Ag2 : Groupes symétriques

Dans le programme, peu de choses à savoir sur ces groupes. Ils reviennent à la mode aux concours, se prêtant bien à quelques énoncés avec Python (Centrale Math 2) et/ou aux probabilités. Il ne faut donc pas trop négliger cette section, le nouveau programme insiste sur le fait qu'on ne se contente pas de l'application aux déterminants.

I Introduction (h.p.)

Soit $(G,\star)$ un groupe. On note $\mathfrak{S}(G)$ l'ensemble des bijections de G sur G. On rappelle que $(\mathfrak{S}(G),\circ)$ est un groupe.
Pour tout $g\in G$, on définit sur G l'application ϕ_g par

$$\phi_g\ :\ h\longmapsto g\star h$$

1. Montrer que, pour tout $g\in G$, $\phi_g\in\mathfrak{S}(G)$.
2. Montrer que $\phi\ :\ g\longmapsto\phi_g$ est un morphisme de $(G,\star)$ dans $(\mathfrak{S}(G),\circ)$.
3. Déduire de ce qui précède que $(G,\star)$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(G),\circ)$.

Ce résultat est le théorème de Cayley, hors-programme. Il montre que tout groupe est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe de permutations. Si on sait décrire tous les groupes de permutations, on sait donc décrire tous les groupes.

II Groupe symétrique

II.1 Définition

Définition

Soit E un ensemble. L'ensemble des bijections de E dans lui-même (appelées aussi permutations de E), muni de la loi $\circ$ de composition des applications, est un groupe, appelé groupe symétrique de l'ensemble E, et noté S_E ou $\mathfrak{S}(E)$.

Il n'est pas commutatif, sauf lorsque E a 1 ou 2 éléments. Son élément neutre est Id_E.

II.2 Cardinal

Rappelons que si E et F sont des ensembles ayant respectivement n et p éléments, si $n \leq p$ il y a $p(p-1)\dots(p-n+1)$ applications injectives de E dans F. On verra dans le chapitre sur le dénombrement comment rédiger ce résultat de manière pleinement satisfaisante, mais donnons-en une « explication » (qui serait largement acceptée à l'oral).
On numérote les éléments de E :

$$E = \{e_1, \dots, e_n\}$$

Pour définir une injection u de E dans F, on a p choix pour $u(e_1)$. A chacun de ces choix on peut associer $p-1$ choix possibles pour $u(e_2)$ (la seule contrainte étant $u(e_2) \neq u(e_1)$). Etc...
Cette rédaction n'est pas pleinement satisfaisante, mais on verra plus tard comment faire mieux, et de toute façon c'est comme cela qu'on trouve le résultat...Et en particulier :

Proposition : Lorsque l'ensemble E est fini à n éléments, S_E est fini à $n!$ éléments.

Et donc, si E et F ont même cardinal n, S_E et S_F ont même cardinal $n!$. Mais il y a beaucoup mieux :

Proposition : S'il y a une bijection entre E et F, il y a un isomorphisme entre $(S_E, \circ)$ et $(S_F, \circ)$.

Démonstration Pas fondamentale à retenir, mais très intéressante à écrire.
On part d'une bijection

$$E \xrightarrow{f} F$$

et on souhaiterait définir un isomorphisme de $(S_E, \circ)$ sur $(S_F, \circ)$. On se pose donc naturellement la question : si $\phi \in S_E$, comment définir $\psi \in S_F$ à partir de ϕ et de f ? la réponse est assez simple si on fait un petit diagramme :

1. Compléter le diagramme ci-dessous.
2. Terminer la démonstration.

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, "?"] \arrow[d, "?"'] & F \\ E \arrow[r, "\phi"] & E \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

Signification Si E et F ont même cardinal, étudier $(S_E, \circ)$ ou $(S_F, \circ)$, c'est la même chose : ces deux groupes sont isomorphes, i.e. ont la même structure.

Définition On appelle parfois groupe symétrique d'indice n, et on note S_n (parfois $\mathfrak{S}_n$), le groupe des permutations de l'ensemble
$E = \{1, 2, \ldots, n\} = [\![1, n]\!]$.
...qui pourra être remplacé par $[\![0, n-1]\!]$ pour des besoins de programmation Python.

