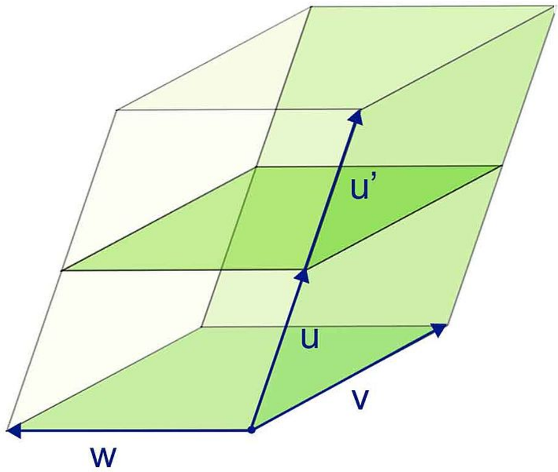
Al3 : Déterminants



Une illustration de la propriété $\quad det(u+u', v, w) = det(u, v, w) + det(u', v, w)$

I Introduction : les formules de Cramer (h.p.)

Il n'est pas très difficile de voir que les deux équations $\begin{cases} ax+by & = & c \\ dx+ey & = & f \end{cases}$ sont indépendantes si et seulement si $ae-bd \neq 0$, et, dans ce cas, de donner la solution unique de ce système sous la forme $x = \dfrac{ce-fb}{ae-bd}$ et $y = \dots$ de même.

Il est donc assez naturel de chercher à résoudre ce problème pour des systèmes de n équations à n inconnues, $n > 2$. C'est beaucoup plus difficile (même pour $n = 3$), et Cramer (au milieu du dix-huitième siècle) a obtenu la solution : les formules portent maintenant son nom. Cramer n'a pas utilisé la double indexation utilisée actuellement pour décrire les matrices, mais a écrit ses systèmes de la manière suivante :

$$\begin{cases} Z^1 z & + & Y^1 y & + & X^1 x & + & V^1 v & \ldots & = & A^1 \\ Z^2 z & + & Y^2 y & + & X^2 x & + & V^2 v & \ldots & = & A^2 \\ Z^3 z & + & Y^3 y & + & X^3 x & + & V^3 v & \ldots & = & A^3 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{cases}$$

Il commence par donner les solutions pour $n = 2$ ou $n = 3$ inconnues (on peut les écrire complètement) puis énonce la règle générale :

L'examen de ces formules fournit cette règle générale. Le nombre des équations et des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choses différentes. Chaque terme est composé des lettre $ZYXV$ etc. toujours écrites dans le même ordre, mais auquel on distribue, comme exposants, les n premiers chiffres rangés en toutes les manières possibles. On donne à ces termes des signes $+$ ou $-$, selon la règle suivante. Quand un exposant est suivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un exposant plus petit que lui, j'appellerai cela un dérangement. Qu'on compte pour chaque terme le nombre des dérangements : s'il est pair ou nul, le terme aura le signe $+$; s'il est impair, le terme aura le signe $-$.
Le dénominateur étant ainsi formé, on aura la valeur de z en donnant à ce dénominateur le numérateur qui se forme en changeant, dans tous les termes, Z en A. Et la valeur de y est la fraction qui a le même dénominateur et pour numérateur la quantité qui résulte quand on change Y en A, dans tous les termes du dénominateur. Et on trouve d'une manière semblable la valeur des autres inconnues.

(Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, 1750)

II Applications multilinéaires : quelques définitions

Attention aux notations. On manipule dans la suite de ce chapitre beaucoup de n-uplets de vecteurs d'un espace E de dimension n. Si $(x_1,\ldots,x_n)$ est un tel n-uplet, chaque x_j a aussi un n-uplet de composantes dans une base $(e_1,\ldots,e_n)$ quelconque de E : $x_j=\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}e_i$ ou $x_j=\sum_{i=1}^{n} x_{i,j}e_i$. Il y a donc des n-uplets de vecteurs, des n-uplets d'éléments de $\mathbf{K}$, si on confond les deux on se perd.

II.1 Application multilinéaire

Une application

$$f\ :\ E_1\times\cdots E_n\longrightarrow F$$

définie sur un produit $E_1\times\cdots E_n$ d'espaces vectoriels à valeurs dans un espace vectoriel F est dite multilinéaire lorsque, pour tout i, pour tout $(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\in E_1\times\cdots E_{j-1}\times E_{j+1}\times\cdots E_n$, l'application

$$x\longmapsto f(x_1,\ldots x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_n)$$

est linéaire de E_i dans F.

