Déterminants

I Liste CCP

Exercice 63 (Algèbre)

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A.

1. Démontrez que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.
2. Déterminez D_n en fonction de n.
3. Justifiez que la matrice A est diagonalisable. Le réel 0 est-il valeur propre de A ?

II Ancienne liste CCP

Algèbre 20

On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de l'ensemble constitué par les n premiers entiers non nuls $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Démontrez que, muni de la loi $\circ$, $\mathfrak{S}_n$ est un groupe.
2. On note σ l'élément de $\mathfrak{S}_8$ défini de la manière suivante : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
   l'image de chaque terme de la première ligne étant écrit juste en dessous.
   (a) Démontrez que la permutation σ est égale à la composée de deux cycles que l'on précisera.
   (b) On note σ^n la permutation $\underbrace{\sigma \circ \dots \circ \sigma}_{n \text{ fois}}$ Déterminez σ^{12}, σ^{24}, σ^4, σ^{2016}.

III Autres exercices

- Le résultat théorique principal, qui dit que l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n est de dimension 1, ne sert pas seulement à construire la théorie des déterminants : il est aussi utile en pratique pour résoudre certains exercices. L'argument typique est : si $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de l'espace, si ψ est une forme n-linéaire alternée, il existe un scalaire λ tel que $\psi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. La valeur de λ est $\psi(e_1, \ldots, e_n)$.
- Les opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permettent de faire apparaître des coefficients nuls dans la matrice pour obtenir un déterminant de matrice triangulaire ou diagonal ou pour développer par rapport à une ligne ou une colonne qui contient peu de termes non nuls...
- Développer par rapport à une ligne ou une colonne sert souvent à obtenir des relations de récurrence linéaires entre déterminants de même type mais de formats différents (c'est, par exemple, comme cela que l'on calcule des déterminants tridiagonaux).
- La continuité du déterminant permet de faire des passages à la limite ; mais le plus fondamental, est le fait que le déterminant est une fonction polynômiale des coefficients de la matrice (donc continue, bien entendu). L'application la plus célèbre est une méthode (classique) de calcul du déterminant de Vandermonde, mais il y en a d'autres.
- Cette régularité du déterminant (continuité, polynomialité) fait tout l'intérêt des formules donnant l'inverse d'une matrice à l'aide de la matrice des cofacteurs, et des formules de Cramer, par ailleurs inutilisables pour un calcul pratique dès que la dimension dépasse 3.

Exercice 1 (Oral Centrale). calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 2 & 3 & -2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 3 & -2 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Développer par rapport à la dernière ligne, puis on développe le mineur non diagonal par rapport à la dernière colonne. On obtient une relation de récurrence linéaire entre les déterminants de formats $n\times n$, $(n-1)\times(n-1)$ et $(n-2)\times(n-2)$. Or D_1 et D_2 sont calculables sans difficulté.

Exercice 2 (Un résultat classique). Soit B une base d'un espace E de dimension n, et soit u un endomorphisme de E. Démontrer que, pour toute famille $(x_1, \ldots, x_n)$ d'éléments de E,

$$\sum_{k=1}^{n} \det_B(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n) \;=\; \mathrm{tr}(u) \; \det_B(x_1, \ldots, x_n)$$

La clé est de voir que

$$(x_1, \ldots, x_n) \longmapsto \sum_{k=1}^{n} \det_B(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

est une forme n-linéaire (c'est simple) alternée (ce n'est pas très difficile : si $x_i = x_j$ avec $i \neq j$, tous les termes dans la somme sont nuls sauf deux qui sont opposés l'un de l'autre). Il existe donc, par théorème de structure, λ tel que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n \qquad \sum_{k=1}^{n} \det_B(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n) \;=\; \lambda \, \det_B(x_1, \ldots, x_n)$$

Pour la détermination de λ, on a bien entendu envie de prendre

$$(x_1, \ldots, x_n) = (e_1, \ldots, e_n)$$

où $(e_1, \ldots, e_n) = B$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \det_B(e_1, \ldots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \ldots, e_n) \;=\; \lambda$$

En notant $A = \mathrm{Mat}_B(u)$, on voit par un calcul de déterminant simple que

$$\det_B(e_1, \ldots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \ldots, e_n) = a_{k,k}$$

pour tout k, ce qui donne la formule voulue.

