Dérivation

- Le théorème de Rolle est fréquemment utilisé, mais ne s'applique qu'aux fonctions à valeurs réelles.
- De même, la **formule** des accroissements finis n'est valable que pour des fonctions à valeurs réelles, alors que l'**inégalité** des accroissements finis est, elle, valable dans un cadre beaucoup plus large. Cette dernière ne permet que des majorations, alors que la formule autorise aussi des minorations. Une erreur classique est, si f est une fonction à valeurs complexes, de déduire de $|f'| \geq m$ que $|f(b) - f(a)| \geq m(b-a)$. Notons de plus que, pour déduire de connaissances sur la dérivée des conclusions sur la fonction, la formule $f(t) = f(a) + \displaystyle\int_a^b f'(t)\,dt$ est souvent plus utile que la formule des accroissements finis.
- Le théorème « limite de la dérivée » et le retour à la définition par limite du taux d'accroissement sont les plus utilisés pour la démonstration de l'existence d'une dérivée en un point.
- La dérivabilité en a équivaut à l'existence d'un développement limité à l'ordre 1 en a. Ce n'est plus vrai à l'ordre 2.
- On ne peut pas « prolonger » une dérivée : si f' a une limite ℓ en a, ne pas dire « on peut prolonger f' en a en posant $f'(a) = \ell$ » ; en effet, $f'(a)$ est ou n'est pas défini selon la dérivabilité de f en a, et on ne peut lui attribuer d'autre valeur que... $f'(a)$.

I Exercices ccp 2015

Analyse 3

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz, concernant la dérivée $n^{\text{Ãšme}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^n(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Analyse 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a, b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a; b]$ et que f est dérivable sur $]a; x_0[$ et sur $]x_0; b[$
   Démontrer que, si f' admet une limite en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.

   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

II Dérivation des fonctions à valeurs réelles

Exercice 1 (extensions du théorème de Rolle). Soit f continue sur $]-\infty, a]$, dérivable sur $]-\infty, a[$. On suppose que f a une limite en $-\infty$, égale à sa valeur en a. Démontrer que f' s'annule en au moins un point de $]-\infty, a[$. Donner deux autres énoncés de ce type, analogues au théorème de Rolle.

Exercice 2. Soit $f\ :\ x \mapsto \arctan x$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, la dérivée $n$ième de f est de la forme

$$f^{(n)}\ :\ x \longmapsto \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$$

où P_n est une fonction polynomiale scindée simple.

Exercice 3. Montrer que, si P est un polynôme réel scindé simple, P' l'est aussi. Donner un exemple simple montrant que ce n'est plus vrai pour un polynôme complexe.

Exercice 4 (Oral X). Soit P un polynôme réel scindé (sur $\mathbf{R}$).

1. Démontrer que son polynôme dérivé P' est scindé.
2. Démontrer que, si a et b ne sont pas tous les deux nuls, $aP + bP'$ est scindé.
3. Démontrer que, si $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ est scindé, $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)}$ est scindé. *Question plus difficile ; on peut utiliser la question précédente, et l'endomorphisme $Q(D)$, D désignant l'endomorphisme de dérivation.*