Lorsque $E_i=E$ pour tout i, on dit que

$$f\ :\ E^n\to F$$

est une application n-linéaire sur E.

II.2 Application n-linéaire alternée, antisymétrique

Reprenons les notations du paragraphe précédent.

a Alternée

Définition L'application p-linéaire f est dite alternée lorsque,
s'il existe $i\neq j$ tel que $x_i=x_j$, alors $f(x_1,\ldots,x_n)=0$.

Autrement dit lorsque, pour tout $x\in E$, pour tous i,j tels que $1\leq i<j\leq n$, pour tout $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n)\in E^{n-2}$,

$$f\left(x_1,\ldots,x_{i-1},x,x_{i+1},\ldots,x_{j-1},x,x_{j+1},\ldots,x_n\right)=0$$

b Antisymétrique

Définition L'application n-linéaire f est dite antisymétrique lorsque pour tout $(x, y) \in E^2$, pour tous i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$, pour tout $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \in E^{n-2}$,

$$f\left(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \dots, x_n\right) = -f\left(x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n\right)$$

(si on « transpose », ou « échange », ou « intervertit » deux vecteurs dans le n-uplet, l'image par f est changée en son opposé).

Ecriture avec permutations f est antisymétrique si et seulement si, pour toute transposition $\tau \in \mathfrak{S}_n$,

$$f(x_{\tau(1)}, \dots, x_{\tau(n)}) = -f(x_1, \dots, x_n)$$

C'est quand même plus clair !

Proposition f est antisymétrique si et seulement si, pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$

$$f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \epsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$

où $\epsilon(\sigma)$ est la signature de σ.

Démonstration (pas compliquée, mais il est intéressant de savoir l'écrire)

c Lien

Proposition Toute application n-linéaire alternée est antisymétrique. La réciproque est vraie lorsque $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$, mais il y a des corps sur lesquels cette réciproque est fausse.

Démonstration

II.3 Forme n-linéaire alternée

On appelle forme n-linéaire alternée sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E toute application

$$f : E^n \longrightarrow \mathbf{K}$$

n-linéaire et alternée. Une telle forme est donc antisymétrique.

III Le théorème de structure

III.1 Introduction

Pas essentielle.

Soit E un espace vectoriel de dimension 3 ; il y a beaucoup de formes bilinéaires alternées sur E. Par exemple, si (e_1, e_2, e_3) est une base de E,
si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ et $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ on peut définir
$\phi(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$
$\psi(x, y) = x_2 y_3 - x_3 y_1$
et on obtient deux formes bilinéaires alternées bien différentes. On n'aura pas de mal à en imaginer plein d'autres, surtout si on change de bases…
En revanche, des formes 4-linéaires alternées, il n'y en a qu'une : l'application nulle,

$$(x, y, z, t) \longmapsto 0$$

[démonstration : 4 vecteurs en dimension 3 sont liés, il y en a donc au moins un qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres, par exemple

$$t = \alpha x + \beta y + \gamma z$$

Alors, si f est 4-linéaire, par linéarité par rapport au dernier vecteur,

$$f(x, y, z, t) = \alpha f(x, y, z, x) + \beta f(x, y, z, y) + \gamma f(x, y, z, z)$$

Or, si f est alternée, le second membre est nul.]
Trop de formes 2-linéaires alternées, pas de forme 4-linéaire alternée…on peut espérer que les objets agréables à étudier soient les formes 3-linéaires alternées !

III.2 Le théorème de structure

Enoncé 1 *Très structurel justement ! simple et bref.*
Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n. L'espace des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 1.
Bien sûr, il s'agit du même n les deux fois…

Enoncé 2 *Un peu plus analytique. Inconvénient, cet énoncé est plus lourd. Avantage, il est plus prêt à être utilisé.*
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire alternée ϕ sur E telle que $\phi(e_1, e_2, \ldots, e_n) = 1$. Et toute forme n-linéaire alternée sur E est de la forme $\lambda\phi$ avec $\lambda \in \mathbf{K}$.

Equivalence Si l'énoncé 2 est vrai, il montre l'existence d'une forme n-linéaire alternée ϕ sur E telle que l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E soit

$$\{\lambda\phi\ ;\ \lambda \in \mathbf{K}\}$$

c'est-à-dire $\mathrm{Vect}(\phi)$, donc un espace vectoriel de dimension 1.