Notation L'élément neutre de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ est $\mathrm{Id}_{\{1,\ldots,n\}}$, i.e. l'application $x \longmapsto x$ de $\{1, \ldots, n\}$ sur lui-même. On le notera simplement Id.

Proposition Le groupe S_n est d'ordre $n!$, ou encore $|S_n| = n!$

Rappel L'ordre d'un groupe fini, c'est son cardinal. Ne pas confondre l'ordre de $\mathfrak{S}_n$, qui vaut $n!$, et son « indice » n.

II.3 Notation provisoire

Pour les exemples, on décrira un élément de ce groupe en écrivant les éléments de $[\![1, n]\!]$ en ligne et, en-dessous de chaque élément, son image. Par exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 9 & 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

signifiera $\sigma(1) = 10$, $\sigma(2) = 3$, etc...On verra plus loin de meilleures façons de noter σ.
Signalons enfin que l'on note couramment $\sigma.x$ ou σx à la place de $\sigma(x)$. Cela permet de limiter l'abondance de parenthèses dans certaines expressions.

III Cycles, transpositions

III.1 Orbites pour une permutation (h.p.)

Définition Soit σ un élément de $\mathfrak{S}_n$. On définit sur l'ensemble $E = [\![1,n]\!]$ la relation $\mathscr{R}_\sigma$ par

$$x \,\mathscr{R}_\sigma\, y \iff \exists k \in \mathbf{Z} \quad y = \sigma^k(x)\ .$$

Proposition On définit ainsi une relation d'équivalence sur $[\![1,n]\!]$.

Vérification non problématique : rappelons qu'une relation d'équivalence est une relation binaire réflexive, symétrique, transitive.
En termes simples et concrets : $x \,\mathscr{R}_\sigma\, y$ lorsqu'en appliquant un certain nombre de fois σ à partir de x on obtient y. En effet, comme $\mathfrak{S}_n$ est fini, σ est d'ordre fini $m \geq 1$ (voir Ag1). On divise :

$$k = mq + r \qquad , 0 \leq r < m$$

et on obtient

$$\sigma^k = \left(\sigma^m\right)^q \circ \sigma^r = \sigma^r$$

(car $\sigma^m = \mathrm{Id}$). Donc, en fait,

$$x \,\mathscr{R}_\sigma\, y \iff \exists k \in [\![0, m-1]\!] \quad y = \sigma^k(x)\ .$$

Définition Les classes d'équivalence pour cette relation sont appelées **orbites** pour σ ou sous σ.

Proposition Les orbites sous σ forment une partition de $[\![1,n]\!]$ (propriété générale des classes d'équivalence pour une relation d'équivalence).

Exemple Ecrire les orbites pour l'élément de $\mathfrak{S}_{10}$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 9 & 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

On remarque qu'un point est fixe par σ si et seulement si son orbite est réduite à un singleton.

III.2 Cycles

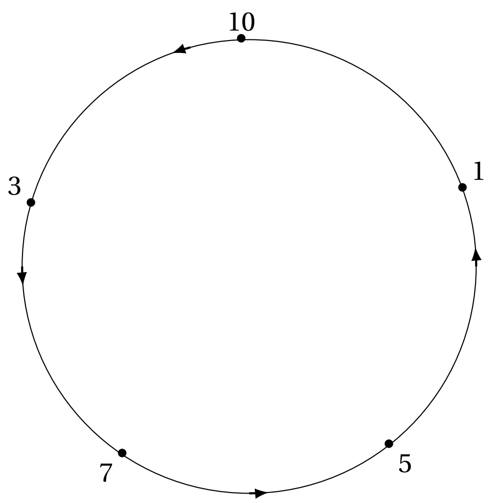
a Définition, notation

Définitions On dit que la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est un cycle lorsqu'elle admet une unique orbite non réduite à un point.
Cette orbite est appelée support du cycle.

