Suites et séries de fonctions

Exercice 1. Etudier la convergence de la suite de fonctions

$$a_n : \begin{array}{ccc} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{n}\cos^n x \sin x \end{array}$$

On étudie les variations de a_n, ce qui conduit à une expression de $M_n = \|a_n\|_\infty$. Pour voir si (M_n) converge vers 0 ou non, on en détermine un équivalent.

Exercice 2. Etudier la convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions

$$b_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2nx^2}{1+n^2x^4} \end{array}$$

La convergence simple vers $\widetilde{0}$ est...simple. Pour regarder la convergence uniforme, on peut étudier les variations de b_n et déterminer $\|b_n\|_\infty$. Mais on peut aussi remarquer que $b_n(1/\sqrt{n})$ ne dépend pas de n, et ne tend pas vers 0.
Calculons b'_n :

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad (1+n^2x^4)^2 b'_n(x) = 4nx(1+n^2x^4) - 2nx^2(4n^2x^3) = 2nx(2-2n^2x^4)$$

On peut ainsi tracer l'allure du graphe de b_n, qui présente un « pic » au point d'abscisse $1/\sqrt{n}$ (et aussi au point d'abscisse $-1/\sqrt{n}$, par parité). Donc $\|b_n\|_\infty = b_n(1/\sqrt{n}) = 1$, donc la suite $(\|b_n\|_\infty)$ ne converge pas vers 0, ce qui empêche la convergence uniforme sur $\mathbf{R}$. Inutile d'espérer la convergence uniforme sur un segment contenant 0 (sauf si ce segment est $[0]$...pas intéressant !).
Pour aller plus loin, on peut remarquer que l'étude des variations de b_n montre que, si $a > 0$, à partir d'un certain rang (plus précisément à partir d'un rang n_0 tel que $1/\sqrt{n_0} \leq a$) on a

$$\|b_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty = b_n(a)$$

Or la suite de terme général $b_n(a)$ converge vers 0, donc la suite de terme général $\|b_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty$ converge vers 0. Et donc il y a convergence uniforme vers la fonction nulle sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$ ou sur tout $]-\infty, -a]$, $a > 0$. On peut aussi dire qu'il y a convergence uniforme sur tout segment ne contenant pas 0.

Exercice 3. Etudier la convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions

$$\begin{array}{rcccl} c_n & : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & x & \longmapsto & \sin(nx)\exp(-nx^2) \end{array}$$

La convergence est simple vers $\widetilde{0}$. Un petit dessin de l'allure du graphe suggère de calculer $c_n(\pi/(2n))$ (c'est intéressant de savoir faire un tel dessin. On trace une allure de la courbe d'équation $y = \exp(-nx^2)$, courbe qui passe par $(0, 1)$ et va très vite vers son asymptote, l'axe des abscisses. Puis on fait « osciller » une courbe d'allure sinusoïdale entre cette courbe et sa symétrique par rapport à l'axe des abscisses. On voit qu'il va y avoir un premier maximum en le point d'abscisse $\pi/(2n)$). On en conclut qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbf{R}$, car

$$c_n(\pi/2n) = \exp(-n\pi^2/4n^2)$$

et donc la suite de terme général $c_n(\pi/2n)$ ne converge par vers 0.
Pour aller plus loin, on peut conjecturer que comme dans l'exercice précédent il y a convergence uniforme sur tout $[a, +\infty[$ $(a > 0)$ et sur tout $]-\infty, -a]$ $(a > 0)$, donc sur tout segment ne contenant pas 0. Pour cela, cette fois, pas besoin d'étudier les variations de c_n : on dit simplement, si $a > 0$,

$$\forall x \in [a, +\infty[\qquad |c_n(x)| \leq e^{-nx^2} \leq e^{-na^2}$$

et donc $\|c_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty \leq e^{-na^2}$ ce qui permet bien de conclure que $\|c_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 4. Etudier la convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions

$$\begin{array}{rcccl} d_n & : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & & x & \longmapsto & \dfrac{2^n x}{1 + n2^n x^2} \end{array}$$

Convergence simple vers la fonction nulle. Puis étude de la fonction d_n, ou calcul de $d_n(1/2^n)$ pour voir que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbf{R}$. Elle l'est en revanche sur tout $[a,+\infty[$ $(a>0)$ et sur tout $]-\infty,-a]$ $(a>0)$ (par étude des variations de d_n).

Exercice 5. Etudier la convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions

$$e_n : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1-x^{2n}}{1+x^{2n}} \end{array}$$

La convergence simple est facile, la limite simple n'est pas continue, les e_n le sont, donc la convergence n'est pas uniforme. Elle l'est sur tout segment qui ne contient pas 1 ni -1.