Exercice 3. A quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur son déterminant) une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ a-t-elle son inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$?

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$ admettant un inverse $B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$; de $AB = I_n$ on déduit $\det(A)\ \det(B) = 1$. Or $\det(A)$ et $\det(B)$ sont des entiers, on obtient donc $\det(A) = \pm 1$.

Réciproquement, si $\det(A) = \pm 1$, la comatrice de A étant dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$, on a

$$\frac{1}{\det(A)} \, {}^t\mathrm{com}(A) \;\in \mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$$

ce qui conclut bien que A a son inverse dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{Z})$.

Exercice 4 (Oral Centrale). Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à ± 1. Montrer que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^{n-1}.

Ajouter la première (ou la dernière, ou...) ligne (ou colonne) à toutes les autres. Vérifier qu'alors toutes les lignes sauf la première ne contiennent que des entiers pairs. On peut alors mettre 2 en facteur dans chacune de ces lignes, et utiliser la multilinéarité...

Exercice 5 (classique à l'oral et à l'écrit). Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant : Si deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{C})$, elles le sont aussi dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.
Pour cela, on considère une matrice P de $\mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ telle que $B = P^{-1}AP$, condition que l'on écrira $PB = AP$. On note alors P_1 la matrice dont les coefficients sont les parties réelles de ceux P, P_2 la matrice dont les coefficients sont les parties imaginaires de ceux de P.

1. Démontrer que $P_1B = AP_1$ et $P_2B = AP_2$.
2. Démontrer que l'application $x \mapsto \det(P_1 + xP_2)$ n'est pas constamment nulle sur $\mathbf{R}$, et en déduire le résultat.

---

1. On a facilement $P = P_1 + iP_2$, et $PB = AP$, d'où l'on tire $P_1B - AP_1 = i(AP_2 - P_2B)$. Le premier membre est une matrice à coefficients réels, le second membre une matrice à coefficients imaginaires purs (on évitera de dire « complexes »). Ces deux matrices sont donc nulles.
2. L'idée est de considérer cette application comme fonction polynôme d'une variable complexe. Elle est non nulle en i ($P_1 + iP_2 = P$ est inversible), donc elle n'est pas constamment nulle. Elle a donc au plus un nombre fini de zéros complexes, a fortiori au plus un nombre fini de zéros réels. Il existe donc x_0 tel que $Q = P_1 + x_0P_2 \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{R})$. Et on a $QB = AQ$, A et B sont donc semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$.

Exercice 6. On veut calculer le déterminant de la matrice à coefficients réels :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta & \dots & \beta \\ \gamma & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \gamma & \dots & \gamma & \alpha_n \end{pmatrix}$$

On note $P(x)$ le déterminant de la matrice obtenue en ajoutant x à chaque coefficient de cette matrice. Démontrer que P est une application polynômiale de degré au plus 1. En calculant $P(x)$ pour deux valeurs bien choisies de x, calculer le déterminant cherché (on distinguera deux cas, $\beta = \gamma$ et $\beta \neq \gamma$).

$$\begin{aligned} P(x) &= \begin{vmatrix} \alpha_1 + x & \beta + x & \dots & \beta + x \\ \gamma + x & \alpha_2 + x & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta + x \\ \gamma + x & \dots & \gamma + x & \alpha_n + x \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \alpha_1 + x & \beta - \alpha_1 & \dots & \beta - \alpha_1 \\ \gamma + x & \alpha_2 - \gamma & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta - \gamma \\ \gamma + x & \dots & 0 & \alpha_n - \gamma \end{vmatrix} \end{aligned}$$

(en retranchant la première colonne à toutes les autres, par exemple). Un développement par rapport à la première colonne montre bien que P est polynomiale de degré ≤ 1.

