] \iff \Big[\mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Ker}(A^2)\Big]$$

Parfois, la relation polynomiale de départ est donnée par le théorème de Cayley-Hamilton. Cet enchaînement (théorème de Cayley-Hamilton) puis (théorème des noyaux) est un grand classique.

X Annexe 1 : une démonstration du théorème de Cayley-Hamilton

X.1 Position du problème

On considère un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E. On note P son polynôme caractéristique. Montrer que P annule u, c'est montrer que $P(u) = \Theta$, c'est montrer que

$$\forall x \in E \quad P(u)(x) = 0_E$$

(Rappel : ne pas écrire $P\left(u(x)\right)$ qui n'a pas de sens).
Comme c'est vrai pour $x = 0_E$ ($P(u)$ est un endomorphisme), **dans ce qui suit on fixe x et on suppose $x \neq 0_E$.**

X.2 L'énoncé sans la solution

On considère un endomorphisme u d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E.
On fixe un élément non nul x de E.

1. Montrer qu'il existe un plus grand entier naturel non nul p tel que la famille $\left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$ est libre. On note dorénavant

$$F = \mathrm{Vect}\left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$$

2. Montrer que $\left(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\right)$ est une base de F. On la note B.
3. Montrer que F est stable par u. Vérifier que la matrice A dans la base B de l'endomorphisme u_F induit par u sur F est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \beta_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \beta_{p-1} \end{pmatrix}$$

4. Calculer le polynôme caractéristique de A.
5. Déduire de ce qui précède que, si P est le polynôme caractéristique de u, $[P(u)](x) = 0_E$. On a donc montré le théorème de Cayley-Hamilton.

X.3 Recherche du plus petit sev stable par u et contenant x

Si F est un sev de E stable par u et contenant x, nécessairement F contient x, $u(x)$, $u^2(x)\dots$ et on peut voir assez facilement que $F = \text{Vect}\Big[\big(u^k(x)\big)_{k\in\mathbf{N}}\Big]$ mais cela ne nous donne pas une base de F, seulement une famille génératrice. On considère donc :

$$p = \max\{n \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \ / \ \big(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x)\big) \text{ libre}\}$$

p est bien défini comme plus grand élément d'une partie non vide (elle contient par exemple 1) et majorée (par $\dim(E)+1$) de $\mathbf{N}_*$. Et, par définition de p, la famille $\big(x, u(x), \dots, u^p(x)\big)$ est liée. On peut donc écrire une relation de dépendance linéaire entre ces vecteurs :

$$\sum_{k=0}^{p} \alpha_k u^k(x) \ = \ 0_E$$

où les α_k ne sont pas tous nuls. Si α_p était nul, on obtiendrait une relation de dépendance linéaire entre $x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)$, ce qui contredirait la définition de p. On peut donc écrire :

$$u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k u^k(x)$$

(en posant $\beta_k = -\dfrac{\alpha_k}{\alpha_p}$). On constate alors que $F = \text{Vect}\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est stable par u et contient x. C'est le plus petit sev qui possède ces propriétés, mais cela ne nous servira pas. De plus, la famille $\big(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x)\big)$ est une base de F.

X.4 Calcul du polynôme caractéristique de u_F

On note comme habituellement u_F l'endomorphisme induit par u sur F (cette notation n'a de sens que parce que F est stable par u). Pour calculer le polynôme caractéristique de u_F, on va écrire la matrice de u_F dans la base

$\big(x, u(x), \ldots, u^{p-1}(x)\big)$ de F. Cette matrice est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \beta_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & \beta_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & \beta_{p-1} \end{pmatrix}$$

et donc le polynôme caractéristique de u_F est

$$P_1(X) = \begin{vmatrix} X & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -\beta_0 \\ -1 & \ddots & & & \vdots & -\beta_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & X & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & X-\beta_{p-1} \end{vmatrix}$$

que l'on calcule par exemple en ajoutant à la première ligne X fois la deuxième, X^2 fois la troisième,..., X^{p-1} fois la dernière (autrement écrit, on fait l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow L_1 + \sum\limits_{k=2}^{p} X^{k-1} L_k$), puis en développant par rapport à la première ligne qui n'a plus qu'un terme non nul. On obtient :

$$P_1(X) = X^p - \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k X^k$$

X.5 Conclusion

La relation $u^p(x) = \sum\limits_{k=0}^{p-1} \beta_k u^k(x)$ peut se lire $P_1(u)(x) = 0_E$. Mais on sait que P_1 divise P : $P = QP_1$, donc $P(u) = Q(u) \circ P_1(u)$, d'où le résultat :
$P(u)(x) = Q(u)\big[P_1(u)(x)\big] = Q(u)(0_E) = 0_E$

XI Annexe 2 : pratique de la trigonalisation

XI.1 Diagonalisation

Problème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Diagonaliser A.