Exemple, notation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 5 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix}$$

est un cycle de support $\{1,3,5,7,10\}$, qu'il est avantageux de noter $(1 \quad 10 \quad 3 \quad 7 \quad 5)$. Même si le mieux serait de le noter sur un cercle orienté (la notation en ligne a pour inconvénient, entre autres, de privilégier un élément « de départ »).



Ce cycle peut s'écrire sous les différentes formes équivalentes suivantes :
$(1 \quad 10 \quad 3 \quad 7 \quad 5) = (10 \quad 3 \quad 7 \quad 5 \quad 1) = (3 \quad 7 \quad 5 \quad 1 \quad 10) = \cdots$

b Composée de cycles à supports disjoints

Proposition Si c et c' sont deux cycles à supports disjoints, ils commutent :

$$c \circ c' = c' \circ c$$

c Conjugué d'un cycle (h.p.)

Exercice : Soit $c = (a_1\ a_2\ \dots a_m)$ un cycle dans $\mathfrak{S}_n$ (les a_k sont des éléments de $\{1,\dots,n\}$, deux à deux distincts). Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que $\sigma\circ c\circ\sigma^{-1}$ est un cycle.
Exercice pas trop difficile, mais important, parfois posé à l'oral (ENS, Mines...).

III.3 Longueur d'un cycle

Longueur d'un cycle Soit σ un cycle. Le nombre ℓ d'éléments de l'unique orbite de σ non réduite à un point est la longueur de σ, on dit que σ est un ℓ-cycle. On peut alors énoncer

Lemme Un cycle de longueur ℓ est d'ordre ℓ.

Démonstration

Soit σ un cycle de longueur ℓ. Alors

$$\sigma = (a_1\ a_2\ \dots\ a_\ell)$$

(les a_k sont des éléments deux à deux distincts de $\{1,\dots,n\}$).
Par récurrence sur k, pour tout $k \in [\![0,\ell-1]\!]$ on a

$$\sigma^k(a_1) = a_{k+1}$$

donc, si $1 \le k \le \ell-1$, $\sigma^k \neq \mathrm{Id}$; et $\sigma^{\ell-1}(a_1) = a_\ell$, donc

$$\sigma^\ell(a_1) = \sigma(a_\ell) = a_1$$

donc, si $2 \le k \le n$,

$$\sigma^\ell(a_k) = \sigma^\ell\left(\sigma^{k-1}(a_1)\right) = \sigma^{k-1}\left(\sigma^\ell(a_1)\right) = \sigma^{k-1}(a_1) = a_k$$

et donc $\sigma^\ell = \mathrm{Id}$, ce qui conclut.

IV Transpositions

Définition On appelle **transposition** tout 2-cycle, c'est-à-dire tout cycle de la forme $(x\ y)$ $(x \neq y)$.

Remarque

Une transposition τ est d'ordre 2 : $\tau^2 = \tau\circ\tau = \mathrm{Id}$.
On dit qu'une transposition est une involution, ou qu'elle est involutive.
Les autres exemples classiques d'involutions dans le programme sont les

symétries en algèbre linéaire (elles vérifient $s \circ s = \mathrm{Id}$).
L'involutivité est une propriété caractéristique des symétries, ce n'est pas une propriété caractéristique des transpositions : par exemple, si τ et τ' sont deux transpositions à supports disjoints, $\tau \circ \tau'$ est d'ordre 2 et n'est pas une transposition.

V Décomposition d'une permutation ; signature

V.1 Théorèmes de décomposition

a Les résultats

Proposition 1 Soit $n \geq 2$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il existe des transpositions $\tau_1, \dots, \tau_q$ telles que

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \cdots \circ \tau_q$$

(Une telle décomposition n'est pas unique).

Proposition 2 Soit $n \geq 2$. Pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, il existe des cycles à supports deux à deux disjoints $c_1, \dots, c_p$ tels que

$$\sigma = c_1 \circ c_2 \circ \cdots \circ c_p$$

Cette décomposition est alors commutative : on peut changer l'ordre des c_i.
Cette décomposition est unique, à l'ordre des facteurs près évidemment.