Si l'énoncé 1 est vrai, l'énoncé 2 l'est aussi...mais dans ce sens l'implication est un peu moins évidente, et comme on va démontrer l'énoncé 2, ce n'est pas indispensable de se fatiguer.

Démonstration de l'énoncé 2 : *Démontrer ce résultat donne des écritures lourdes et techniques. Les idées ne sont en revanche pas bien compliquées : c'est du calcul. C'est pourquoi écrire les preuves dans les cas particuliers $n = 2$ et $n = 3$ est éclairant : on comprend comment vont se passer les calculs, et pour le cas général on n'a plus qu'à se concentrer sur la forme. Ces cas $n = 2$ et $n = 3$ ne sont donc pas l'amorce d'une récurrence. Il est sans doute plus intéressant de comprendre ces cas que de viser l'expertise sur la démonstration du cas général, qui n'est pas un objectif prioritaire, loin de là.*
Le schéma est classique : analyse-synthèse...

Cas n=2 : Si $x = x_1e_1 + x_2e_2$ et $y = y_1e_1 + y_2e_2$ sont dans E, on a, si ψ est une forme n-linéaire alternée sur E :

$$\begin{aligned}\psi(x,y) &= \psi(x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2)\\ &= x_1y_1\psi(e_1,e_1) + x_1y_2\psi(e_1,e_2) + x_2y_1\psi(e_2,e_1) + x_2y_2\psi(e_2,e_2)\\ &= (x_1y_2 - x_2y_1)\psi(e_1,e_2)\end{aligned}$$

Si on impose en plus la condition $\psi(e_1,e_2) = 1$, on n'a pas le choix, une seule forme est possible :

$$\phi\ :\ (x,y) \mapsto x_1y_2 - x_2y_1$$

Mais on vérifie que ϕ ainsi définie est bien une forme bilinéaire alternée sur E. Ce qui montre le résultat pour $n = 2$.

Cas n=3 : Soit E un espace vectoriel de dimension 3. Soit (e_1,e_2,e_3) une base de

E. Considérons une forme trilinéaire alternée ψ sur E. Si $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$, $y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ et $z = z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3$ sont dans E, on a successivement :

$$\psi(x, y, z) = \psi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3, z_1 e_1 + z_2 e_2 + z_3 e_3)$$

$$\begin{aligned}\psi(x, y, z) = x_1 y_2 z_3 \psi(e_1, e_2, e_3) + x_1 y_3 z_2 \psi(e_1, e_3, e_2) + x_2 y_1 z_3 \psi(e_2, e_1, e_3)\\ + x_2 y_3 z_1 \psi(e_2, e_3, e_1) + x_3 y_1 z_2 \psi(e_3, e_1, e_2) + x_3 y_2 z_1 \psi(e_3, e_2, e_1)\end{aligned}$$

(contrairement au cas $n = 2$, on a directement éliminé les termes qui sont nuls à cause du caractère alterné de ψ (par exemple $\psi(e_1, e_2, e_1)$, $\psi(e_3, e_2, e_2)$, etc...Si on ne fait pas ça, on a 27 termes à écrire dans le développement...3^3 c'est beaucoup plus grand que 2^2...). Maintenant, on utilise

$$\psi\left(e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}\right) = \epsilon(\sigma)\psi(e_1, e_2, e_3)$$

et on obtient (bon exercice de calcul rapide de signatures) :

$$\begin{aligned}\psi(x, y, z) &= (x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1)\psi(e_1, e_2, e_3)\\ &= \psi(e_1, e_2, e_3)\phi(x, y, z)\end{aligned}$$

où $\phi : (x, y, z) \mapsto x_1 y_2 z_3 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1$ est bien une forme trilinéaire alternée sur E. On conclut alors comme pour $n = 2$.

Cas général : Les idées sont les mêmes que pour $n = 2, 3$, mais il va falloir écrire des Σ et les indexer convenablement.
Soit donc E un espace de dimension $n \geq 2$, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, ψ une forme n-linéaire alternée sur E. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \ldots, x_n)$. On a alors (développement par multilinéarité)

$$\begin{aligned}\psi(x_1, \ldots, x_n) &= \psi\big(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1,1}\ e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2,2}\ e_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n,n}\ e_{i_n}\big)\\ &= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in[\![1,n]\!]^n} a_{i_1,1}\ a_{i_2,2} \ldots a_{i_n,n}\ \psi(e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n})\end{aligned}$$

La donnée d'un n-uplet $(i_1, \ldots, i_n)$ d'éléments de $[\![1, n]\!]$ équivaut à la donnée d'une application f de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même (on pose $f(k) = i_k$ pour $k \in [\![1, n]\!]$).

