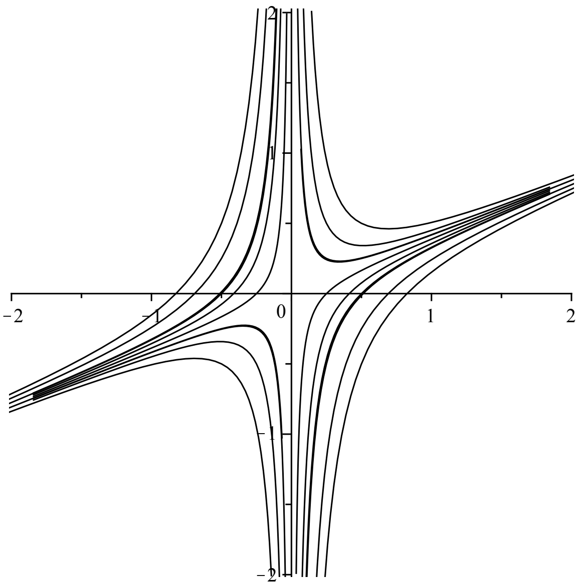
Al4 : Diagonalisation des endomorphismes et des matrices



Solutions d'un système différentiel $X' = AX$,
avec $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{R})$ diagonalisable

I Eléments propres d'un endomorphisme

I.1 Définition

a Valeurs propres, vecteurs propres

Définition Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, si $u \in L(E)$, on dit que $\lambda \in \mathbf{K}$ est valeur propre de u lorsqu'il existe x non nul, $x \in E \setminus \{0_E\}$, $x \neq 0_E$, tel que

$$u(x) = \lambda x$$

On dit alors que x est **vecteur propre** de u associé à la valeur propre λ.

Autrement dit, un vecteur propre de u est un vecteur **non nul** x tel que $u(x)$ soit lié avec x.

b Vecteurs propres et droites stables

Proposition x est vecteur propre de u si et seulement si la droite vectorielle $\text{Vect}(x)$ est stable par u.

On remarque sans difficulté que si x est vecteur propre de u, tous les αx, $\alpha \neq 0$, le sont.

c Sous-espaces propres

Définition Si λ est une valeur propre de u, le sous-espace propre de u associé à λ est

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) = \text{Ker}(\lambda \text{Id}_E - u)$$

On a donc

$$E_\lambda(u) = \{x \in E\ ;\ u(x) = \lambda x\}$$

ce qui signifie que $E_\lambda(u)$ est constitué des vecteurs propres de u auxquels on rajoute 0_E (qui, on le rappelle, n'est pas, lui, un vecteur propre !).

I.2 Exemples

Si on demande de déterminer les « éléments propres » d'un endomorphisme, il s'agit d'en trouver les éventuelles valeurs propres et sous-espaces propres. Les vecteurs propres sont les éléments non nuls des sous-espaces propres.

a Éléments propres d'un projecteur

Soit p un projecteur d'un espace vectoriel E. Déterminer les éléments propres de p.

b Éléments propres d'une symétrie

Soit s une symétrie (i.e. un endomorphisme involutif) d'un espace vectoriel E. Déterminer les éléments propres de s.

c Éléments propres d'une homothétie

Soit h l'homothétie de rapport k sur l'espace vectoriel E. Déterminer les éléments propres de h.

d Éléments propres de la dérivation sur $\mathbf{K}[X]$

Déterminer les éléments propres de

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbf{K}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}[X] \\ P & \longmapsto & P' \end{array}$$

e Éléments propres de la dérivation sur $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$

Déterminer les éléments propres de

$$u: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f' \end{array}$$

où $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R},\mathbf{C})$.

f Un endomorphisme sans valeur propre

Donner un endomorphisme (géométriquement simple) du plan euclidien E qui n'a aucune valeur propre.