Exercice 6. (Liste ccp 2014)
On pose $f_n(x) = \dfrac{n}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-n^2x^2}$.

1. Étudiez la convergence simple de la suite de fonctions (f_n).
2. (a) Démontrez que, pour tout $a>0$, cette suite converge uniformément sur les intervalles $]-\infty,-a]$ et $[a,+\infty[$.
   (b) Converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$? Indication : on pourra considérer $f_n(\frac{1}{n})$.

Exercice 7. Etudier la convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin\Big(\dfrac{n+1}{n}x\Big) \end{array}$$

La convergence simple vers sin est facile. Graphiquement, elle semble non uniforme. On le vérifie par exemple en regardant $\sin - f_n$ en $n\pi/2$. L'inégalité

$$|\sin x - f_n(x)| \leq \left|\frac{n+1}{n}x - x\right|$$

(sin est 1-lipschitzienne) montre assez facilement la convergence uniforme sur tout segment (par la convergence uniforme sur tout $[-M, M]$, $M > 0$).

Exercice 8. Soit f continue sur $\mathbf{R}$, étudier la convergence (simple, uniforme, uniforme sur tout segment) de la suite de fonctions
$f_n \ : \ x \mapsto \sqrt{f(x)^2 + \frac{1}{n}}$

Il y a convergence simple vers $|f|$. De plus, en utilisant l'identité $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$,

$$|f_n(x) - |f(x)|| = \frac{1}{n\left(f_n(x) + |f(x)|\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

d'où la convergence uniforme.

Exercice 9 (Oral Centrale). On définit, pour $x \in \mathbf{R}^+$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$f_n(x) = \frac{x^n e^{-x}}{n!}$$

La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbf{R}^+$?
On peut utiliser la formule de Stirling.

Il y a convergence simple vers $\widetilde{0}$ (croissances comparées). On étudie les variations de f_n, puis grâce à la formule de Stirling on obtient un équivalent de $\|f_n\|_\infty$.

Exercice 10 (Oral Centrale). On pose $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1 + x + \cdots + x^n}$ pour $x \geq 0$. Donner l'allure du graphe de f_n. Etudier la convergence simple puis convergence uniforme de la suite (f_n).

Nous appellerons « première expression » l'expression de f donnée par l'énoncé, et « deuxième expression » la suivante :

$$f(x) = \frac{x^n(x-1)}{x^{n+1}-1}$$

qui est valable seulement si $x \neq 1$.

On utilise la première expression pour calculer f', on en déduite que f est croissante sur $\mathbf{R}^+$. En utilisant la dérivée en 0 ou le fait que $\left(f(x) - f(0)\right)/x$ a une limite nulle en 0, on trouve une demi-tangent horizontale à l'origine. La limite de f_n en $+\infty$ vaut 1, on peut alors tracer son graphe approximativement (on ne cherche pas à déterminer l'inflexion).
La convergence simple se fait plutôt en utilisant la deuxième expression, on trouve une limite simple qui est la fonction nulle sur $[0,1]$ et vaut $x \mapsto 1 - 1/x$ sur $[1, +\infty[$.
On remarque que, si $0 \leq x \leq 1$,

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(1) = \frac{1}{n+1}$$

puis que, si $x > 1$, en utilisant la deuxième expression :

$$f_n(x) - f(x) = \frac{x-1}{x(x^{n+1}-1)} = \frac{1}{x(1+\ldots+x^n)} \leq \frac{1}{n+1}$$

ce qui donne la convergence uniforme.

Exercice 11 (**Oral Mines).** Une fonction réelle, définie sur $]0, +\infty[$, tend vers 0 en $+\infty$. Etudier la convergence simple, uniforme de la suite de fonctions $\big(f(nx)\big)$.

Exercice 12 (**Deux résultats utilisables).** Soit (f_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f, (g_n) une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction g.

1. Vérifier que la suite $(f_n + g_n)$ converge uniformément vers la fonction $f + g$.
2. Donner une condition suffisante simple portant sur la fonction h pour que la suite de fonctions (hf_n) converge uniformément vers hf (h étant une fonction à valeurs réelles ou complexes) (**résultat souvent utilisé**).