Diagonaliser A, c'est trouver une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que

$$A = PDP^{-1}$$

Il faut connaître les valeurs propres de A (c'est le plus dur ! puisqu'il s'agit de résoudre une équation polynomiale de degré n). Ensuite, on cherche une base de chacun des sous-espaces propres (ceci est en revanche automatisable, puisqu'il s'agit d'une résolution de système linéaire). On recolle ces bases (en disposant les vecteurs en colonnes) pour obtenir une matrice de passage P (évidemment, ce n'est possible que si A est diagonalisable !). La matrice $P^{-1}AP$ est diagonale, sur la diagonale se trouvent les valeurs propres correspondant aux colonnes de la matrice P.

XI.2 Trigonalisation

Problème : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, trigonalisable, non diagonalisable. Trigonaliser A.

C'est un peu plus technique. Une trigonalisation « habituelle » utilise les ingrédients suivants :

• Le théorème de Cayley-Hamilton.

• Le théorème des noyaux

• Les « noyaux itérés » (début de l'exercice de Al1, hors-programme, mais classique).

• Un autre exercice classique :

Exercice

Soit $v \in L(F)$ nilpotent d'indice p. On suppose $x \notin \mathrm{Ker}(v^{p-1})$

a. Montrer que la famille $(v^{p-1}(x), \dots, v(x), x)$ est libre.

b. On note $G = \mathrm{Vect}(v^{p-1}(x), \dots, v(x), x)$. Montrer que G est stable par v.

Ecrire la matrice dans la base $\text{Vect}(v^{p-1}(x), \dots, v(x), x)$ de l'endomorphisme v_G induit par v sur G.

Un exemple de trigonalisation

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Un calcul simple donne le polynôme caractéristique de A (qui est scindé ; s'il ne l'était pas, on ne pourrait pas trigonaliser) :
$P_A = (X-2)(X-1)^2$
Ecrivons donc $P_A = P_1 P_2$, $P_1 = X-2$, $P_2 = (X-1)^2$. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a $P_A(A) = \Theta$ (endomorphisme nul). Et donc, comme
$P_1 \wedge P_2 = 1$, le théorème de décomposition des noyaux donne :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^3 &= \text{Ker}\big(P_A(A)\big) \\ &= \text{Ker}\big(P_1(A)\big) \bigoplus \text{Ker}\big(P_2(A)\big) \\ &= \text{Ker}\big(A - 2I_3\big) \bigoplus \text{Ker}\big((A - I_3)^2\big) \qquad (\mathbf{1}) \end{aligned}$$

Ce qui a été fait jusqu'ici est à comprendre et à savoir faire.

$\star$ La valeur propre 2 ne pose pas de problème : c'est une valeur propre simple, le sous-espace propre associé est de dimension 1. On en trouve une base en résolvant le système $AX = 2X$; le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ convient.
$\star$ Pour la valeur propre 1, c'est un peu plus compliqué, car la résolution de $AX = X$ ne donne qu'un sous-espace propre de dimension 1, engendré par $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Et si on se contente de trouver une base de $\text{Ker}\big((A - I_3)^2\big)$, on aura une matrice diagonale par blocs, mais pas nécessairement triangulaire (pourquoi diagonale par blocs ? si u désigne l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ canoniquement as-

socié à A, $\text{Ker}\big((u-Id)^2\big)$ est le noyau d'un endomorphisme qui commute avec u, il est donc stable par u. La matrice de u dans une base obtenue en adjoignant au vecteur propre pour 2 une base de $\text{Ker}\big((u-Id)^2\big)$ sera donc de la forme $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$).
C'est ici qu'intervient le résultat sur les noyaux itérés : on sait que

$$\text{Ker}(A - I_3) \subset \text{Ker}\big((A - I_3)^2\big)$$

L'inclusion est stricte, sinon A serait diagonalisable (en utilisant**(1)**).
Choisissons un vecteur V (on l'appelle vecteur, mais on le considère comme une matrice colonne, dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbf{R})$) dans $\text{Ker}\big((A-I_3)^2\big) \setminus \text{Ker}(A - I_3)$.
Si $W = (A - I_3)V$, alors $W \in \text{Ker}(A - I_3)$ et $W \neq 0$, donc (V, W) est libre. De plus,

$$AW = W \qquad , \qquad AV = V + W$$

donc si la matrice P a pour colonnes successives $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, W et V, on aura

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 1 : Ici, on aurait pu faire plus simple : en première colonne le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, en deuxième colonne un vecteur propre pour la valeur propre 1 (par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$), en troisième colonne n'importe quoi pourvu que la matrice soit inversible, on aurait obtenu une matrice semblable à A de la forme $\begin{pmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (pourquoi ?).