II En dimension finie

II.1 Caractérisation des valeurs propres en dimension finie; spectre

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, λ un élément de $\mathbf{K}$. On peut écrire :

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } u &\iff \exists x \neq 0_E \;\; u(x) = \lambda x \\ &\iff u - \lambda \mathrm{Id}_E \text{ non injective} \\ &\iff u - \lambda \mathrm{Id}_E \not\in \mathrm{GL}(E) \\ &\Big(\iff \lambda \mathrm{Id}_E - u \not\in \mathrm{GL}(E) \Big) \end{aligned}$$

Question : quelle équivalence n'est pas vraie si on n'est pas en dimension finie ?

Proposition-Définition Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$. On appelle spectre de u l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que

$$\lambda \mathrm{Id}_E - u \not\in \mathrm{GL}(E)$$

Le spectre de u est l'ensemble des valeurs propres de u :

$$\Big(\lambda \text{ valeur propre de } u\Big) \iff \Big(\lambda \in \mathrm{Sp}(u)\Big)$$

Ceci n'est vrai qu'en dimension finie.

En dimension quelconque, le spectre de u est par définition l'ensemble des $\lambda \in \mathbf{K}$ *tels que* $u - \lambda \mathrm{Id}_E \notin \mathrm{GL}(E)$. *Les valeurs propres de u sont donc dans le spectre de u, mais il peut y avoir dans le spectre de u des* μ *tels que* $u - \mu \mathrm{Id}_E$ *soit injective et non surjective. Le spectre d'un endomorphisme n'est donc plus l'ensemble de ses valeurs propres. Le spectre d'un endomorphisme en dimension non finie n'est d'ailleurs pas au programme, ce qui limite le risque de confusion.*

II.2 Eléments propres d'une matrice

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, $u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^n)$ l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Définition Les valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre de A sont ceux de u.

Précisons un peu :

$$\begin{aligned}
\lambda \text{ valeur propre de } A &\iff \lambda \text{ valeur propre de } u \\
&\iff \exists x \neq 0_{\mathbf{K}^n} \quad u(x) = \lambda x \\
&\iff \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \{0\} \quad AX = \lambda X
\end{aligned}$$

On retient donc

Proposition Les valeurs propres de la matrice carrée A sont les $\lambda \in \mathbf{K}$ tels que le système

$$(\lambda I_n - A)X = (0)$$

ait des solutions non nulles.

Remarque X est une colonne.

Donc la détermination du spectre de A ne demande pas de passer par u.
On peut dire que les valeurs propres de A sont les λ pour lesquels le système

$$(A - \lambda I_n)X = 0$$

n'est pas de Cramer ; en effet, ce système carré a déjà, pour tout λ, la colonne nulle pour solution. Il a donc des solutions non nulles si et seulement s'il n'est pas de Cramer.

Les valeurs propres de A sont donc les λ pour lesquels

$$\det(A-\lambda I_n)=0$$

On voit aussi que $x=(x_1,\dots,x_n)$ est vecteur propre de A asssocié à la valeur propre λ si et seulement si $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$ est solution non nulle de $AX=\lambda X$. L'identification de x et de X conduit souvent à appeler vecteur propre de A toute colonne non nulle X telle qu'il existe λ vérifiant

$$(\lambda I_n-A)X=0$$

Exercice : Déterminer les éléments propres de la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Exercice : Déterminer les éléments propres de la matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{C})$ telle que $a_{i,i+1}=1$ si $1\le i\le n-1$, $a_{n,1}=1$, $a_{i,j}=0$ sinon.

II.3 Caractérisation de l'inversibilité par le spectre

Proposition Soit $u\in\mathscr{L}(E)$, E espace de dimension finie.

$$u\in\mathbf{GL}(E)\iff 0\notin\mathrm{Sp}(u)$$

Soit n un entier naturel non nul :

$$A\in\mathbf{GL}_n(\mathbf{K})\iff 0\notin\mathrm{Sp}(A)$$

II.4 Spectre réel, spectre complexe

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Le spectre réel de A, noté parfois $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres réelles de A. Mais A peut aussi être considérée comme matrice complexe. Son spectre complexe est l'ensemble de ses valeurs propres complexes, noté parfois $\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(A)$. On a

$$\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(A)\subset\mathrm{Sp}_{\mathbf{C}}(A)$$

et l'inclusion peut être stricte.