---

1. A partir d'un certain rang, $f_n - f$ et $g_n - g$ sont bornées ; donc, à partir d'un tel rang, $(f_n + g_n) - (f + g)$ l'est, et

$$\|(f_n + g_n) - (f + g)\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty + \|g_n - g\|_\infty$$

Or $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc

$\|(f_n + g_n) - (f+g)\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ce qui conclut.
Remarquons que si on est dans un espace de fonctions bornées (i.e. si les f_n et les g_n sont bornées), alors la convergence uniforme est la convergence pour la norme $\|.\|_\infty$, et il n'y a rien à démontrer : dans n'importe quel evn, si deux suites convergent, la suite somme converge vers la somme des limites.

2. On suppose h bornée ; comme au moins à partir d'un rang n_0 la suite $(f_n - f)$ est bornée, à partir d'un tel rang la suite $h(f_n - f)$ l'est, et de

$$\|(f_n - f)h\|_\infty \leq \|f_n - f\|_\infty \ \|h\|_\infty$$

(si $n \geq n_0$) on déduit que si la suite (f_n) converge uniformément vers f alors la suite $(f_n h)$ converge vers la fonction fh : la multiplication par une fonction bornée ne change pas le caractère uniforme de la convergence.

Exercice 13. Démontrer que toute fonction continue sur un segment est limite uniforme d'une suite de fonctions de classe C^∞ sur ce segment.

Exercice 14 (Oral X, Démonstration du théorème de Weierstrass par la méthode des polynômes de Bernstein).
Si f est une fonction continue sur $[0,1]$ à valeurs réelles, les fonctions polynômes de Bernstein $B_n(f)$ associés à f, pour tout entier naturel n, sont définis sur le segment $[0,1]$ par

$$B_n(f) \ : \ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\big(\frac{k}{n}\big) x^k (1-x)^{n-k}$$

On définit sur $[0,1]$ les trois fonctions suivantes :

$$u : x \mapsto 1 \qquad v : x \mapsto x \qquad w : x \mapsto x^2$$

1. Calculer $B_n(u)$.
2. Si $1 \leq k \leq n$, à quel coefficient binomial est égal $\dfrac{k}{n}\dbinom{n}{k}$? En déduire $B_n(v)$, puis calculer $B_n(w)$ par une méthode analogue.
3. On fixe $\epsilon > 0$. Justifier l'existence d'un réel strictement positif δ tel que, pour tous x et y dans $[0,1]$:

$$|x-y| \leq \delta \Longrightarrow \big|f(x) - f(y)\big| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

et l'existence d'un réel M tel que, pour tout x dans $[0,1]$, $\big|f(x)\big| \leq M$.
Soit x un élément de $[0,1]$. On note
$A_x = \Big\{k \in [0,n] \ / \ \big|\frac{k}{n} - x\big| \leq \delta\Big\}$, B_x le complémentaire de A_x dans l'ensemble des entiers naturels compris entre 0 et n. Démontrer que

$$\begin{aligned}\Big|B_n(f)(x) - f(x)\Big| \leq & \sum_{k \in A_x} \binom{n}{k} \big|f(k/n) - f(x)\big| x^k (1-x)^{n-k} \\ & + \quad \sum_{k \in B_x} \binom{n}{k} \big|f(k/n) - f(x)\big| \frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} x^k (1-x)^{n-k}\end{aligned}$$

et en déduire que

$$\Big|B_n(f)(x) - f(x)\Big| \leq \epsilon/2 + \frac{M}{2n\delta^2} \ .$$

En déduire que la suite $\big(B_n(f)\big)$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

On en déduit le théorème de Weierstrass : cette méthode est constructive. Ce sont des considérations probabilistes qui ont guidé Bernstein vers ce résultat. On reverra donc la démonstration dans le cadre des Probabilités, ce sera plus naturel.

Un peu plus difficile...

Exercice 15 (**Oral Centrale).**

1. Que peut-on dire d'une fonction polynôme bornée sur $\mathbf{R}$?
2. Soit f une fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, limite uniforme sur $\mathbf{R}$ d'une suite de fonctions polynômes. Démontrer que f est une fonction polynôme.

---

1. Une fonction polynôme bornée sur $\mathbf{R}$ est constante (une fonction polynôme non constante à une limite infinie en $+\infty$).
2. Soit (f_n) une suite de fonctions polynômes qui converge uniformément vers f. A partir d'un certain rang n_0, $f_n - f$ est bornée, donc à partir d'un tel rang, $f_{n+1} - f_n = (f_{n+1} - f) - (f_n - f)$ est bornée. Elle est donc constante (car elle est polynomiale) ; on en déduit par récurrence que, pour tout $n \geq n_0$, $f_n - f_{n_0}$ est une fonction constante. Soit α_n cette constante. On a donc

$$\forall t \in \mathbf{R} \qquad f_n(t) = f_{n_0}(t) + \alpha_n$$

La suite (α_n) converge (il suffit pour cela d'écrire la convergence simple en n'importe quel point de la suite $(f_n(t))$) ; soit α sa limite. La fonction f est alors $f_{n_0} + \alpha$, donc est polynomiale.