De plus (déterminant d'une matrice triangulaire) on a $P(-\beta) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta)$ et $P(-\gamma) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - \gamma)$. On en tire, si $\beta \neq \gamma$,

$$P(x) = \frac{x+\beta}{-\gamma+\beta}P(-\gamma) + \frac{x+\gamma}{-\beta+\gamma}P(-\beta)$$

ce qui donne le déterminant cherché en prenant $x = 0$:

$$\frac{-\beta \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - \gamma) + \gamma \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta)}{\gamma - \beta}$$

Et si $\beta = \gamma$? c'est plus difficile. On peut, utilisant le fait qu'on est sur $\mathbf{R}$, exploiter un argument de continuité du déterminant. Fixons β. Le déterminant

$$d(\gamma) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta & \dots & \beta \\ \gamma & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \gamma & \dots & \gamma & \alpha_n \end{vmatrix}$$

est une fonction polynomiale de γ, donc continue. Définissons

$$f \ : \ y \mapsto \prod_{i=1}^{n}(\alpha_i - y)$$

On a vu, si $\gamma \neq \beta$:

$$\begin{aligned} d(\gamma) &= \frac{\gamma f(\beta) - \beta f(\gamma)}{\gamma - \beta} \\ &= f(\beta) - \beta \frac{f(\gamma) - f(\beta)}{\gamma - \beta} \end{aligned}$$

et donc, prenant la limite quand γ tend vers β (rappelons que β a été fixé) :

$$d(\beta) = f(\beta) - \beta f'(\beta) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta) + \beta \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (\alpha_j - \beta)$$

Si on était sur un corps qui n'est pas un sous-corps de $\mathbf{R}$, on ne pourrait pas parler de limite ni de dérivée (sur $\mathbf{C}$, on peut parler de limite, mais pas de dérivée dans le cadre du programme). Mais $F = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - X)$ est un polynôme, on peut écrire la formule de Taylor

$$F(X) = \tilde{F}(\beta) + (X - \beta)\big(\tilde{F}'(\beta) + (X - \beta)Q(X)\big)$$

où Q est un polynôme. On a, si $\gamma \neq \beta$,

$$d(\gamma) = \tilde{F}(\beta) - \beta \tilde{F}'(\beta) + (\gamma - \beta)Q(\gamma)$$

Donc, s'il y a au moins $n+1$ éléments dans le corps (d est associée à un polynôme de degré $\leq n-1$, le membre de droite aussi, on a besoin de n points en lesquels ils coïncident pour pouvoir dire qu'ils sont égaux), on peut conclure

$$d(\beta) = f(\beta) - \beta f'(\beta) = \prod_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta) + \beta \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (\alpha_j - \beta)$$

On peut aussi utiliser des opérations élémentaires et une récurrence.

Exercice 7 (Oral Centrale, X). Calculer le déterminant de Vandermonde "incomplet"

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^{k+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{k-1} & x_2^{k+1} & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{k-1} & x_n^{k+1} & \dots & x_n^n \end{vmatrix}$$

en le faisant apparaître comme mineur d'un déterminant de Vandermonde.

Il faut utiliser la formule :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} & x_1^k & x_1^{k+1} & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{k-1} & x_2^k & x_2^{k+1} & \dots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{k-1} & x_n^k & x_n^{k+1} & \dots & x_n^n \\ 1 & x & \dots & x^{k-1} & x^k & x^{k+1} & \dots & x^n \end{vmatrix} = V(x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^n (x-x_i)$$

avec $V(x_1,\dots,x_n) = \prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i)$ (voir cours, déterminant de Vandermonde). Le déterminant cherché est le mineur $(n+1,k+1)$ du déterminant ci-dessus, c'est-à-dire $(-1)^{n+k}$ fois le cofacteur de x^k. Or on peut écrire

$$V(x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^n (x-x_i) = V(x_1,\dots,x_n)(x^n - \sigma_1 x^{n-1} + \\ \dots + (-1)^{n-k}\sigma_{n-k}x^k + \dots + (-1)^n\sigma_n)$$