Exemple : Déterminer les valeurs propres réelles et complexes de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Plus généralement, si $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{L}$, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on peut écrire, avec des notations « évidentes » :

$$\mathrm{Sp}_{\mathbf{K}}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbf{L}}(A)$$

II.5 Eléments propres d'un endomorphisme et de sa matrice dans une base

a Valeurs propres : ce sont les mêmes

Proposition Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$, $A = M_{\mathscr{B}}(u)$. Alors

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$$

b Vecteurs propres et sous-espaces propres

On reprend les notations du paragraphe précédent. Soit λ une valeur propre de A (ou de u, on vient de voir que cela revient au même) ; en notant $X = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(x)$,

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff AX = \lambda X \\ &\iff X \in E_\lambda(A) \end{aligned}$$

La détermination des sous-espaces propres de u se ramène donc à celle des sous-espaces propres de A (et réciproquement d'ailleurs).

II.6 Eléments propres de matrices semblables

a Valeurs propres : ce sont les mêmes

Proposition Deux matrices semblables ont même spectre.

b Vecteurs propres et sous-espaces propres

On peut aussi ramener la détermination des sous-espaces propres d'une matrice à celle des sous-espaces propres d'une matrice semblable. Pour ceci, écrivons $A = PBP^{-1}$ (A, B, P sont des matrices carrées de même format, P est inversible) ;

$$\begin{aligned} AX = \lambda X &\iff PBP^{-1}X = \lambda X \\ &\iff BP^{-1}X = \lambda P^{-1}X \\ &\iff BY = \lambda Y \quad \text{et} \quad X = PY \end{aligned}$$

On voit donc que, si λ est une valeur propre de A (ou de B, cela revient au même), l'application $Y \mapsto PY$ est un isomorphisme de $E_\lambda(B)$ sur $E_\lambda(A)$ (l'isomorphisme réciproque étant $X \mapsto P^{-1}X$).

Les valeurs propres de deux matrices semblables sont donc les mêmes. Les vecteurs propres (et donc les sous-espaces propres) ne sont pas les mêmes, mais les sous-espaces propres associés à une valeur propre donnée ont même dimension (ils sont isomorphes).

III Polynôme caractéristique

III.1 Polynôme caractéristique d'une matrice

a Définition

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on définit

$$\chi_A = \det(XI_n - A) \in \mathbf{K}[X]$$

La « tradition » française allait naguère plutôt majoritairement vers

$$\chi_A = det(A - XI_n)$$

que l'on peut éventuellement retrouver dans un énoncé. Ce qui ne fait qu'une différence de signe, il faut savoir s'adapter. En effet,

$$\det(XI_n - A) = \qquad\qquad \det(A - XI_n)$$

Après quelques années de P, le polynôme caractéristique est de nouveau officiellement nommé χ. La lettre grecque chi (prononcer ki) est surtout célèbre en statistiques, avec le test du χ^2 (prononcer ki deux, surtout pas chi carré).

b Quelques coefficients

Proposition Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\det(XI_n - A) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$$

III.2 Polynôme caractéristique et valeurs propres

a Proposition

Proposition Les valeurs propres d'une matrice sont les racines de son polynôme caractéristique.

Remarque Le polynôme caractéristique est très important...mais ce n'est pas toujours la meilleure manière de déterminer les valeurs propres d'une matrice. Il faut savoir revenir à la définition et considérer le système

$$AX = \lambda X$$

qui dans certains cas est plus simple. L'exemple le plus fréquent est celui des matrices compagnes.

Exemple 1 Déterminer les valeurs propres de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 Sans chercher à déterminer le polynôme caractéristique de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$$

montrer que ses valeurs propres sont les racines d'un polynôme que l'on déterminera.