On remarque alors que, lorsque f n'est pas une bijection, ce qui équivaut ici à dire qu'elle n'est pas injective, on a $\psi(e_{f(1)}, e_{f(2)}, \dots, e_{f(n)}) = 0$ (car ψ est alternée). On ne garde donc dans la somme que les termes indexés par les bijections, c'est-à-dire les permutations de $[\![1, n]\!]$. Et on se souvient que ψ est alternée, elle est donc antisymétrique :

$$\begin{aligned}\psi(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} a_{\sigma(1),1}\ a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}\ \psi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \Big(\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\ a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} \Big) \psi(e_1, e_2, \dots, e_n)\end{aligned}$$

et la conclusion s'ensuit à condition de vérifier que l'application

$$\phi\ :\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1}\ a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n}$$

est une forme n-linéaire alternée sur E qui prend la valeur 1 en $(e_1, \dots, e_n)$.
Que ϕ soit une forme linéaire, c'est assez facile.
Qu'elle soit alternée, c'est très intéressant à écrire : à faire, donc.
Pour $(x_1, \dots, x_n) = (e_1, \dots, e_n)$, la matrice A est , le seul terme non nul est donc obtenu pour $\sigma =$, ce qui donne bien ce qu'on veut.

III.3 Déterminant de n vecteurs dans une base d'un espace vectoriel de dimension n

Définition-Notation Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. L'unique forme n-linéaire alternée ϕ sur E telle que

$$\phi(e_1, \dots, e_n) = 1$$

est appelée déterminant dans la base $\mathscr{B}$ et est notée $\det_{\mathscr{B}}$.

Formule Si, pour tout j, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$, alors

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}\ .$$

Exercice Il peut arriver qu'on ne se souvienne pas bien, et qu'on écrive

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \sigma_n} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}\ .$$

Expliquer pourquoi cette formule est encore vraie, si possible sans tricher, c'est-à-dire sans utiliser le fait qu'une matrice et sa transposée ont même déterminant.

Proposition Soit $\mathscr{B}$ une base de E, avec $\dim(E) = n$. Les formes n-linéaires alternées sur E sont les $\lambda \det_{\mathscr{B}}$ où λ est un élément de $\mathbf{K}$.

Proposition bis Les formes n-linéaires alternées sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n forment un espace vectoriel de dimension 1.

Recette d'utilisation - mode d'emploi Il faut penser à ce résultat lorsqu'on doit montrer un résultat de la forme

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E^p \qquad \phi(x_1, \dots, x_p) = \alpha \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p)$$

(où E est un espace de dimension p). On doit alors penser à la méthode suivante :

On montre que ϕ est une forme p-linéaire alternée. Cela donne déjà l'existence de α, par le théorème de structure. Puis, pour déterminer α, on prend $(x_1, \dots, x_p) = \mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$. On a alors $\alpha = \phi(e_1, \dots, e_p)$.

Ce schéma de démonstration se rencontre assez couramment, dans le cours (voir ci-après), mais aussi dans des exercices.

III.4 Changement de bases

Proposition : Soit B, B' deux bases de E. Alors, pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E, on a

- $\det_{B'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{B'}(B) \det_B(x_1, \dots, x_n)$
- $\det_B(x_1, \dots, x_n) = \det_B(B') \det_{B'}(x_1, \dots, x_n)$

et donc : $\det_B(B') = (\det_{B'}(B))^{-1}$

Démonstration : Très intéressante, elle permet de voir fonctionner la « recette-mode d'emploi » vue précédemment.