(avec des notations habituelles pour les fonctions symétriques élémentaires de $x_1,\dots,x_n$). Le déterminant cherché vaut donc

$$\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_j - x_i) \sum_{J\subset[\![1,n]\!],\#(J)=n-k}\ \prod_{j\in J} x_j$$

Exercice 8 (Oral Mines). Soit $P = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n \in \mathbf{R}[X]$ et $\alpha_0,\dots,\alpha_n$ réels distincts. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $(a_0,\dots,a_n)$ pour que $\big(P(\alpha_0X), P(\alpha_1X),\dots,P(\alpha_nX)\big)$ soit une base de $\mathbf{R}_n[X]$.

On pense à dire que les polynômes donnés sont bien une famille de $n+1$ éléments de $\mathbf{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$, ils forment une base si et seulement si leur déterminant dans la base canonique est non nul. Ce déterminant est

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_0 & \dots & \dots & a_0 \\ a_1\alpha_0 & a_1\alpha_1 & \dots & \dots & a_1\alpha_n \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_n\alpha_0^n & a_n\alpha_1^n & \dots & \dots & a_n\alpha_n^n \end{vmatrix}$$

qui vaut, par linéarité par raport à chaque ligne, $a_0a_1\dots a_nV(\alpha_0,\dots,\alpha_n)$ et donc est non nul si et seulement si tous les a_k sont non nuls (V pour Vandermonde, bien sûr).

Exercice 9 (Utilisation de fractions rationnelles). On veut calculer le déterminant (appelé déterminant de Cauchy) de la matrice $\left(\dfrac{1}{a_i+b_j}\right)_{1\le i,j\le n}$ (on suppose que, pour tout couple (i,j), $a_i \neq -b_j$).

Vérifier que l'on peut se contenter d'examiner le cas où les a_i d'une part, les b_j d'autre part, sont deux à deux distincts.

Calculer le déterminant quand $n = 2$, en le factorisant. Faire une conjecture sur la formule générale et la vérifier par récurrence. On pourra, par exemple, commencer par retrancher la dernière colonne à toutes les autres.

On considère un entier $n > 0$ et deux suites finies $(a_k)_{1\le k\le n}$ et $(b_k)_{1\le k\le n}$ de réels telles que $a_k + b_k \neq 0$ pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Pour tout entier m tel que $0 < m \le n$, le *déterminant de Cauchy* d'ordre m est défini par :

$$D_m = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{a_1+b_1} & \dfrac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_1+b_m} \\ \dfrac{1}{a_2+b_1} & \dfrac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_2+b_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{1}{a_m+b_1} & \dfrac{1}{a_m+b_2} & \cdots & \dfrac{1}{a_m+b_m} \end{vmatrix}.$$

On définit la fraction rationnelle :

$$R(X) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1}(X-a_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(X+b_k)}.$$

1. Montrer que si on écrit la décomposition en éléments simples de $R(X)$ sous la forme $R(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{X+b_k}$, alors

$$A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}$$

   On pourra pour cela considérer le déterminant obtenu à partir de D_n en remplaçant la dernière colonne par

$$\begin{pmatrix} R(a_1) \\ R(a_2) \\ \vdots \\ R(a_n) \end{pmatrix}.$$

Remarquons que la décomposition en éléments simples ne s'écrit comme cela que si les b_k sont deux à deux distincts. On peut rajouter sans inconvénient cette hypothèse à l'énoncé, car si elle n'est pas vérifiée alors $D_n = 0$ (deux colonnes égales) et donc la formule finale est vraie. Considérons, comme le suggère l'énoncé,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & R(a_1) \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & R(a_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & R(a_{n-1}) \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} & R(a_n) \end{vmatrix}.$$