Les résultats suivants sont des transcriptions en termes de valeurs propres de résultats connus sur les polynômes. Quoique leur formulation soit nouvelle, ils ne doivent donc pas être trop difficiles à mémoriser.

b Multiplicité ; nombre de valeurs propres

Définition On dit que λ est valeur propre de A de multiplicité m lorsque λ est racine de multiplicité m du polynôme caractéristique de A .

Proposition Le nombre de valeurs propres de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, comptées autant de fois que leur multiplicité, est inférieur ou égal à n.

c Sur C

Proposition Le nombre de valeurs propres de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{C})$, comptées autant de fois que leur multiplicité, est égal à n.

d Sur R, en dimension impaire

Proposition Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Si n est impair, alors $\mathrm{Sp}_{\mathbf{R}}(A) \neq \emptyset$

e Valeurs propres complexes non réelles d'une matrice réelle

Proposition Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Si λ est une valeur propre complexe non réelle de A, $\overline{\lambda}$ en est une autre, avec même multiplicité.

f Valeurs propres d'une matrice diagonale ou triangulaire

Elles sont très faciles à déterminer.

g Elements propres de la transposée

Proposition : A et A^T ont mêmes valeurs propres. Autrement dit,

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T)$$

Les multiplicités sont également les mêmes.

En revanche, une matrice et sa transposée n'ont pas mêmes vecteurs propres ni mêmes sous-espaces propres.
Ce qui ne signifie pas qu'on ne puisse rien dire :
Proposition si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, les sous-espaces propres de A et A^T associés à la valeur propre λ ont même dimension.

III.3 Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

a Polynôme caractéristique de deux matrices semblables

Proposition Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique.

b Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Définition Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Le polynôme caractéristique de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ de E. On l'appelle polynôme caractéristique de u, et on n'hésite pas à l'écrire

$$\chi_u = \det(X\mathrm{Id}_E - u)$$

Mais pourquoi hésiterait-on ? parce qu'autant $\det(XI_n - A)$ *est le déterminant d'une matrice à coefficients dans un corps* ($\mathbf{K}(X)$)*, autant il est beaucoup plus épineux de donner un sens, dans le cadre de notre programme, à* $X\mathrm{Id} - u$*. Mais cela ne posera pas de problème.*

III.4 Quand χ_u ou χ_A est scindé, expression de la trace et du déterminant à l'aide des valeurs propres

On se souviendra facilement de ces relations en regardant les matrices triangulaires supérieures, pour lesquelles elles sont assez évidentes. D'ailleurs, comme on le verra, le fait que le polynôme caractéristique soit scindé équivaut à la trigonalisabilité.

IV Diagonalisabilité

IV.1 Deux propositions préliminaires

NB : La réduction, c'est en général dans les espaces de dimension finie. Mais le **I** ne supposait pas que l'on soit en dimension finie. Et ici, de nouveau, on énonce quelques résultats vrais sans hypothèse de dimension.

Proposition 1 Soit $(E,+,.)$ un **K**-espace vectoriel, $u \in \mathscr{L}(E)$.

Si $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ sont des valeurs propres de u deux à deux distinctes, alors la somme

$$E_{\lambda_1}(u)+\cdots+E_{\lambda_p}(u)$$

est directe, et s'écrit donc

$$E_{\lambda_1}(u)\oplus\cdots\oplus E_{\lambda_p}(u)$$

Formulation brève : Des sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe.

Proposition 2 Formulation brève : une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, où E est un espace vectoriel, soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes :

$$\forall i \in I \qquad u(x_i)=\lambda_i x_i \quad \text{et} \quad x_i \neq 0_E$$

avec $(i \neq j) \Rightarrow (\lambda_i \neq \lambda_j)$. Alors $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

Remarques : Insistons : on n'a pas besoin d'une hypothèse de dimension finie pour E. Comme c'est l'un des rares résultats de ce chapitre qui ne soit pas réservé à la dimension finie, et comme on l'utilise parfois en « dimension quelconque », il faut le noter.

