S4 : Séries de fonctions numériques

I Convergence simple, convergence uniforme, convergence normale

I.1 Convergence simple

Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions définies sur une partie I de $\mathbf{R}$ (presque toujours un intervalle), à valeurs réelles ou complexes. On définit la suite de fonctions (S_n),

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$$

c'est-à-dire

$$S_n \,:\, x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$$

On dira que S_n est la fonction somme partielle d'ordre n de la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 0} f_n$.

Définition : On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum f_n(x)$ converge.

Autrement dit lorsque, pour tout $x \in I$, la **série** de terme général $f_n(x)$ converge.

Autrement dit lorsque, pour tout $x \in I$, la **suite** $\big(S_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$ converge.

Autrement dit lorsque la suite (S_n) converge simplement sur I.

Lorsqu'il y a convergence simple, on peut définir la fonction

$$S \,:\, x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$$

que l'on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ et que l'on nomme **somme** de la série de fonctions $\sum f_n$. C'est la limite (pour la convergence simple) de la suite de fonctions (S_n). On peut alors définir la suite de fonctions (R_n) par

$$R_n = S - S_n$$

c'est-à-dire

$$R_n \ : \ x \longmapsto S(x) - S_n(x)$$

On a, pour tout $x \in I$, $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$.

Pour tout x, la suite $\big(R_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$, comme toute suite de restes qui se respecte, converge vers 0. Autrement dit, la suite (R_n) converge simplement vers la fonction nulle $(\widetilde{0})$:

$$R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} \widetilde{0}$$

Conclusion : Etudier la convergence simple d'une série de fonctions, c'est étudier une série dont le terme général dépend d'un paramètre (x).

Exemples : Etudier la convergence simple des séries de fonctions de la variable réelle x :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^x}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

(ce serait mieux de parler des séries de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} \left(x \mapsto \frac{1}{n^x}\right), \qquad \sum_{n\geq 1} \left(x \mapsto \frac{(-1)^n}{n^x}\right) \text{ etc}\ldots$$

mais dans les énoncés, au moins ceux donnés à l'oral, on ne prend souvent même pas la peine de dire que x désigne la variable.

I.2 Convergence uniforme

a. Définition

On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A lorsque la suite (S_n) converge uniformément sur A.

b. Caractérisation de la convergence uniforme à l'aide des restes

Proposition La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A si et seulement si la **suite** de fonctions (S_n) converge simplement et la **suite** de fonctions (R_n) converge uniformément (nécessairement vers sa limite simple, $\widetilde{0}$).

Utilisation On se sert de cette proposition pour établir le résultat sur la convergence normale (voir plus loin). On l'utilise aussi lorsque le théorème spécial sur les séries alternées s'applique à la série de fonctions $\sum f_n(x)$.

Exemple à connaître : Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

I.3 Convergence normale

On rappelle que l'on peut définir, si f est une fonction bornée sur A,

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in A} |f(x)| = \sup(\{|f(x)|\ ;\ x \in A\}$$

et que l'on définit ainsi une norme sur $\mathscr{B}(A, \mathbf{K})$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$).

Définition Lorsque, au moins à partir d'un rang n_0, f_n est bornée, et lorsque la série $\sum_{n \geq n_0} N_\infty(f_n)$ converge, on dit que la série $\sum f_n$ est normalement convergente.

Proposition Si $\sum f_n$ est normalement convergente, elle est uniformément convergente : la convergence normale implique la convergence uniforme.