Les $R(a_k)$ sont nuls pour $k = 1, \dots, n-1$. On développe par rapport à la dernière colonne, on obtient

$$\Delta = R(a_n) D_{n-1}$$

Mais d'autre part, pour tout j,

$$R(a_j) = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{a_j + b_k}$$

On peut alors calculer Δ en soustrayant à sa dernière colonne $\sum_{s=1}^{n-1} A_s c_s$ où $c_1, \dots c_{n-1}$ sont les $n-1$ premières colonnes de Δ. On obtient

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{A_n}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-2}} & \frac{A_n}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \frac{1}{a_{n-1}+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{A_n}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} & \frac{A_n}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

et donc par linéarité par rapport à la dernière colonne on obtient bien $\Delta = A_n D_n$, on a donc bien

$$\boxed{A_n D_n = R(a_n) D_{n-1}}$$

---

2. En déduire que

$$D_n = \frac{\prod_{1 \leq i < j < \leq n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} (a_i + b_j)}.$$

Calculons le A_n précédent par des méthodes habituelles : multiplication par $X+b_n$, évaluation en $-b_n$. On obtient

$$A_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(-b_n + b_k)} = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)}{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n - b_k)}.$$

Et donc, par la formule calculée en **1**,

$$D_n = \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(b_n - b_k)}{\prod_{k=1}^{n-1}(a_k + b_n)} \times \frac{\prod_{k=1}^{n-1}(a_n - a_k)}{\prod_{k=1}^{n}(a_n + b_k)} \times D_{n-1}$$

La formule demandée s'en déduit par récurrence. L'initialisation est probablement plus rassurante pour $n=2$ (on évite les produits vides), mais pour $n=1$ ça marche quand même.

Exercice 10 (Résultant de deux polynômes, écrit ens, écrit ccp 09). Soit $\mathbf{K}$ un corps, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n sur $\mathbf{K}$. Pour m entier naturel donné on définit la matrice de format $(m+n)\times m$:

$$M(P,m) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & a_1 & \ddots & 0 \\ a_n & \vdots & \ddots & a_0 \\ 0 & a_n & & a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Soit deux polynômes P et Q de degrés respectifs n et m. On définit $\rho(P,Q)$ comme le déterminant de la matrice définie par blocs : $\Big(M(P,m)|M(Q,n)\Big)$.

1. De quelle famille $\Big(M(P,m)|M(Q,n)\Big)$ est-elle la matrice dans la base canonique ?
2. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

   (i) P et Q ont un diviseur commun de degré supérieur ou égal à 1.

(ii) il existe un polynôme U non nul de degré au plus $m-1$ et un polynôme V non nul de degré au plus $n-1$ tels que $UP = VQ$.

(iii) $\rho(P,Q) = 0$.

3. Calculer $\rho(P,P')$ pour $P = aX^2 + bX + c$ puis pour $P = X^3 + pX + q$.

---

1. La matrice $\Big(M(P,m)|M(Q,n)\Big)$ est la matrice dans la base canonique de la famille $\big(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q\big)$.

2. (i)$\Rightarrow$ (ii) : Si P et Q ont un diviseur D de degré ≥ 1, on écrit $P = DP_1$, $Q = DQ_1$, on a alors $Q_1P = P_1Q$, et $\deg(Q_1) \leq m-1$, $\deg(P_1) \leq n-1$.

(ii)$\Rightarrow$ (iii) : La relation $UP - VQ = 0$ est alors une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs $\big(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q\big)$ (il suffit de développer U et V dans la base canonique pour s'en rendre compte), donc la famille est liée dans $\mathbf{K}_{n+m-1}[X]$. Donc son déterminant dans la base canonique, $\rho(p,q)$, est nul.

(iii)$\Rightarrow$ (i) : il me semble assez naturel de faire le détour par (ii)...ce qui fait qu'on montrera, contrairement à l'habitude, les équivalences (i)$\Leftrightarrow$ (ii) et (ii)$\Leftrightarrow$(iii).

(iii)$\Rightarrow$ (ii), donc : la nullité de $\rho(P,Q)$ donne l'existence d'une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls de la famille $\big(P, XP, \dots, X^{m-1}P, Q, XQ, \dots, X^{n-1}Q\big)$...ce qui montre l'existence de U, V **pas tous les deux nuls** tels que $UP - VQ = 0$. Mais il est impossible que l'un des deux polynômes U et V soit nul et pas l'autre, d'où le résultat.