Les deux résultats énoncés ne sont pas sans rapport entre eux, mais on remarquera que dans le second, la famille peut être infinie, alors que dans le premier, comme on ne sait pas ce qu'est une somme directe d'une infinité de sous-espaces, la famille de sous-espaces est finie.

Exemple : On considère $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{C}}$ avec, pour tout λ,

$$e_\lambda\ :\ t\mapsto e^{\lambda t}$$

Montrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda\in\mathbf{C}}$ est libre.

Démonstration de la proposition 1 : Par récurrence sur le nombre de sous-espaces.

Démonstration de la proposition 2 : Elle peut se déduire de la proposition 1. Mais c'est bien de savoir la démontrer directement.
Commençons par rappeler qu'une famille est libre si et seulement si toute sous-famille finie de cette famille est libre. Ceci est dû au fait qu'une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs d'une famille est une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs d'une sous-famille finie (dans une combinaison linéaire, il y a au plus un nombre fini de coefficients non nuls).
Montrons alors par récurrence le résultat suivant :
$\mathscr{P}_p$: « Une famille de p vecteurs propres associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes est libre ».
Initialisation : $\mathscr{P}_1$ est simple : un vecteur propre ne peut pas être nul, et un vecteur non nul constitue une famille libre.
Récurrence : Supposons $\mathscr{P}_p$. Soit u un endomorphisme, $x_1,\ldots,x_{p+1}$ des vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p+1}$ respectivement. On suppose les λ_i deux à deux distincts. Si

$$\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_{p+1}x_{p+1}=0_E \tag{1}$$

en prenant les images par u des deux membres on obtient

$$\alpha_1\lambda_1 x_1+\ldots+\alpha_{p+1}\lambda_{p+1}x_{p+1}=0_E \tag{2}$$

et, en retranchant à (2) λ_{p+1} fois (1), on obtient

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_{p+1})x_1+\ldots+\alpha_p(\lambda_p-\lambda_{p+1})x_p=0_E \tag{3}$$

Par application de $\mathscr{P}_p$ on obtient que, pour tout k dans $[\![1,p]\!]$, $\alpha_k(\lambda_k-\lambda_{p+1})=0$, donc $\alpha_k=0$. Tenant alors compte de (1) et du fait que $x_{p+1}\neq 0$, on conclut que $\alpha_{p+1}=0$. D'où $\mathscr{P}_{p+1}$.

NB : Dorénavant, jusqu'à la fin du chapitre, comme dans le **II.** et le **III.**, on est en dimension finie.

IV.2 Diagonalisabilité d'un endomorphisme

Définition Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est dit diagonalisable lorsqu'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Définition (bis) Autrement dit : un endomorphisme u de E (E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie) est diagonalisable lorsqu'il existe une base de E constituée de vecteurs propres de u.

IV.3 Endomorphismes : caractérisations 1 et 1 bis

Caractérisation 1 Un endomorphisme $u \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement si E est somme (directe, nécessairement) des sous-espaces propres de u.

$$\Big(u \text{ diagonalisable}\Big) \iff \Big(\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E\Big)$$

Caractérisation 1 bis $u \in L(E)$ est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à la dimension de l'espace :

$$\Big(u \text{ diagonalisable}\Big) \iff \Big(\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim\left(E_\lambda(u)\right) = \dim(E)\Big)$$

Exemples Montrer que les projecteurs et les symétries sont diagonalisables.

Un exercice

1. Soit u un endomorphisme. Montrer que tout sous-espace propre associé à une valeur propre non nulle est inclus dans $\mathrm{Im}(u)$.
2. Montrer que tout vecteur propre de u est dans $\mathrm{Im}(u)$ ou dans $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Montrer que pour que u soit diagonalisable, il est nécessaire que
$$\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$$
4. Montrer que si $E = \mathbf{K}_n[X]$ et $u : P \longmapsto P - P'$, alors $\mathrm{Ker}(u) \oplus \mathrm{Im}(u) = E$ mais u n'est pas diagonalisable.