Remarque 2 : …mais la méthode présentée permet surtout de traiter des cas plus compliqués, par exemple trigonaliser la matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

XII Annexe 3 : Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants

XII.1 Introduction

Si vous n'avez pas envie de savoir en quoi la réduction des matrices est un outil parfaitement adapté à l'étude des suites vérifiant une relation de récurrence à coefficients constants, vous pouvez vous contenter du minimum à connaître pour les concours, inclus dans le programme de MPSI :

Résultats à savoir

Soit a et b deux éléments d'un corps $\mathbf{K}$. On note F l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{1}$$

On suppose $(a, b) \neq (0,0)$.
L'équation caractéristique de (1) est l'équation $r^2 - ar - b = 0$.
• Si l'équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2, les suites qui vérifient (1) sont les suites dont le terme général est de la forme

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \ .$$

• Si l'équation caractéristique admet une racine double r_0, les suites qui vérifient (1) sont les suites dont le terme général est de la forme

$$u_n = (\alpha + n\beta) r_0^n.$$

• Si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, si l'équation caractéristique admet deux racines complexes conjuguées non réelles $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$, alors les suites réelles qui vérifient (1) sont les suites dont le terme général est de la forme

$$u_n = r^n\big(\alpha \cos(n\theta) + \beta \sin(n\theta)\big)$$

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbf{R}^2$.

XII.2 Préambule

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites d'éléments de $\mathbf{K}$, autrement dit deux éléments de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Soit λ un élément de $\mathbf{K}$. On définit
$u + v = (u_n + v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
$\lambda u = (\lambda u_n)_{n\in\mathbf{N}}$.
On vérifie sans peine que $(\mathbf{K}^{\mathbf{N}}, +, .)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

XII.3 Suites vérifiant une relation de récurrence linéaire à coefficients constants

Soit a et b deux éléments de $\mathbf{K}$. Soit F l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \tag{1}$$

(Un exemple célèbre : la suite de Fibonacci est définie par

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \textit{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n)$$

On vérifie sans peine que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & F & \longrightarrow & \mathbf{K}^2 \\ & u & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$

est un isomorphisme, ce qui montrer que F est de dimension 2.

XII.4 Ecriture matricielle

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. On définit la suite $U = (U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{K})$ par

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$$

La relation (1) s'écrit alors

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad U_{n+1} = AU_n \tag{2}$$

où A est une matrice carrée d'ordre 2 :

Si (2) est vérifiée, U_n s'exprime simplement en fonction de A et de U_0 :

XII.5 Etude dans le cas de diagonalisabilité

Démontrer que A est diagonalisable si et seulement si l'équation

$$r^2 - ar - b = 0 \tag{E}$$

admet deux racines distinctes. On se place dans ce cas : soit r_1, r_2 les deux racines de (E) ((E) est appelée équation caractéristique de la récurrence (1)). Démontrer que les suites qui vérifient (1) sont les suites dont le terme général est de la forme

$$u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \, .$$

Application : déterminer le terme général de la suite de Fibonacci présentée en **2.** Trouver un équivalent de ce terme général lorsque l'indice tend vers l'infini.

XII.6 Etude dans le cas de trigonalisabilité

On suppose ici que l'équation $r^2 - ar - b = 0$ admet une racine double r_0 (dans quel cas cette racine est-elle nulle ? on écarte désormais ce cas). Démontrer que A est trigonalisable mais non diagonalisable, puis que les suites qui vérifient (1) sont les suites dont le terme général est de la forme

$$u_n = (\alpha + n\beta) r_0^n.$$

On pourra utiliser le lemme suivant :

Lemme Toute matrice $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\mu \neq 0$ est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Démonstration du lemme Il est fortement conseillé d'aborder le problème de la manière suivante : soit u l'endomorphisme de $\mathbf{K}^2$ canoniquement associé à $\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. En modifiant « légèrement » la base canonique de $\mathbf{K}^2$, déterminer une base B de $\mathbf{K}^2$ telle que

$$M_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Digression (exercice d'oral) Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$) une matrice nilpotente. On note

$$S(N) = \left\{PNP^{-1}\ ;\ P \in GL_n(\mathbf{C})\right\}$$

l'ensemble des matrices semblables à N (c'est la « classe de similitude » de N). Montrer qu'il existe une suite d'éléments de $S(N)$ qui converge vers 0.