III.5 Formes alternées et indépendance linéaire

Proposition : Soit ϕ une forme n-linéaire alternée sur un espace vectoriel de dimension n. On suppose que ϕ n'est pas la forme nulle (i.e. $\phi \neq \widetilde{0}$, ce qui n'empêche évidemment pas ϕ de s'annuler), alors, pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E,

$$\Big(\phi(x_1, \dots, x_n) = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big((x_1, \dots, x_n) \text{ liée}\Big)$$

Démonstration : Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est liée, un des x_i, par exemple x_k, est combinaison linéaire des autres :

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i x_i$$

En développant $\phi(x_1, \dots, x_n)$ par linéarité par rapport au k-ième vecteur et en utilisant le caractère alterné de ϕ, on obtient

$$\phi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \alpha_i \phi(x_1, \dots, x_{k-1}, x_i, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$$

Si, maintenant, la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre, c'est une base $\mathscr{B}$ de E. Et on retourne au théorème de structure : soit $\phi_0 = \det_{\mathscr{B}}$; alors si ϕ est une forme linéaire non nulle, il existe λ tel que $\phi = \lambda \phi_0$. Nécessairement $\lambda \neq 0$, donc $\phi(x_1, \dots, x_n) = \lambda \neq 0$. On utilise presque tout le temps ce résultat sous la forme suivante, qui donc est la plus importante :

Corollaire : Pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E,

$$\Big(\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0\Big) \Longleftrightarrow \Big((x_1, \dots, x_n) \text{ base de } E\Big)$$

IV Déterminant d'un endomorphisme

IV.1 Définition

Définir le déterminant d'un endomorphisme demande un petit peu d'attention, mais c'est la formule qu'il faut retenir.

Définition Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $\mathscr{B}$ une base de E. L'application

$$\phi : (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big)$$

est une forme n-linéaire alternée sur E, il existe donc un λ tel que $\phi = \lambda \det_{\mathscr{B}}$, i.e., pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de E,

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big) = \lambda \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Ce λ, unique, ne dépend pas de la base choisie (démonstration simple en utilisant les relations entre $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$). On l'appelle déterminant de u et on le note $\det(u)$. On a donc la caractérisation :

Formule Pour toute base $\mathscr{B}$ de E, pour toute famille $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E,

$$\det_{\mathscr{B}}\big(u(x_1),\dots,u(x_n)\big) = \det(u)\ \det_{\mathscr{B}}(x_1,\dots,x_n)$$

Et en particulier, si $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$,

$$\det(u) = \det_{(e_1,\dots,e_n)}\big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big)$$

IV.2 Propriétés fondamentales

a Déterminant d'une composée

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

$$\forall (u,v) \in (L(E))^2 \qquad \det(v\circ u) = \det(v)\det(u)$$

...et donc, en particulier,

$$\forall (u,v) \in (L(E))^2 \qquad \det(v\circ u) = \det(u\circ v)$$

b Caractérisation des automorphismes

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in L(E)$.

$$u \in GL(E) \iff \det(u) \neq 0$$

V Déterminant d'une matrice carrée

V.1 Définition, formule

On peut définir le déterminant d'une matrice carrée soit comme le déterminant de l'endomorphisme qui lui est canoniquement associé, soit comme le déterminant dans la base canonique de la famille de ses vecteurs colonnes, c'est la même chose. Et la manière dont on « définit » n'est pas très importante. Ce qui importe, ce sont les formules et les propriétés. Et ici, en particulier, on a la formule :

Formule

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\, a_{\sigma(1),1}\dots a_{\sigma(n),n}$$

(d'ailleurs on pourrait prendre cela comme définition du déterminant d'une matrice). Il faut se pencher un peu sur cette formule pour y voir autre chose qu'un « gros machin ». Il s'agit d'une somme de produits obtenus en prenant un terme et un seul dans chaque ligne et dans chaque colonne (une fois que vous avez pris un $a_{i,j}$ dans votre produit, vous n'avez plus le droit de toucher à la ligne i ni à la colonne j), chaque produit étant affecté d'un signe (et c'est là qu'intervient la notion de signature d'une permutation).
Comme vu plus haut, si on écrit

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon(\sigma) a_{1,\sigma(1)} \dots a_{n,\sigma(n)}$$

c'est encore vrai !

V.2 Remarques banales mais importantes

a Polynomialité

« $\det(A)$ est une fonction polynomiale des composantes de A dans la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ »
Ceci exprime seulement que $\det(A)$ est une combinaison linéaire de produit de puissances des $a_{i,j}$, les coefficients de A. On utilisera cet argument en topologie matricielle pour dire que l'application $A \longmapsto \det(A)$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ avec $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

b Une fonction simple

Que peut-on dire de la fonction

$$x \longmapsto \begin{vmatrix} x & a_{2,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad ?$$

(le fait que la variable soit en haut à gauche n'a aucune importance : on met un x quelque part dans la matrice, et on fixe tous les autres coefficients).
Cette remarque sera utilisée pour calculer la différentielle du déterminant à partir de ses dérivées partielles (voir fonctions de plusieurs variables).