Exercice 16 (**Oral X).** Pour tout entier naturel non nul n et tout réel positif x, on définit $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n$ si $x \leq n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > n$. Etudier la convergence de cette suite de fonctions.

Convergence simple : On fixe x. A partir d'un certain rang, on aura $1 - x/n > 0$, et donc, à partir d'un certain rang,

$$f_n(x) = e^{n \ln(1 - x/n)}$$

Or (x étant fixé) : $n \ln(1 - x/n) \sim -x$, ce qui, avec la continuité de l'exponentielle, montre la convergence simple de (f_n) vers la fonction $f \ : \ x \mapsto e^{-x}$.
Convergence uniforme : Les idées peuvent venir du tracé (approximatif) des graphes de f_n et de f. On commence par conjecturer que le graphe de f_n est au-dessous de celui de f. C'est évident pour $x \geq n$: $0 = f_n(x) \leq f(x)$. Mais, si $0 < x < n$,

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leq e^{-x} \ \Leftrightarrow \ n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -x$$

Or une étude de fonction montre que

$$\forall u > -1 \qquad \ln(1+u) \leq u$$

(on peut aussi dire que $u \mapsto \ln(1+u)$ est concave sur $[0, +\infty[$, donc son graphe est au-dessous de sa tangente en 0, ce qui donne l'inégalité).
On peut appliquer cela à $u = -x/n$ $(0 < x < n)$, multiplier par n, on obtient l'inégalité voulue. On peut donc écrire :

$$\forall x \geq 0 \qquad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq f(x)$$

ce qui permet de dire que, comme f_n est coincée entre 0 et f, quand $f(x)$ est « petit », $f(x) - f_n(x)$ est au moins aussi petit. C'est à l'aide de cette remarque que l'on va montrer la convergence uniforme.
Soit $\epsilon > 0$. Il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A \qquad f(x) \leq \epsilon$$

Fixons un tel A. Si $x \geq A$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

On n'a donc plus qu'à s'occuper des x dans $[0, A]$. Fixons un n_0 tel que $n_0 > A$; ainsi, si $n \geq n_0$, si $x \in [0, A]$,

$$f(x) - f_n(x) = e^{-x} - e^{n\ln(1-x/n)}$$

L'étude s'avère peu accueillante (calculs pas simples), on peut utiliser l'astuce suivante : sur $\mathbf{R}^-$, exp est 1-lipschitzienne (sa dérivée, exp, est à valeurs dans $[0, 1]$, et on peut appliquer l'inégalité des accroissements finis). Ce qui permet d'écrire :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |-x - n\ln(1 - x/n)|$$

Posons $\phi(x) = -x - n\ln(1 - x/n)$, on a $\phi'(x) = -1 + \dfrac{1}{1 - x/n} = \dfrac{x/n}{1 - x/n} \geq 0$.
Donc ϕ croît de 0 à $-A - n\ln(1 - A/n)$ (qui est bien ≥ 0). On a donc

$$\forall n \geq n_0\ \forall x \in [0, A] \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq |A + n\ln(1 - A/n)|$$

Soit $N \geq n_0$ tel que $\forall n \geq N \qquad |A + n\ln(1 - A/n)| \leq \epsilon$; on a

$$\forall x \geq 0 \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$$

ce qui conclut.

Exercice 17 (Oral Lyon). Soit $f : x \mapsto 2x(1-x)$ de $[0,1]$ dans lui-même ; on définit par récurrence : $f_0 = Id$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $f_{n+1} = f \circ f_n$. La suite (f_n) converge-t-elle simplement ? uniformément ?

Convergence simple : on fixe x. Nommant $u_n = f_n(x)$, la suite (u_n) est une suite récurrente définie par $u_0 = x$ et, pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$. On trace le graphe de f sur $[0,1]$, on conclut que (u_n) converge vers $1/2$ sauf si $x = 0$ ou $x = 1$ (dans ce cas, il y a convergence vers 0). La convergence ne peut donc pas être uniforme (non transmission de la continuité). Il est assez simple de montrer qu'elle n'est pas uniforme sur $]0,1[$ (double limite en défaut), qu'elle l'est sur $[\delta, 1/2]$ $(0 < \delta < 1/2)$, donc sur $[\delta, 1-\delta]$ $(0 < \delta < 1/2)$, donc sur tout segment inclus dans $]0,1[$.