IV.4 Endomorphismes : caractérisation 2

Lemme important Soit u un endomorphisme d'un espace de dimension finie E, λ une valeur propre de multiplicité m_λ de u. Alors, en notant

$$E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$$

le sous-espace propre associé,

$$\dim(E_\lambda) \leq m_\lambda$$

Démonstration On écrit la matrice de u dans une base adaptée à $E_\lambda(u)$, puis on calcule le polynôme caractéristique en utilisant un déterminant par blocs.

Remarque L'inégalité peut être stricte, et même très, très stricte comme le montre l'exemple de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Si on se souvient qu'il y a une inégalité entre la dimension du sous-espace propre et la multiplicité de la valeur propre, il est facile de retrouver dans quel sens est cette inégalité en prenant l'exemple des matrices triangulaires à coefficients diagonaux tous égaux.

Caractérisation 2 Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si il vérifie (simultanément) les deux conditions suivantes :

(i) Son polynôme caractéristique est scindé.

(ii) La multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

Plus détaillé :

L'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique s'écrit

$$P_u = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)^{m_i}$$

et, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $m_i = \dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)) = \dim\big(E_{\lambda_i}(u)\big)$.

Démonstration On utilise la caractérisation 1 bis.

Une utilisation classique est le critère de diagonalisabilité des matrices compagnes (voir exercices).
On retiendra aussi que la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

est typiquement non diagonalisable.
Une autre utilisation est la condition suffisante suivante :

IV.5 Une condition suffisante, simple et importante

Proposition Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, $u \in \mathscr{L}(E)$. Si u a n valeurs propres distinctes, il est diagonalisable. Et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

IV.6 Caractérisation h.p.

Proposition $u \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable si et seulement si E est somme directe de sev stables par u et sur chacun desquels u induit une homothétie.

Démonstration (exercice) Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si et seulement s'il existe des sous-espaces $F_1, \dots, F_q$ de E, tous stables par u, et tels que sur chaque F_k l'endomorphisme induit par u soit une homothétie.

IV.7 Diagonalisabilité des matrices carrées

a Remarques préliminaires

Rappelons que l'on appelle indifféremment vecteur propre de la matrice carrée A :
Tout $x \in \mathbf{K}^n \setminus \{0_{\mathbf{K}^n}\}$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ vérifiant $u(x) = \lambda x$, où u est l'endomorphisme canoniquement associé à A.
Tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \setminus \{(0)\}$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ vérifiant $AX = \lambda X$.

Les vecteurs propres de A sont donc dans $\mathbf{K}^n$ ou dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ suivant le choix que l'on fait. Passer de $\mathbf{K}^n$ à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, c'est simplement écrire en colonne ce qu'on a écrit en ligne. Et il est fréquent dans les énoncés d'identifier un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{K}^n$ et la matrice colonne de ses composantes dans la base canonique : on note alors aussi

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

ce qui fait que ${}^t x = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$.

Ce qui vient d'être vu sur les endomorphismes se traduit aisément en termes matriciels. Il faut faire l'effort, néanmoins, d'être capable de tout formuler correctement dans le bon contexte (matrices ou endomorphismes).

b Les caractérisations

Proposition Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$; les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. L'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable.
2. Il existe une base de $\mathbf{K}^n$, ou de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$ (suivant ce qu'on appelle vecteur propre de A) formée de vecteurs propres de A.
3. Il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que

$$A = PDP^{-1}$$

4. $\mathbf{K}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$) est somme directe des sous-espaces propres de A.
5. La somme des dimensions des sous-espaces propres de A est égale à n.
6. Le polynôme caractéristique de A est scindé, et, pour chaque valeur propre λ, avec les notations habituelles,

$$\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda$$

On dit d'une matrice A vérifiant ces conditions qu'elle est diagonalisable. On considèrera la troisième propriété comme une définition :