V.3 n=2 et n=3, Sarrus

Comme $|S_2| = 2$ et $|S_3| = 6$, on peut développer brutalement des déterminants 2×2 et 3×3. A partir de 4×4 c'est une autre histoire.

a n=2

$S_2 = \{\mathrm{Id}, (1\ 2)\}$, donc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}$$

b n=3

$S_3 = \{\mathrm{Id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$, signature -1 pour les transpositions et 1 pour les autres. Donc

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}$$

qui serait quand même un peu pénible à savoir par cœur, si on n'avait pas la mnémotechnique règle de Sarrus :

$$\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

(signes + pour les diagonales en traits pleins, signes − pour les antidiagonales en pointillés).

V.4 Lien avec les autres déterminants

On vérifie alors que, pour tout endomorphisme u d'un espace de dimension finie E, pour toute base $\mathscr{B}$ de E,

$$\det(u) = \det\big(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\big)$$

En particulier, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, si BC est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, si $(c_1, \ldots, c_n)$ est la famille des vecteurs colonnes de A,

$$\det(A) = \det_{BC}(c_1, \ldots, c_n)$$

V.5 Propriétés

a Déterminant d'un produit

Proposition Pour toutes matrices carrées A et B,

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

Démonstration En utilisant la propriété analogue pour les endomorphismes, et le paragraphe précédent.

et donc

$$\det(AB) = \det(BA)$$

Remarquons l'analogie avec la trace. . .mais cette analogie a ses limites. Par exemple, si A, B, C sont trois matrices carrées, $\det(ABC) = \det(BAC)$.
Mais en revanche, il n'y a pas de raison pour que l'on ait $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BAC)$.

b Déterminant d'une transposée

Proposition Le déterminant de la transposée d'une matrice carrée est égal au déterminant de cette matrice :

$$\det(A^T) = \det(A)$$

Démonstration Intéressante, déjà à peu près vue.

Corollaire et donc le déterminant d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes dans la base canonique.

c Caractérisation de l'inversibilité

Proposition Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul :

$$\det(A) \neq 0 \iff A \in GL_n(\mathbf{K})$$

Démonstration En utilisant la propriété analogue pour les endomorphismes.

d Remarque

On a

$$\det(\lambda A) \; = \; \lambda^n \; \det(A)$$

On n'a évidemment, en général, $\det(A+B) \neq \det(A)+\det(B)\dots$
Le déterminant n'est pas une forme n-linéaire alternée sur $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Dire cela, c'est mélanger les contextes, c'est plus un non-sens qu'une erreur.

VI Développement par rapport à une ligne ou une colonne

VI.1 Mineurs, cofacteurs, formules

Mineurs Soit A une matrice carrée d'ordre n. On note, pour tout couple d'indices (i,j), $D_{i,j}$ le déterminant de la matrice carrée $(n-1)\times(n-1)$ obtenue en supprimant la i-ème ligne et la j-ième colonne de A. $D_{i,j}$ est appelé mineur associé à $a_{i,j}$.

Formules On démontre alors les formules suivantes :

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$$

(développement par rapport à la i-ème ligne) et

Pour tout $j \in [\![1,n]\!]$,

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} D_{i,j}$$

(développement par rapport à la j-ème colonne).

Démonstration Technique, jamais demandée aux concours, on peut s'en passer...ou reprendre le cours de mpsi !

Cofacteurs $(-1)^{i+j} D_{i,j}$ est le cofacteur de $a_{i,j}$.

Remarquons que les formules ramènent le calcul d'un déterminant $n \times n$ à n déterminants $(n-1) \times (n-1)$, d'où un coût de calcul identique ($n!$) à la formule avec les σ s'il n'y a pas suffisamment de zéros.

A propos des cofacteurs

Le « mineur (i, j) », c'est le déterminant obtenu en ôtant la ligne i et la colonne j. Facile à retenir.

On pourrait donc se dire que le cofacteur, c'est la même chose avec un signe. Ce n'est pas faux, mais ce n'est pas une compréhension suffisante du cofacteur. Il faut comprendre que :

Le cofacteur de $a_{i,j}$, c'est (d'où son nom) ce qui est en facteur de $a_{i,j}$ dans le développement du déterminant :

$$\det(A) = a_{i,j} C_{i,j} + \text{ des termes qui ne dépendent pas de } a_{i,j}$$

avec $C_{i,j}$ cofacteur de $a_{i,j}$.