Exercice 18 (Oral Paris, Lyon, Cachan). Quelles sont les fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbf{R}$ qui sont limites uniformes sur $[a,b]$ d'une suite de polynômes strictement croissants ?

La croissance est conservée par limite simple (ce sont bien les polynômes qui sont croissants, pas la suite). Donc une fonction qui est limite simple d'une suite de polynômes strictement croissants est croissante. Réciproquement, on ne réduit pas le problème en supposant $[a,b] = [0,1]$. On utilise l'approximation par les polynômes de Bernstein (désolé, je ne vois pas d'autre solution simple...), on vérifie que si f est strictement croissante alors $B_n[f]$ l'est. Pour approcher une fonction croissante sur $[0,1]$, f, par une suite de fonctions strictement croissantes, c'est facile : considérer $f_n(x) = f(x) + \dfrac{x}{n}$.

Exercice 19. Etudier la définition, la continuité de

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4 + n^2x^2}$$

Il y a convergence normale sur $\mathbf{R}$, donc uniforme, les fonctions $x \mapsto 1/(n^4+n^2x^2)$ sont continues, donc f l'est (sur $\mathbf{R}$ tout entier).

Exercice 20. Démontrer que l'égalité

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}$$

définit une application continue sur $\mathbf{R}$.

Il y a convergence normale sur $\mathbf{R}$, etc...

Exercice 21. Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions

$$\begin{array}{cccc} f_n : & \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & e^{-n}\cos n^2 x \end{array}$$

Déterminer un entier naturel N tel que

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \; - \; \sum_{n=0}^{N} f_n(x)\Big| \leq 10^{-3}$$

Exercice 22. Etudier la convergence simple, uniforme, normale de la série de fonctions

$$\begin{array}{cccc} f_n : & \mathbf{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \longmapsto & \exp(-n^2 x) \end{array}$$

Déterminer la limite de sa somme en $+\infty$, et donner un développement asymptotique de cette somme à la précision e^{-2x} au voisinage de $+\infty$.

La convergence simple se règle facilement, en disant par exemple que pour n'importe quel $x > 0$,

$$\exp(-n^2x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

(par croissances comparées). On majore facilement $|f_n|$ par 1 sur $\mathbf{R}_*^+$, et c'est le plus petit majorant possible, car $\lim\limits_{0} f_n = 1$. Il n'y a donc pas convergence normale, vu que $\|f_n\|_\infty = 1$. Il y a en revanche convergence normale sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$ (car $\|f_n|_{[a,+\infty[}\|_\infty = \exp(-n^2 a)$). Il n'y a pas non plus convergence uniforme de $\sum f_n$ sur $]0, +\infty[$, sinon la suite (f_n) convergerait uniformément vers $\widetilde{0}$, ce qui n'est pas le cas.
La convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, où l'on a fixé un $a > 0$ arbitraire, permet néanmoins d'utiliser le théorème de la double limite, et de trouver, en notant $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$, que $\lim\limits_{+\infty} S = 1$.
Pour un développement asymptotique, la stratégie est souvent d'utiliser des comparaisons série-intégrale après avoir éventuellement mis de côté certains termes. Ici, une majoration simple permet d'éviter le recours un peu plus long à la comparaison série-intégrale : pour tout $x > 0$, $S(x) = 1 + e^{-x} + e^{-4x} + R(x)$ où

$$0 \leq R(x) = \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-k^2 x} \leq \sum_{k=3}^{+\infty} e^{-kx} = \frac{e^{-3x}}{1 - e^{-x}}$$

ce qui donne facilement

$$S(x) = 1 + e^{-x} + \underset{x \to +\infty}{o}\left(e^{-2x}\right)$$

Exercice 23. Etudier la convergence sur $[0, +\infty[$ de la série de fonctions $\sum\limits_{n \geq 0} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$. Sa somme est-elle continue ?

La convergence simple est conséquence du théorème spécial sur les séries alternées. Puis la majoration du reste dans ce même théorème permet d'écrire pour $n \in \mathbf{N}$ et $x : in[0, +\infty[$, avec des notations habituelles,

$$|R_n(x)| \leq \ln\left(1 + \frac{x}{n+2}\right)$$

Ce qui permet facilement d'avoir la convergence uniforme sur tout segment. Les fonctions $x \mapsto (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)$ étant continues, la somme l'est.

Exercice 24 (Oral Mines). Soit $f \in C([0, 1], \mathbf{R})$ telle que $f(1) = 0$. On pose $f_n \ : \ x \mapsto x^n f(x)$. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[0, 1]$. Donner une cns pour que la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$.