(ii)$\Rightarrow$ (i) : Si $UP = VQ$, alors $P|VQ$. Supposons $P \wedge Q = 1$. Alors $P|V$, ce qui, pour des raisons de degré et de non nullité de V, est contradictoire. On a donc $P \wedge Q \neq 1$, d'où (i).

3. Pour $P = aX^2 + bX + c$,

$$\rho(P,P') = \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ b & 2a & b \\ a & 0 & 2a \end{vmatrix} = a(4ac - b^2)$$

Pour $P = X^3 + pX + q$,

$$\rho(P, P') = \begin{vmatrix} q & 0 & p & 0 & 0 \\ p & q & 0 & p & 0 \\ 0 & p & 3 & 0 & p \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4p^3 + 27q^2$$

Exercice 11 (Oral X). Soit $P \in \mathbf{Z}[X]$, unitaire de degré p et $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $P(\alpha) = 0$. On dit que α est un entier algébrique.

1. Que peut-on dire de $E = \mathbf{Q}[\alpha]$?
2. On définit $\mathbf{Z}[\alpha] = \{x \in E \ / \ x = \sum_k x_k \alpha^k \ , \ x_k \in \mathbf{Z}\}$. Soit Q un polynôme unitaire de degré n à coefficients dans $\mathbf{Z}[\alpha]$ et β une racine de Q dans $\mathbf{R}$. Montrer que le $\mathbf{Q}$-espace vectoriel F engendré par les $\alpha^i \beta^j$ est de dimension finie. On réindexe la famille $(\alpha^i \beta^j)_{0 \leq i \leq p-1, 0 \leq j \leq n-1}$ en $u_1, \ldots, u_r$. Montrer qu'il existe des entiers $c_{k,l}$ tels que $\beta u_l = \sum_{k=1}^{r} c_{k,l} u_k$ pour tout l. En déduire que β est un entier algébrique.
3. En déduire que la somme et le produit de deux entiers algébriques est un entier algébrique. Que peut-on dire de l'ensemble des entiers algébriques ?

Exercice 12 (Oral X)**.** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ de déterminant nul. Montrer que toutes les matrices carrées de taille 2 extraites de la comatrice de A sont de déterminant nul.

Examinons deux cas ;
• si $\mathrm{rg}(A) \leq n - 2$, dès que l'on prend $n - 1$ colonnes dans A, elles sont liées. Si l'on enlève de chacune de ces colonnes le coefficient en ligne i, on obtient a fortiori une famille liée. Tous les mineurs de A sont donc nuls. Et donc la comatrice de A est nulle.
• si $\mathrm{rg}(A) = n - 1$, on utilise la relation

$$A \ {}^t\!\big(\mathrm{com}(A)\big) = \det(A) I_n = (0)$$

Or $v \circ u = \Theta$ signifie que l'image de u est incluse dans le noyau de v. On interprète alors la relation ci-dessus en disant que l'espace engendré par les colonnes de ${}^t\big(\mathrm{com}(A)\big)$ est inclus dans le noyau de A, qui est de dimension 1. Donc la comatrice de A est de rang 1. Ce qui permet assez facilement de conclure.

Exercice 13 (Oral X, ens).

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

   $$\forall i \in \{1,\ldots,n\} \quad a_{i,i} = 0 \quad \text{et} \quad \forall (i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2 \quad (i \neq j) \Rightarrow a_{i,j} = \pm 1 \,.$$

   Montrer que, si n est pair, $\det(A)$ est un entier impair.
2. Un éleveur a $2n+1$ vaches. Quelle que soit la bête qu'il écarte de son troupeau, il peut diviser les $2n$ restantes en deux sous-troupeaux de n vaches de même masse totale. Montrer que toutes les vaches ont la même masse.

La notion de sous-troupeau sera comprise dans un sens intuitif.