Il est donc simple, et utile, de s'en souvenir. Par exemple,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Pour la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, les cofacteurs de a, b, c, d sont donc respectivement

$$\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots$$

et la comatrice (matrice des cofacteurs, voir plus loin) est donc

De même,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

(développer par la règle de Sarrus), donc les cofacteurs de a_1, a_2, b_3, c_2 sont respectivement

VI.2 Déterminant d'une matrice triangulaire

a Formule

Par récurrence sur n, en développant par rapport à la première colonne, on obtient

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

b Remarque

Ce résultat est à connaître. Mais il n'est nullement indispensable de connaître la théorie des déterminants pour montrer que

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbf{K}) \iff \forall i \in [\![1,n]\!] \quad a_{i,i} \neq 0$$

(il suffit de dire que la matrice est inversible si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est indépendante, et on montre assez facilement que cette condition équivaut à la non nullité de tous les $a_{i,i}$). Ceci pour amener la remarque suivante :

Remarque : Le déterminant est au programme, on a le droit de s'en servir. Mais ce n'est pas le seul outil pour étudier l'inversibilité d'une matrice. Il ne faut donc pas se focaliser sur le déterminant lorsqu'on doit étudier l'inversibilité d'une matrice ou d'un endomorphisme.

VI.3 Exercice

On considère trois éléments de $\mathbf{K}$: a, b, c, et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ ($n \geq 2$) la matrice « tridiagonale » donnée par

$a_{i,i} = a$ si $1 \leq i \leq n$, $a_{i,j} = b$ si $2 \leq i \leq n$ et $j = i-1$, $a_{i,j} = c$ si $1 \leq i \leq n-1$ et $j = i+1$, $a_{i,j} = 0$ sinon.

On note $d_n = \det(A)$. Montrer que la suite (d_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, que l'on écrira.

VI.4 Comatrice, formule pour l'inverse d'une matrice

a Résultats

Reprenons les notations du paragraphe précédent.

Comatrice La comatrice de A est la matrice $\left((-1)^{i+j}D_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$ des cofacteurs. On la notera $\widetilde{A}$ ou $\mathrm{Com}(A)$, suivant les cas.

Formule Les formules de développement donnent alors

$$A\times(\mathrm{Com}(A))^T = (\mathrm{Com}(A))^T\times A = (\det A)I_n$$

Démonstration Là aussi, on peut passer la démonstration, l'important est le résultat.

L'idée est de séparer l'étude des coefficients diagonaux et non diagonaux.

Le coefficient (i,i) de $A\times(\mathrm{Com}(A))^T$ est

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}(-1)^{i+j}D_{i,j}$$

qui vaut, on le sait par les formules de développement, $\det(A)$.

Le coefficient (i,j) de $A\ (\mathrm{Com}(A))^T$, pour $i\neq j$, vaut

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}(-1)^{j+k}D_{j,k}$$

et l'astuce est de remarquer que c'est, par formule de développement, le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant sa j-ème ligne par sa i-ème. Ce qui en fait une matrice à deux lignes égales, donc à déterminant nul.

On fait les mêmes calculs pour $(\mathrm{Com}(A))^T\times A$.

Formule pour l'inverse On retrouve le fait que A est inversible si et seulement si son déterminant n'est pas nul, et si c'est le cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\ {}^t\widetilde{A}$$

b Utilisation

Certains examinateurs, à l'oral, apprécient que le candidat soit capable de donner de tête

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} =$$

mais la formule précédente ne présente un intérêt pratique pour la détermination de l'inverse d'une matrice qu'en dimension 2 ou 3. On l'utilisera en revanche pour obtenir des résultats théoriques importants, par exemple
Proposition : L'application

$$A \longmapsto A^{-1}$$

est continue sur $GL_n(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K} = \mathbf{C}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ nécessairement, ici). (Voir plus tard, topologie matricielle).

Ces formules donnent également les « formules de Cramer » (h.p.) : un système linéaire

$$AX = B$$

où A est une matrice carrée d'ordre n est dit de Cramer lorsque sa matrice A est inversible, c'est-à-dire lorqu'il admet une solution unique. Un système qui n'est pas de Cramer admet une infinité de solutions (dans le cas de compatibilité) ou aucune (dans le cas d'incompatibilité).