Soit $\epsilon > 0$, il existe alors η dans $]0, 1[$ tel que

$$\forall x \in [1-\eta, 1] \qquad |f(x)| \leq \epsilon$$

et on fixe un tel η. Il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N \qquad (1-\eta)^n \|f\|_\infty \leq \epsilon$$

(f est bien sûr bornée car continue sur un segment), on a alors

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in [0, 1] \qquad |x^n f(x)| \leq \epsilon$$

ce qui donne la convergence uniforme de la suite (f_n).
Si la série $\sum f_n$ converge uniformément, sa somme est continue sur $[0, 1]$ (les f_n le sont), or cette somme est $x \mapsto \dfrac{f(x)}{1-x}$, f est donc dérivable en 1, et $f'(1) = 0$.
Supposons réciproquement que f soit dérivable en 1, de dérivée nulle en 1. La convergence simple de $\sum f_n$ ne pose pas vraiment de problème, on peut définir la suite des restes, et le calcul des restes ramène à la question précédente.

Exercice 25 (Oral Mines). On pose $f \;:\; t \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2t}{t^2+n^2}$.

1. Domaine de définition de f ?
2. Parité de f ?
3. Continuité de f ?
4. Limite de f en $+\infty$?
5. La convergence de la série définissant f est-elle uniforme ?

---

1. La convergence simple se traite en distinguant le cas $t = 0$. Mais sans difficulté. f est définie sur $\mathbf{R}$.
2. f est impaire.
3. Dérivons $f_n \;:\; t \mapsto \dfrac{2t}{t^2+n^2}$. La dérivée a le signe de $2(t^2+n^2) - 2t(2t) = 2(n^2 - t^2)$ et on en déduit que $|f_n|$ est maximale en $-n$ et en n. On trouve alors qu'il n'y a pas convergence normale. En revanche, il y a convergence normale, donc uniforme, sur tout segment, ce qui suffit (en n'oubliant pas de dire que les f_n sont continues) pour établir la continuité de f.
En effet, soit K un segment. Soit $M > 0$ tel que $K \subset [-M, M]$. L'étude des variations de f_n sur $[-M, M]$ monte que, si $n \geq M$, donc au moins à partir d'un certain rang,

$$\|f_n|_K\|_\infty \leq f_n(M) = \frac{2M}{M^2+n^2}$$

Or $\sum_n f_n(M)$ converge, donc $\sum_n \|f_n|_K\|_\infty$ converge.
4. Un comparaison à une intégrale donne la limite : π.
5. Et donc la convergence n'est pas uniforme, car le théorème de la double limite donnerait une limite nulle.

Exercice 26 (Oral Mines). Pour $n \geq 2$ on pose $f_n \ : \ x \mapsto \dfrac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge simplement sur $\mathbf{R}^+$. On note f sa somme.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 2} f_n$ converge uniformément sur $\mathbf{R}^+$.
3. Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{-k})$.

La convergence simple se traite facilement, en distinguant les cas $x = 0$ et $x \neq 0$. Il n'y a pas convergence normale (il suffit pour s'en rendre compte de calculer $f_n(1/n)$ ou, si on n'a pas cette idée directement, de dériver f_n pour obtenir $\|f_n\|_\infty$). Pour essayer de montrer la convergence uniforme, on majore le reste, avec des notations habituelles : d'abord, si $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}}$$

d'où l'on tire la majoration suivante :

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \frac{x}{e^x - 1}$$

or $x \mapsto x/(e^x - 1)$ est bornée sur $\mathbf{R}^+$ (continue, et ayant une limite finie, nulle d'ailleurs, en $+\infty$). Ce qui permet de conclure.
Le même genre de majoration permet de répondre à la dernière question.

Exercice 27. Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n+n^2x^2}$ converge-t-elle ? Démontrer la continuité de la somme sur son domaine de définition. Donner des équivalents de sa somme au voisinage de 0 et de $+\infty$.

Plan de résolution : il y a convergence sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, uniforme car normale sur tout segment inclus dans $\mathbf{R} \setminus \{0\}$ ce qui assure la transmission de la continuité.

On pourrait montrer que la limite en $+\infty$ est nulle par double limite, la limite en 0 est $+\infty$ par technique habituelle (la fonction décroît, si elle n'a pas pour limite $+\infty$ en 0 elle est majorée, on en déduit que les sommes partielles sont uniformément majorées, on peut dans une somme partielle faire tendre la variable vers 0, on en déduit que $\sum 1/n$ converge. Tout cela ne nous donne pas d'équivalent !