Application : déterminer le terme général de la suite définie par

$$u_0 = 1\ ,\ u_1 = -1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}\ \ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\ .$$

XII.7 Etude spécifique dans le cas réel

On remarque que si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ on est dans le cas **4.** ou **5.** Mais si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, l'équation caractéristique peut n'avoir aucune racine réelle. Plaçons-nous dans ce cas. L'équation caractéristique a alors deux racines complexes conjuguées $re^{i\theta}$ et $re^{-i\theta}$. Démontrer qu'alors les deux suites de termes généraux $u_n = r^n \cos n\theta$ et $v_n = r^n \sin n\theta$ forment une base de l'espace des suites réelles qui vérifient (1). L'ensemble des suites réelles qui vérifient (1) est donc l'ensemble des suites dont le terme général est de la forme

$$u_n = r^n\big(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)\big).$$

Application : Déterminer le terme général de la suite réelle définie par

$$u_0 = 0\ ,\ u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N}\ \ u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n\ .$$

XII.8 Quelques applications immédiates

Déterminer les suites réelles qui vérifient

1. $u_0 = 1\ , u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbf{N}\quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
2. $\forall n \in \mathbf{N}\quad v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ et la suite (v_n) est bornée.
3. $w_0 = 2\ , w_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbf{N}\quad w_{n+2} = 4w_{n+1} - 4w_n$.

XII.9 Un exercice

Soit p un entier naturel non nul fixé. A quelle condition sur le réel α existe-t-il des suites réelles non nulles vérifiant
$u_0 = u_p = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+2} = 2\cos\alpha \; u_{n+1} - u_n$?

XII.10 Extension

Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2, et $(a_1, \ldots, a_p)$ un p-uplet d'éléments de $\mathbf{K}$. Soit F l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+p} = a_1 u_{n+p-1} + a_2 u_{n+p-2} + \cdots + a_p u_n \,. \tag{1'}$$

On vérifie que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Quelle est sa dimension ?
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbf{K}$. On définit la suite $U = (U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ par

$$U_n = {}^t\begin{pmatrix} u_n & u_{n+1} & \cdots & u_{n+p-1} \end{pmatrix} .$$

Démontrer qu'alors la relation (1′) est équivalente à

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad U_{n+1} = AU_n \tag{2'}$$

où A est une matrice carrée d'ordre p à déterminer.
Calculer le polynôme caractéristique de A. Qu'en conclut-on ?

XII.11 Utilisation des polynômes d'endomorphismes

On considère l'endomorphisme Δ de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ défini de la manière suivante : si $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$, alors $\Delta(u) = (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$. On reprend les notations du **2.**.

1. Déterminer un polynôme P tel que $F = \ker\big(P(\Delta)\big)$.
2. On suppose que P admet deux racines distinctes ; retrouver alors le résultat du **4.** en appliquant le lemme de décomposition des noyaux.
3. On suppose que P admet une racine simple ; peut-on alors retrouver le résultat du **5.** ?

XIII Annexe 4 : résumé des résultats sur polynômes et réduction

XIII.1 Polynômes et valeurs propres

Les valeurs propres d'un endomorphisme ou d'une matrice sont les racines de son polynôme carctéristique et les racines de son polynôme minimal. Donc le polynôme caractéristique et le polynôme minimal ont les mêmes racines.
Si P est un polynôme annulateur, les valeurs propres sont racines de P, mais il peut y avoir des racines de P non valeurs propres : le spectre de l'endomorphisme ou de la matrice est inclus dans l'ensemble des zéros de n'importe quel polynôme annulateur.

XIII.2 Polynômes et diagonalisabilité

Si le polynôme caractéristique est scindé à racines simples, l'endomorphisme (ou la matrice) est diagonalisable.
L'endomorphisme (ou la matrice) est diagonalisable si et seulement si il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.
L'endomorphisme (ou la matrice) est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples.

XIII.3 Polynômes et trigonalisabilité

Il y a trigonalisabilité si et seulement si le polynôme caractéristique est scindé, si et seulement si il y a un polynôme annulateur scindé, si et seulement si le polynôme minimal est scindé.

Table des matières