L'unique solution d'un système de Cramer est donnée par

$$X = \frac{1}{\det A}\, {}^t\widetilde{A}\, B$$

ce qui peut s'écrire de la manière suivante : x_i, i-ième composante de X, est le quotient par $\det A$ du déterminant de la matrice obtenue à partir de A en remplaçant la i-ème colonne de la matrice A par la colonne B :

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & b_1 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & b_n & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}}.$$

Ces formules ne sont pas au programme.

c Deux exercices sur la comatrice

La plupart des exercices d'oral sur la comatrice se traitent de la manière suivante : on s'occupe du cas d'inversibilité, en écrivant

$$\mathrm{com}(A) = \det(A)\ \left(A^{-1}\right)^T$$

(la transposée de l'inverse ou l'inverse de la transposée, c'est la même chose). Puis on traite le cas général par continuité, en utilisant le fait que l'application $A \longmapsto \mathrm{Com}(A)$ est continue (voir topologie matricielle). Mais il y aussi des classiques sur la comatrice purement algébriques :

Exercice pas si facile : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Exprimer le rang de $\mathrm{Com}(A)$ en fonction du rang de A.

Pour les astucieuses et les astucieux, enfin :
Exercice (pseudo-Bézout) *a été posé aux Mines et à l'X. C'est astucieux, court, assez peu intéressant, on peut trouver ça amusant.*
Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbf{Z}))^2$ telles que $\det(A)\ \wedge\ \det(B) = 1$. Montrer qu'il existe deux matrices U et V à coefficients entiers telles que

$$UA + VB = I_n$$

VII Opérations sur les lignes ou les colonnes

VII.1 Effet sur le déterminant

Proposition Echanger deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1.

Ajouter à une ligne (ou à une colonne) λ fois une autre ne change pas le déterminant.

Multiplier une ligne ou une colonne par λ multiplie le déterminant par λ (multiplier la matrice par λ multiplie son déterminant par λ^n).

Démonstration Tous ces résultats se montrent facilement en utilisant le fait que le déterminant est une forme n-linéaire alternée, et en interprétant le déterminant d'une matrice comme le déterminant dans la base canonique de la famille de ses vecteurs lignes (ou colonnes).

VII.2 Utilisation

On utilise souvent les opérations élémentaires pour annuler beaucoup de coefficients dans une ligne ou une colonne. Puis on développe par rapport à cette ligne ou colonne.

Exercice très classique (savoir faire)
Calculer

$$D_n(x) = \begin{vmatrix} x-a_1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_2 & x & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_3 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -a_n & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

(polynôme caractéristique d'une matrice compagne, voir chapitre sur la réduction).

VIII Déterminant par blocs

Proposition Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_q(\mathbf{K})$, $U \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et $M \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbf{K})$ définie par blocs de la manière suivante :

$$M = \left(\begin{array}{c:c} A & U \\ \hdashline (0) & B \end{array}\right)$$

Alors

$$\det(M) = \det(A)\det(B)$$

Extension Soit A la matrice triangulaire par blocs (les A_i sont des matrices carrées)

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & \dots & (*) \\ O & A_2 & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ O & \dots & O & A_n \end{pmatrix}$$

Alors

$$\det(M) = \prod_{i=1}^{n} \det(A_i)$$

Démonstration de la proposition On identifie colonnes et vecteurs colonnes : un élément $X = (x_1, \dots, x_p)$ de $\mathbf{K}^p$ est identifié à $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, le contexte montre si on est dans $\mathbf{K}^p$ ou dans $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. L'idée est alors de considérer l'application définie sur $\left(\mathbf{K}^p\right)^p$ par

$$\phi \,:\, (C_1, \dots, C_p) \longmapsto \left|\begin{array}{ccc|c} C_1 & \cdots & C_p & U \\ \hline & (0) & & B \end{array}\right|$$

Quelles sont les propriétés de ϕ ? S'en servir pour conclure.

Démonstration de l'extension Sympathique.

IX Déterminant de Vandermonde

Formule : On note

$$V(x_1,\dots,x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Alors $V(x_1,\dots,x_n) = \prod\limits_{1\leq i<j\leq} (x_j - x_i)$.

Remarque - Exercice : La condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de la matrice de Vandermonde (les x_i deux à deux distincts) peut s'obtenir sans le calcul du déterminant de Vandermonde. C'est d'ailleurs intéressant.

Démonstration de la formule

Deux démonstrations envisageables : par opérations élémentaires ou en considérant les propriétés du polynôme $V(x_1,\dots,x_{n-1},X)$. Cette dernière est à privilégier et à savoir rédiger correctement.

Table des matières