Formulations alternatives Toute permutation se décompose en produit (on devrait plutôt dire : composée) de cycles. Toute permutation se décompose en produit (ou composée) de transpositions.

Les cycles engendrent le groupe symétrique, les transpositions engendrent le groupe symétrique.

Remarque sur les notations et le vocabulaire Généralement, quand on travaille dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$, on abandonne les $\circ$, on note $\sigma\sigma'$ plutôt que $\sigma \circ \sigma'$, on parle de « produit » alors qu'il s'agit de composition. Mais attention, ça ne rend pas la composition commutative...

b La démonstration importante

On va démontrer par récurrence la proposition 1.
On a déjà vu des preuves de ce genre dans des énoncés de problèmes de concours.
L'initialisation ($n = 2$ est plus intéressant que $n = 1$) ne pose pas de difficulté.

On note $\mathscr{P}_n$ la propriété « Tout élément de $\mathfrak{S}_n$ s'écrit comme composée de transpositions. »
En supposant $\mathscr{P}_n$ vraie, soit σ un élément de $\mathfrak{S}_{n+1}$. On distingue alors deux cas :
Si $\sigma(n+1) = n+1$, on applique l'hypothèse de récurrence à la permutation de $\{1,\dots,n\}$ « induite » par σ. Rédigeons (mais c'est à peine nécessaire) : σ induit une permutation $\sigma|_n$ de $[\![1,n]\!]$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\tau_1, \tau_2,\dots,\tau_p$ transpositions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$ telles que

$$\sigma|_n = \tau_1 \dots \tau_p$$

Notons alors, pour tout k, $\widetilde{\tau_k}$ la transposition de $[\![1,n+1]\!]$ définie par

$$\forall k \in [\![1,n]\!] \quad \widetilde{\tau_k}(j) = \tau_k(j) \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\tau_k}(n+1) = n+1$$

($\widetilde{\tau_k}$ « étend » τ_k à $[\![1,n+1]\!]$). Il est clair que $\widetilde{\tau_k}$ est une transposition (d'ailleurs, même s'il ne faudrait pas a priori confondre les deux, si $\tau_k = (i\ \ j)$ alors $\widetilde{\tau_k} = (i\ \ j)$...la même notation pour deux choses différentes).
Sinon, $\sigma(n+1) = m$ avec $m \in \{1,\dots,n\}$. On définit alors

$$\sigma' =$$

et on se ramène au cas précédent.

Cette démonstration est utile, à comprendre, surtout la dernière idée.

Remarque : On a en fait démontré un peu mieux : tout élément de $\mathfrak{S}_n$ peut s'écrire comme composée de p transpositions, avec $p \leq n$. Ce résultat renforcé n'est pas au programme car on ne s'en sert pas.

c Démonstration moins importante

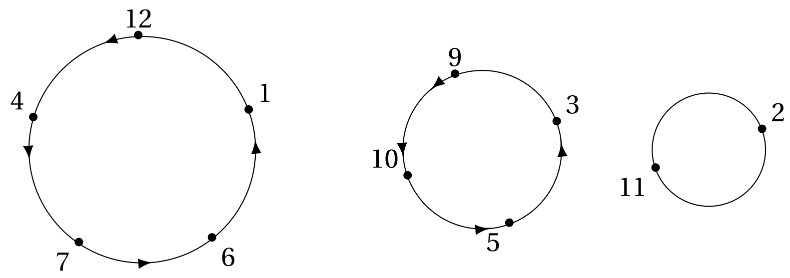
Une démonstration de la proposition 2 :
La démonstration n'est pas exigible, mais elle a par exemple été posée à l'oral de Centrale.
Cette preuve est surtout « rédactionnelle », puisqu'un exemple suffit à se rendre compte de ce qu'il faut faire. Par exemple, si

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 11 & 9 & 7 & 3 & 1 & 6 & 8 & 10 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

on a

$$\sigma = (1\ 12\ 4\ 7\ 6)\ (2\ 11)\ (3\ 9\ 10\ 5)$$

et on voit assez bien que la décomposition en cycles correspond à la partition de $[\![1, 12]\!]$ en orbites pour σ :



Il faut espérer qu'à l'oral, quand cette démonstration a été posée, l'examinateur a accepté quelques « évidences » qui ne sont pas spécialement intéressantes à écrire.