L'idée à avoir, dans ce genre de question (équivalent), c'est la comparaison à une intégrale. Ici, notant $S(x)$ la somme de la série de fonctions au point x, on obtient

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} \ \leq\ S(x) \ \leq\ \frac{1}{1+x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2}$$

Le calcul de l'intégrale se fait : on décompose en éléments simples

$$\frac{1}{t+t^2x^2} = \frac{1}{t} - \frac{x^2}{1+tx^2}$$

Pour ne pas couper une intégrale qui existe en deux intégrales qui n'existent pas, on passe par

$$\int_1^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t+t^2x^2} = \int_1^{A} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{A} \frac{x^2}{1+tx^2}\mathrm{d}t$$

On intègre avec des ln, on prend les limites quand $A \to +\infty$, et finalement on aboutit à

$$\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \leq S(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

En $+\infty$, c'est raté, on ne peut qu'espérer qu'il y a un équivalent du type a/x^2, avec $1 \leq a \leq 2$. Mais en revanche, en 0, l'encadrement permet de conclure :

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} -2\ln x$$

Alors au voisinage de $+\infty$, que fait-on ? on observe, et on se dit que n ne pèse pas lourd devant n^2x^2. Donc, notant $b = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, on espère que

$$S(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{b}{x^2}$$

Pour cela, on écrit

$$S(x) - \frac{b}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2(1+nx^2}$$

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2(1+nx^2}$ converge normalement sur $[0,+\infty[$, on peut lui appliquer le théorème de la double limite en $+\infty$, on obtient

$$S(x) - \frac{b}{x^2} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

d'où l'équivalent. Hors-programme : $b = \pi^2/6$, et on a bien $1 \leq b \leq 2$, c'est agréable.

Exercice 28 (Oral Mines).

1. Trouver le domaine de définition de
$$f \ : \ x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{n}}$$
2. Trouver la limite de f en $+\infty$.
3. Trouver la limite de f en 0.
4. Trouver un équivalent de f en 0.

---

1. Le domaine de définition est $\mathbf{R}_*^+$: ailleurs, il y a divergence grossière de la série. Et sur $\mathbf{R}_*^+$, la convergence est conséquence par exemple de la croissance comparée :
$$e^{-x\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right) \ .$$
que l'on vérifie par exemple en écrivant $n^2 e^{-x\sqrt{n}}$ sous forme exponentielle.
2. La convergence est assez facilement normale, donc uniforme, sur tout $[a, +\infty[$, $a > 0$, ce qui autorise l'utilisation du théorème de la double limite et donne en $+\infty$ une limite nulle.
3. Pour la limite en 0, on peut faire une comparaison à une intégrale, ou plus simplement remarquer que f décroît. Si elle avait une limite réelle en 0, elle serait majorée. A fortiori, par positivité de tous les termes, on aurait pour n'import quel N, la somme partielle S_N qui serait majorée par $\lim_0(f)$. En prenant la limite en 0, on obtient $N \leq \lim_0(f)$ pour tout N, ce qui n'est pas très raisonnable. Donc la limite en 0 est $+\infty$.
4. Comparaison à une intégrale. . .La fonction à considérer est alors
$$h_x \ : \ t \mapsto e^{-x\sqrt{t}}$$
On va la noter simplement h, pas la peine de rappeler x qui est fixé et > 0. La fonction h est bien décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme on a déjà montré la convergence, l'intégrabilité en découle, et on peut directement écrire l'encadrement (après avoir fait un dessin !) :
$$\int_1^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n) \leq \int_0^{+\infty} h(t)\mathrm{d}t$$

Le changement de variable $x\sqrt{t} = u$, $t = u^2/x^2$, est bien pour sortir x de l'intégrale :

$$\frac{1}{x^2}\int_x^{+\infty} e^{-u} \times 2u \text{ d}u \leq \sum_{n=1}^{+\infty} h(n) \leq \frac{1}{x^2}\int_0^{+\infty} e^{-u} \times 2u \text{ d}u$$

Mais

$$\int_x^{+\infty} e^{-u} \times 2u \text{ d}u \xrightarrow[x\to 0]{} \int_0^{+\infty} e^{-u} \times 2u \text{ d}u = 1$$

(intégration par parties, bien sûr). et on trouve comme équivalent $1/x^2$.

Exercice 29 (Oral Centrale). Donner le domaine de définition de la fonction

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n$$

montrer qu'elle est croissante sur $[0, 1[$ et donner sa limite en 1^-.