---

1. On note $x_1, x_2, \ldots, x_q$ les zéros de P, on note m_i la multiplicité du zéro m_i. Alors $m_1 + \ldots + m_q = \deg(P)$. Chaque x_i est racine de P' avec multiplicité $m_i - 1$ (pour les racines simples de P, convenir qu'elles sont racines de P' avec multiplicité 0 permet d'éviter de considérer des cas). Le théorème de Rolle dit qu'il y a au moins $q-1$ racines supplémentaires de P', une dans chaque $]x_i, x_{i+1}[$ au moins. Ce qui fait en tout, au moins
$$\sum_{i=1}^{q}(m_i - 1) + (q-1) = \sum_{i=1}^{q} m_i\ \ - 1 = \deg(P')$$
racines de P'. On peut donc conclure, et ajouter qu'il n'y a pas d'autre racine, et que les y_i sont racines simples.
2. Si $a = 0$, on vient de le faire. Si $b = 0$, il n'y a rien à faire. Supposons $ab \neq 0$. Reprenons les notations de la question précédente. De nouveau, les x_i sont racines de multiplicité $m_i - 1$ de $aP + bP'$. Soit $1 \leq i \leq q-1$. P' garde un même signe strict sur $]x_i, y_i[$ d'une part, sur $]y_i, x_{i+1}[$ d'autre part (il ne s'annule sur aucun de ces intervalles). Ces signes sont opposés car y_i est racine simple de P'. De plus, P/P' est équivalent au voisinage de x_i à quelque chose du type $x \mapsto \alpha_i(x - x_i)$, donc $P =_{x_i} o\ (P')$. Et donc $aP + bP' \underset{x_i}{\sim} bP'$. Deux fonctions équivalentes en un point ont strictement même signe au voisinage de ce point, donc $aP + bP'$ a un signe différent au voisinage à droite de x_i et au voisinage à gauche de x_{i+1}. On en déduit, par théorème des valeurs intermédiaires, que $aP + bP'$ s'annule sur $]x_i, x_{i+1}[$. Ce qui fait presque assez de zéros…à un près, mais si le nombre de zéros d'un polynôme réel (comptés avec leur multiplicité) est au moins égal à son degré moins un, ce polynôme est scindé sur $\mathbf{R}$. Cela dit, on peut trouver où le zéro supplémentaire est. Supposons par exemple P de degré pair. Supposer P unitaire et $a > 0$ n'est pas restrictif. Alors P a pour limite $+\infty$ en $\pm\infty$. De plus P' a un degré impair, donc a des signes opposés avant sa plus petite racine et après sa plus grande, respectivement $-$ et $+$ car les hypothèses font que le coefficient dominant de P' est strictement positif. Donc $aP + bP'$ est, suivant le signe de b, strictement négatif au voisinage à gauche de x_1 ou au voisinage à droite de x_q (rappelons qu'au voisinage de chaque x_i, $aP + bP'$ est équivalent à bP'. Ce qui nous fournit, par théorème des valeurs intermédiaires, le zéro supplémentaire cherché avant x_1 ou après x_q. Le cas où P est de degré impair se règle (espère-t-on !) de même.
3. Question amusante, qu'on aurait pu poser de manière moins déroutante…On a
$$\sum_{k=0}^{d} a_k Q^{(k)} = [Q(D)](Q)$$
Mais $Q = \lambda \displaystyle\prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$, les α_i n'étant pas distincts. Donc
$$[Q(D)](Q) = \lambda(D - \alpha_q Id) \circ \cdots \circ (D - \alpha_1 Id)(Q)$$
Or la question précédente permet de montrer par récurrence que, pour tout $k \geq 1$, $[(D - \alpha_q Id) \circ \cdots \circ (D - \alpha_1 Id)](Q)$ est scindé…

Exercice 5. Démontrer que le polynôme

$$D^n\Big((X^2-1)^n\Big)$$

est scindé sur $\mathbf{R}$, que toutes ses racines sont simples et appartiennent à l'intervalle ouvert $]-1,1[$.

Exercice 6 (Majoration de l'erreur dans l'interpolation de Lagrange). Soit f de classe C^{n+1} sur $[a,b]$, et P_f le polynôme de degré inférieur ou égal à n qui coïncide avec f en $x_0,\dots,x_n$ où $a\leq x_0<x_1<\dots<x_n\leq b$. Démontrer que, pour tout x de $[a,b]$, il existe c dans $]a,b[$ tel que

$$f(x)=P_f(x)+\frac{1}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)f^{(n+1)}(c)\ .$$

(On examinera deux cas : celui où x est l'un des x_i, et celui où il est distinct des x_i. Dans ce dernier cas, on montrera l'existence et l'unicité d'un réel A tel que

$$f(x)=P_f(x)+A(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

et on appliquera le théorème de Rolle à la fonction

$$t\longmapsto f(t)-P_f(t)-A(t-x_0)\dots(t-x_n)\ .\ )$$

En déduire, si l'on note $M_{n+1}(f)=\sup\limits_{t\in[a,b]}\left|f^{(n+1)}(t)\right|$, que

$$\mathrm{N}_\infty(f-P_f)\ \leq\ \frac{M_{n+1}(f)}{(n+1)!}\mathrm{N}_\infty(T)$$

où $T(x)=(x-x_0)\dots(x-x_n)$. *Le principe de cette preuve est très couramment utilisé dans des majorations d'errreur*

Seul le cas où $x\notin\{x_0,\dots,x_n\}$ est intéressant. L'existence et l'unicité de A ne sont pas mystérieuses : on prend (bien obligé)

$$A=\frac{f(x)-P_f(x)}{(x-x_0)\dots(x-x_n)}$$

On note alors $\phi\ :\ t\longmapsto f(t)-P_f(t)-A(t-x_0)\dots(t-x_n)\ .\ )$. ϕ a au moins $n+2$ points d'annulation distincts sur $[a,b]$: les x_i et x. Par application répétée du théorème de Rolle, ϕ^{n+1} s'annule au moins une fois sur $]a,b[$, disons en c (si on doit rédiger à l'écrit, on montrera par récurrence que pour tout $k\in[\![1,n+1]\!]$, $\phi^{(k)}$ s'annule au moins $n+2-k$ fois sur $]a,b[$). Or $\phi^{(n+1)}(c)=f^{(n+1)}(c)-(n+1)!A$. On en déduit

$$f(x)-P_f(x)=\frac{\phi^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)\dots(x-x_n)$$

ce qui donne le résultat.