Le cas $\sigma = \mathrm{Id}$ est particulier : on considère que l'identité est composée de 0 cycles (de même qu'une somme vide est nulle, qu'un produit vide vaut 1, etc...). On pourrait d'ailleurs aussi faire intervenir des cycles de longeur 1, i.e. des cycles du type (i). Qui sont eux-même égaux à l'identité...Un cas particulier pas très constructif donc, mais pas gênant.
Pour une permutation σ autre que Id, écrivons l'ensemble des orbites non réduites à un point : $\{X_1, \dots, X_p\}$. Chacune de ces orbites est stable par σ. Définissons c_k par
Si $i \in X_k$, $c_k(i) = \sigma(i)$
Si $i \notin X_k$, $c_k(i) = i$
On constate les choses suivantes : c_k est une permutation, c'est même un cycle. Les c_k, étant à supports deux à deux disjoints, commutent. Enfin, $c_1 \dots c_p$ et σ coïncident sur chaque X_k d'une part, sur $[\![1, n]\!] \setminus \bigcup_{i=1}^{p} X_i$ d'autre part. Donc sont égaux.
Reste l'unicité : supposons

$$\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_q$$

où les γ_k sont des cycles à supports deux à deux disjoints. Notons Y_k le support de γ_k. Sur Y_k, tous les γ_i pour $i \neq k$ coïncident avec Id, donc σ coïncide avec γ_k. Et donc Y_k est une orbite pour σ [on a le droit de ne pas trouver ça si évident, mais ce n'est pas vraiment pénible à écrire : nécessairement, il y a un $x \in [\![1, n]\!]$ (plusieurs même) tel que

$$\gamma_k = \left(x\ \gamma_k(x)\ \dots \gamma_k^m(x)\right) = \left(x\ \sigma(x)\ \dots \sigma^m(x)\right)$$

ce qui implique que $Y_k = \{x, \sigma(x), \dots, \sigma^m(x)\}$ avec $\sigma^{m+1}(x) = x$, donc Y_k est bien une orbite pour σ.] Et donc chaque γ_k est dans $\{c_1, \dots, c_p\}$. Quitte à renuméroter les γ_i (qui commutent, donc la réindexation n'a aucun effet sur la composée), on a donc $q \leq p$, et

$$\gamma_1 \dots \gamma_q = c_1 \dots c_q$$

Mais donc

$$c_1 \dots c_q = c_1 \dots c_p$$

et si $q < p$ on aboutit à

$$c_{q+1} \dots c_p = \mathrm{Id}$$

ce qui est absurde (prendre un x dans l'orbite de c_p, par exemple). Il y a donc bien unicité.

d Remarque intéressante

Une autre démonstration de la proposition 1 (en utilisant la proposition 2) Quand on a la proposition 2, il suffit de montrer qu'un cycle se décompose en produit de transpositions. Or on voit assez facilement qu'un p-cycle peut se décomposer de diverses manières en produit de $p-1$ transpositions : par exemple,

$$(x_1\ x_2 \dots x_p) = (x_p\ x_1)(x_{p-1}\ x_1) \dots (x_2\ x_1) = (x_1\ x_2) \dots (x_{p-1}\ x_{p-2})(x_p\ x_{p-1})$$

e Pratique

Le programme stipule que l'on doit savoir décomposer une permutation.

TP 1 Décomposer en « produit » de transpositions la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 3 & 9 & 7 & 5 & 4 & 6 & 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

TP 2 Décomposer en « produit » de transpositions la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 12 & 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

V.2 Signature d'une permutation

a Un invariant

Il n'y a pas unicité de la décomposition d'une permutation en « produit » de transpositions, mais...

Proposition :

Soit $\sigma = \tau_1 \dots \tau_p = \tau'_1 \dots \tau'_m$ une permutation décomposée (de deux façons) en produit de transpositions. Alors p et m ont même parité. Ou encore : $(-1)^p = (-1)^m$.