Définition On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ est diagonalisable lorsqu'il existe $D \in \mathscr{D}_n(\mathbf{K})$ et $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telles que

$$A = PDP^{-1}$$

et les autres propriétés seront alors considérées comme des caractérisations.

c Diagonalisabilité d'un endomorphisme, de sa matrice

Proposition Soit E un espace vectoriel de dimension finie, $u \in L(E)$, B une base de E.
u est diagonalisable si et seulement si $M_B(u)$ est diagonalisable.

d Remarque importante sur $A = PDP^{-1}$

On utilise souvent la caractérisation 3. de la diagonalisabilité. Et quand un énoncé donne une matrice A et dit qu'elle est diagonalisable, on écrit souvent automatiquement :
Soit $P \in GL_n(\mathbf{K})$ et $D \in D_n(\mathbf{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.
Il est utile de connaître la signification de D et de P : P est la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{K}^n$ à une base de vecteurs propres de A (i.e. de l'endomorphisme canoniquement associé à A). Autrement dit, les colonnes de P sont des vecteurs propres de A, associés aux valeurs propres figurant sur la diagonale de D, dans le même ordre. On retrouve d'ailleurs facilement cette interprétation en écrivant la relation équivalente

$$AP = PD \tag{1}$$

Si $P = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ c_1 & \vdots & c_2 & \vdots & \cdots & \vdots & c_n \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$ et si $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, la relation (1) s'écrit

$$\begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ Ac_1 & \vdots & Ac_2 & \vdots & \cdots & \vdots & Ac_n \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \lambda_1 c_1 & \vdots & \lambda_2 c_2 & \vdots & \cdots & \vdots & \lambda_n c_n \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

Exemple : Proposer quelques choix possibles pour P et D avec la matrice J carrée 4×4 dont tous les coefficients valent 1.

e Condition suffisante

Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples (i.e. si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ a n valeurs propres distinctes), alors A est diagonalisable. Et les sous-espaces propres sont des droites vectorielles.

f Remarques

D'abord une
Remarque importante : Eviter d'écrire « A diagonalisable » sous la forme « il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que $A = P^{-1}DP$ », car on perd l'interprétation naturelle de P comme matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres. On utilisera donc systématiquement PDP^{-1}.

Diagonaliser A, c'est trouver une matrice de passage P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$, ou (ce peut être intéressant de voir les choses de cette manière) $PD = AP$. Sauf si c'est expressément demandé, il n'est pas nécessaire de calculer P^{-1}. D est unique à l'ordre des coefficients diagonaux près. P n'est en revanche pas du tout unique.

g Quelques diagonalisations

1. **Une diagonalisation classique :** Diagonaliser la matrice J dont tous les coefficients sont égaux à 1. Puis diagonaliser la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $a_{i,j} = \alpha$ si $i = j$, $a_{i,j} = \beta$ sinon.

2. **Une diagonalisation typique :** On considère la matrice $A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \le i,j \le n} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ avec $a_{i,j} = 1$ si $i = n$ ou $j = n$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(A)$ et une base de $\mathrm{Im}(A)$. Puis montrer que A est diagonalisable.

   Retenir que beaucoup de matrices à diagonaliser sont de rang petit, donc ont un noyau de grande dimension. Or le noyau est déjà un sous-espace propre.

3. **Une diagonalisabilité :** Montrer que la matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est diagonalisable, où $a_{i,j} = 0$ si $i > j$, $a_{i,j} = i + j$ sinon.

4. **Une question classique :** Décrire toutes les matrices diagonalisables ayant une unique valeur propre.

h Diagonalisabilité de la transposée

Proposition : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, [A diagonalisable] $\Longleftrightarrow$ [A^T diagonalisable].

i Une formulation incorrecte

Confondre matrices et endomorphismes est courant, y compris dans des énoncés de concours. Mais cela ne peut se faire qu'avec le minimum d'expérience qui permet d'éviter les formulations incorrectes. Par exemple, ne pas dire : la matrice A est diagonalisable, il y a une donc une base dans laquelle A est diagonale.

Table des matières