Exercice 7 (Construction de fonctions). *Le but de l'exercice est de construire des fonctions "plateau" de classe C^∞, nulles hors d'un segment $[a,b]$ et valant 1 sur un segment inclus dans $]a,b[$.*

1. On définit, si $x>0$, $\phi(x)=\exp(-1/x)$. Démontrer que ϕ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty($ et que sa dérivée k-ième est de la forme $x\mapsto P_k(1/x)\exp(-1/x)$, où P_k est polynomiale. On prolonge ϕ à $\mathbf{R}$ en définissant, si $x\leq 0$, $\phi(x)=0$. Démontrer que ϕ est de classe C^∞. Tracer l'allure (approximative) du graphe de ϕ.
2. Tracer l'allure du graphe de la fonction $x\mapsto\phi(x+2)\phi(-1-x)$, puis de son unique primitive qui a pour limite 0 en $-\infty$.
3. Construire une application ψ nulle en dehors du segment $[-2,2]$ et valant 1 sur $[-1,1]$, de classe C^∞.
4. Indiquer comment on peut construire une application nulle en dehors du segment $[a,b]$ et valant 1 sur $[c,d]$, de classe C^∞ (on suppose $a<c<d<b$).

III Exercices divers

Exercice 8 (Oral Mines). Soit $f\ :\ [0,1]\to\mathbf{R}$ une fonction dérivable. Etudier la convergence de la suite de terme général $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\big(\frac{k}{n^2}\big)$.

L'observation importante, au départ, est que lorsque n est grand tous les k/n^2 de la somme, qui sont compris entre 0 et $1/n$, sont proches de 0. On a donc envie d'approcher

$f(k/n^2)$ par $f(0)+kf'(0)/n^2$. Le problème est que cette approximation est à un o près :

$$f\left(\frac{k}{n^2}\right) = f(0) + \frac{k}{n^2}f'(0) + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Le problème est que si on ajoute ces identités pour k allant de 1 à n, on risque fort de traiter le o comme une « boîte noire »...Ajouter un nombre non fixé de o, est-ce encore un o, et si oui de quoi ? comme rien dans le cours ne semble parler de telles manipulations, on revient à la définition de la dérivabilité avec les ϵ.

Soit $\epsilon > 0$. Il existe δ tel que

$$\forall x \in [0, \delta] \qquad \left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - f'(0)\right| \leq \epsilon$$

Soit n_0 tel que $1/n_0 \leq \delta$. Si $n \geq n_0$, tous les $k \in [\![1, n]\!]$ vérifient $0 \leq k/n^2 \leq \delta$ ce qui permet d'écrire

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \left|n^2\frac{f\left(\frac{k}{n^2}\right)-f(0)}{k} - f'(0)\right| \leq \epsilon$$

ou encore

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad \left|f\left(\frac{k}{n^2}\right) - f(0) - \frac{k}{n^2}f'(0)\right| \leq \epsilon\frac{k}{n^2}$$

On peut ajouter ces inégalités, en utilisant l'inégalité triangulaire et la somme classique $\sum_{k=1}^{n} k$; on en déduit

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0) - \frac{n+1}{2n}f'(0)\right| \leq \frac{(n+1)\epsilon}{2n}$$

La suite diverge donc lorsque $f(0) \neq 0$ et converge vers $f'(0)/2$ lorsque $f(0) = 0$.

Exercice 9 (Oral X). Soit f une application continue sur $[0, +\infty[$, à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie. Démontrer que l'application

$$g \;:\; x \longmapsto \frac{1}{x}\big(f(2x) - f(x)\big)$$

a une limite en 0 si et seulement si f est dérivable à droite en 0.

Ici, on a envie de relier $g(x)$, qui est un taux d'accroissement, à des taux d'accroissement du type $(f(y)-f(0))/(y-0)$. Dans un sens (exprimer $g(x)$ à l'aide de tels taux) c'est assez facile, il suffit d'écrire

$$g(x) = \frac{f(2x) - f(0) + f(0) - f(x)}{x}$$

Mais dans l'autre sens ça l'est moins. L'idée est de se rapprocher de 0 en coupant x en 2, en 4, etc...On va voir apparaître naturellement une série. Ce n'est pas si simple...mais c'est un exercice d'oral de l' X !