Le domaine de définition est $]-1, 1[$, la croissance sur $[0, 1[$ est conséquence du fait que, si $0 \leq x < y \leq 1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$x^n \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n \leq y^n \big(1 + \frac{y}{n}\big)^n$$

Montrons que f ne peut pas avoir de limite réelle en 1. Etant croissante, elle aura alors nécessairement pour limite $+\infty$ en 1. Si f a une limite réelle ℓ en 1, elle est majorée par ℓ sur $[0, 1[$, donc ses sommes partielles le sont (tous les termes sont positifs). Si N est quelconque, on a donc

$$\forall x \in [0, 1[\qquad \sum_{n=1}^{N} x^n \big(1 + \frac{x}{n}\big)^n \leq \ell$$

On prend alors la limite dans l'inégalité quand $x \to 1$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n \leq \ell$$

et ce pour tout N. La série de terme général $\big(1 + \dfrac{1}{n}\big)^n$ converge, ce qui n'est pas. On peut montrer plus précisément que f a pour équivalent au voisinage de 1 : $e/(1 - x)$, mais c'est déjà plus technique.

Exercice 30 (Oral Centrale). Soit (a_n) une suite décroissante de réels strictement positifs. On pose
$u_n(t) = a_n t(1-t)^n$ pour $t \in [0,1]$. Montrer que la série de terme général $u_n(t)$ converge pour $t \in [0,1]$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour qu'elle converge normalement sur $[0,1]$. Montrer que la convergence est uniforme si et seulement si (a_n) tend vers 0 ; lorsque cette condition n'est pas réalisée, étudier la continuité de la somme.

La série $\sum u_n(t)$ est une série à termes réels **positifs**. La majoration $u_n(t) \leq a_0(1-t)^n$ suffit donc à assurer la convergence de $\sum u_n(t)$ si $1-t<1$, autrement dit si $t \neq 0$. Si $t=0$, aucun problème : la série nulle converge.
La fonction u_n est dérivable sur $[0,1]$, de dérivée

$$u_n \ : \ t \mapsto a_n(1-t)^{n-1}(1-t-nt)$$

On en déduit facilement le tableau de variations de u_n, ce qui permet de dire que

$$\|u_n\|_\infty = u_n(1/(n+1)) = \frac{a_n}{n+1}(1+1/n)^{-n}$$

On a $\|u_n\|_\infty \sim \dfrac{a_n}{ne}$, donc il y a convergence normale si et seulement si $\sum \dfrac{a_n}{n}$ converge.
Etudions les restes (on peut, on a déjà montré la convergence simple) ; en notant $\ell \geq 0$ la limite de la suite (a_n), bien définie car la suite est décroissante positive, on a, si $t \neq 0$,

$$R_n(t) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k t(1-t)^k \leq a_{n+1} t \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1-t)^k = a_{n+1}(1-t)^{n+1} \leq a_{n+1}$$

et $R_n(0)=0$, donc

$$\|R_n\|_\infty \leq a_{n+1}$$

Donc si la suite (a_n) converge vers 0, la convergence est uniforme. Mais le même genre de calcul donne une minoration, si $t \neq 0$:

$$R_n(t) \geq \ell(1-t)^{n+1}$$

Donc, pour tout $t > 0$,

$$\|R_n\|_\infty \geq (1-t)^{n+1}\ell$$

et, prenant la limite quand t tend vers 0 :

$$\|R_n\| \geq \ell$$

ce qui fait que, si (a_n) ne tend pas vers 0, la convergence n'est pas uniforme.

Reprenons le cas où $\ell \neq 0$. On peut minorer, toujours avec une somme géométrique, si $t > 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t(1-t)^n \geq \ell$$

ce qui empêche la somme d'être continue en 0 (car elle est nulle en 0). Sur $]0,1]$, pas de problème de continuité : on vérifie sans grande difficulté qu'il y a convergence normale sur $[a,1]$ pour tout $a > 0$.

Exercice 31 (**Oral Centrale).** Montrer que la série de terme général $v_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ converge simplement sur $\mathbf{R}$, normalement sur tout segment $[0,a]$. Montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme sur $\mathbf{R}$ (on pourra utiliser des intégrales).

La comparaison à une intégrale donne, pour $x > 0$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \ \geq \int_1^{+\infty} \frac{x}{x^2+t^2}\mathrm{d}t$$

Si, dans l'intégrale, on fait le changement de variable $t = xu$ (pour faire « sortir » x), on obtient

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n(x) \ \geq \int_{1/x}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

S'il y a convergence uniforme, le théorème de la double limite s'applique, et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} v_n$ a une limite nulle en $+\infty$. Or le minorant est une intégrale qui a pour limite $\pi/2$ en $+\infty$. La convergence n'est donc pas uniforme.

Exercice 32 (**Oral Centrale).** Définition, continuité de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2x+n}$.