Démonstration (non exigible) : Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on pose

$$\epsilon(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Il est utile, pas seulement pour ce qui va suivre, de noter que l'indexation $1 \le i < j \le n$ *peut parfois être avantageusement remplacée par l'indexation* $\{i, j\} \in \mathscr{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$ *où* $\mathscr{P}_2(\llbracket 1, n \rrbracket)$ *désigne l'ensemble des parties à 2 éléments de l'ensemble* $\llbracket 1, n \rrbracket$. *Ce changement d'indexation se rencontre aussi dans les relations coefficients-racines, voir algèbre générale.*

1. Démontrer que, si σ et σ' sont dans $\mathfrak{S}_n$, alors $\epsilon(\sigma \circ \sigma') = \epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma')$.
2. Montrer que, si τ est une transposition, $\epsilon(\tau) = -1$.
3. Vérifier que si une permutation σ s'écrit

$$\sigma = \tau_1 \dots \tau_p = \tau'_1 \dots \tau'_q$$

où les τ_i et les τ'_j sont des transpositions, alors p et q ont même parité.

b Morphisme signature

Définition Si σ peut se décomposer en produit d'un nombre pair (respectivement : impair) de permutations, on dit que σ est une permutation paire (respectivement : impaire). On définit sa signature : $\epsilon(\sigma) = 1$ (respectivement : $\epsilon(\sigma) = -1$).

Proposition L'application

$$\begin{array}{rccc} \epsilon : & \mathfrak{S}_n & \longrightarrow & \{-1, 1\} \\ & \sigma & \longmapsto & \epsilon(\sigma) \end{array}$$

qui à une permutation associe sa signature est un morphisme (surjectif dès que $n \ge 2$) du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_n, \circ)$ dans le groupe $(\{-1, 1\}, \times)$.

Formule Si $\sigma = \tau_1 \dots \tau_p$ alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^p$.

Formule La signature d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$.

Calcul On peut ainsi calculer de deux manières différentes $\epsilon(\sigma)$, soit directement si on dispose d'une décomposition en produit de transpositions, soit en utilisant la formule suivante (conséquence de la précédente et de la décomposition en cycles) :
Si $\{X_1, \dots, X_p\}$ est l'ensemble des orbites de σ, si $N(\sigma) = \sum_{k=1}^{p} (|X_k| - 1)$, alors $\epsilon(\sigma) = (-1)^{N(\sigma)}$.

c Groupe alterné

Définition : L'ensemble des permutations paires de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}_n, \circ)$, appelé sous-groupe alterné d'ordre n et noté $\mathscr{A}_n$. Il est d'ordre $\dfrac{n!}{2}$.

V.3 Petits $\mathfrak{S}_n$

a Description de $\mathfrak{S}_2$

Faire la liste des éléments de $\mathfrak{S}_2$, dresser la « table de multiplication » du groupe.

b Description de $\mathfrak{S}_3$

On a facilement

$$\mathfrak{S}_3 = \{\mathrm{Id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$$

1. Décrire $\mathscr{A}_3$. Montrer que $(\mathscr{A}_3, \circ)$ est commutatif.
2. On pose $\tau = (1\ 2)$, $c = (1\ 2\ 3)$. Exprimer tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$ comme composés de puissances de c et de τ. Vérifier que $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ n'est pas commutatif.

Remarque : on peut montrer qu'il n'y a pas de structure de groupe non commutatif sur un ensemble ayant au plus 5 éléments.

c Description de $\mathfrak{S}_4$

Faire la liste des éléments de $\mathfrak{S}_4$. Déterminer, parmi ces éléments, ceux de $\mathscr{A}_4$.

d Un sous-groupe

Démontrer que les 3 éléments de $\mathfrak{S}_4$ qui ne sont pas des cycles forment, avec l'identité, un groupe dont on dressera la table de composition. *L'existence de ce groupe, appelé parfois Vierergruppe de Klein, est en théorie de Galois une raison de la résolubilité par radicaux des équations de degré 4.*

Table des matières