Si f est dérivable à droite en 0, il suffit d'écrire

$$g(x) = \frac{f(2x) - f(0) + f(0) - f(x)}{x} = 2\frac{f(2x)-f(0)}{2x} - \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

qui tend, quand x tend vers 0, vers $f'(0)$.
Pour la réciproque, on écrit

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right) - f\left(\frac{x}{4}\right) + \cdots}{x}$$

Les points de suspension étant un petit peu douteux ici, on écrit en fait :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) - f\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)\right) = f(x) - f(0)$$

(démonstration en calculant une somme partielle, puis en regardant la limite. On utilise le fait que f est continue en 0). Pour utiliser l'hypothèse, on écrira donc

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\, g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

On appelle ℓ la limite de g en 0. On peut écrire, vu que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = 1\ ,$$

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} - \ell = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}\left(g\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) - \ell\right)$$

Soit $\epsilon > 0$, et soit $\delta > 0$ tel que pour $y \in [0, \delta]$, $|g(y) - \ell| \leq \epsilon$. On montre alors avec l'égalité ci-dessus que, si $x \in [0, \delta]$,

$$\left|\frac{f(x)-f(0)}{x} - \ell\right| \leq \epsilon$$

ce qui donne la conclusion.

Exercice 10 (Oral Mines). Donner un exemple de fonction de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$, à valeurs réelles, bornée et telle que f' ne le soit pas.

Exercice 11. *Il est rare que l'on puisse déduire de propriétés de f des propriétés de f'. Par exemple, f de classe C^1 peut avoir une limite finie en $+\infty$ sans que f' ait une limite nulle. Pire, on peut même avoir une fonction f positive décroissante, ayant une limite nulle en $+\infty$, et telle que f' ne soit pas bornée au voisinage de $+\infty$. Mais avec quelques hypothèses supplémentaires, on peut quand même obtenir des conclusions :*

1. Soit f de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, bornée, telle que f' soit uniformément continue sur $\mathbf{R}^+$. Démontrer que f' est bornée sur $\mathbf{R}^+$.
2. Soit f de classe C^1 sur $\mathbf{R}^+$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, ayant une limite finie en $+\infty$. On suppose que f' est uniformément continue. Démontrer qu'alors f' a pour limite 0 en $+\infty$.

---

1. Par l'absurde : si f' est uniformément continue et non bornée, elle prend des grandes valeurs sur des intervalles pas trop petits. Cela conduit f à varier trop pour être bornée.
   Fixons δ tel que, pour tous x et y positifs,
   $$|x-y| \leq \delta \implies |f'(x)-f'(y)| \leq 1$$
   (uniforme continuité de f', on a choisi 1 arbitrairement, il pourrait être remplacé par n'importe quel réel strictement positif fixé). Supposons f' non bornée. Pour tout $n \in \mathbf{N}_*$ il existe x_n tel que $|f'(x_n)| \geq n$. Donc, sur $[x_n-\delta, x_n+\delta]$, $|f'(x)| \geq n-1$. On peut supposer $f'(x_n) \geq 0$, le raisonnement est le même si $f'(x_n) \leq 0$. On a alors, sur $[x_n-\delta, x_n+\delta]$, $f'(x) \geq n-1$. Or il existe $c \in]x_n-\delta, x_n+\delta[$ tel que
   $$\frac{f(x_n+\delta)-f(x_n-\delta)}{2\delta} = f'(c)$$
   On a alors
   $$f(x_n+\delta)-f(x_n-\delta) \geq 2\delta(n-1)$$
   On peut donc trouver des $|f(y)-f(z)|$ aussi grands qu'on veut, et donc f ne peut pas être bornée.
2. Par l'absurde. Soit $\epsilon > 0$ tel que pour tout A, il existe $x \geq A$ vérifiant $|f'(x)| \geq \epsilon$. Soit δ tel que
   $$|y-x| \leq \delta \Rightarrow |f'(x)-f'(y)| \leq \epsilon/2$$
   Alors pour tout A on peut trouver un segment de longueur 2δ inclus dans $[A,+\infty[$ et tel que, sur ce segment, $f' \geq \epsilon/2$ ou $f' \leq -\epsilon/2$. En utilisant la formule des accroissements finis sur ce segment comme dans la question précédente, on arrive à une contradiction avec le fait que f a une limite réelle en $+\infty$.

Exercice 12 (Oral Centrale). Soit $f : [0,+\infty[\rightarrow]0,+\infty[$ de classe C^1. On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{f(x)} = \alpha$. Que peut-on dire de $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$?