I.4 Méthodes d'étude de la convergence d'une série de fonctions

On commence toujours, si l'énoncé ne le fait pas, par préciser le problème : donner un nom aux fonctions dont on étudie la série ; bien préciser leur domaine de définition et leur ensemble d'arrivée. On doit donc « étudier la convergence de la série de fonctions $\sum f_n$ » sur A.

a. Méthode 1 : la convergence normale

Si les f_n sont bornées, au moins à partir d'un certain rang, et si on pense qu'il pourrait bien y avoir convergence normale (surtout si l'énoncé nous demande de montrer qu'il y a convergence normale), on essaye de montrer la convergence de $\sum N_\infty(f_n)$, soit en calculant explicitement les $N_\infty(f_n)$ (pas toujours possible ni souhaitable), soit en utilisant une majoration uniforme :

$$\forall x \in A \qquad |f_n(x)| \leq \ldots \leq \alpha_n$$

où $\sum \alpha_n$ converge (α_n indépendant de x, bien sûr).
Si on aboutit, c'est fini : « la série de fonctions converge normalement, donc uniformément, sur A » (le réécrire chaque fois qu'on l'utilise).
On n'a pas besoin, dans ce cas, d'étudier préalablement la convergence simple, c'est une méthode qui est dans beaucoup de cas simple, rapide, efficace.

Remarque importante Pour appliquer les théorèmes sur la continuité ou sur la classe (voir plus loin) d'une somme de série de fonctions, on n'a besoin que de la convergence uniforme sur tout segment. Supposons les f_n continues. On dira : « soit K un segment inclus dans I », f_n est continue donc bornée sur K. On calcule alors $N_\infty(f_n|_K)$ ou on la majore, pour essayer de montrer la convergence normale sur K.

b. Méthode 2 : le théorème des séries alternées

Si on pense qu'il n'y a pas convergence normale, même sur tout segment, il faut alors commencer par établir la convergence simple : on fixe x, on étudie une série (revoir S2...). Ce n'est qu'après avoir montré la convergence simple que l'on pourra parler de restes et de somme de la série...

Si cette convergence simple peut se montrer à l'aide du théorème sur les séries alternées, on essaye d'établir la convergence uniforme de la suite des restes (vers la fonction nulle), au moins sur tout segment, grâce à la majoration du reste dans ledit théorème.

c. Sinon…

Quand on n'a pas recours à la convergence normale, on commence de toute façon par établir la convergence simple. Rappelons que c'est l'étude d'une série dépendant d'un "paramètre" x. Cette convergence simple peut se montrer par convergence absolue (à ne pas confondre avec la convergence normale) ou tout autre moyen.
Puis, pour l'uniformité, on se débrouille ! (par exemple, une transformation d'Abel peut parfois être utile, mais il s'agit d'une technique hors-programme).

Si on a montré la convergence simple, et si on veut montrer qu'elle n'est pas uniforme (on est plutôt ici dans le cadre d'un exercice d'oral), on montre que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle. Si on montre que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, c'est suffisant pour conclure. Sinon, on essaiera de trouver une suite (x_n) telle que la suite $\big(R_n(x_n)\big)$ ne converge pas vers zéro.

d. Exemples

Etudier la convergence uniforme des séries de fonctions

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n^2}, \qquad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

Pour deux d'entre elles, on montrera la convergence normale (donc uniforme) sur tout segment du domaine de définition. Pour la troisième, la convergence normale (donc uniforme) sur tout son domaine de définition.

II Séries de fonctions : étude de continuité et de limites

Les résultats qui suivent sont de simples transcriptions des résultats correspondants sur les suites de fonctions : on fait une hypothèse sur les f_n (être bornées, être continues, admettre une limite...). La propriété se transmet aux S_n. On applique alors le résultat déjà connu à la suite (S_n).

II.1 Séries de fonctions bornées

Théorème Si les f_n sont bornées sur A, si $\sum f_n$ converge uniformément sur A, alors la fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est bornée sur A

II.2 Théorème de continuité

Théorème Si les f_n sont continues en $a \in I$, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue en a.

Théorème (bis) Si les f_n sont continues sur I, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I, alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Théorème (ter) Ici, on suppose que I est un intervalle. Si les f_n sont continues sur I, si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I, alors sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.

Exemples : Les sommes des séries de fonctions données à la fin du **I.1.** sont continues sur leur domaine de définition.

II.3 Théorème de la double limite

Théorème : On suppose que a est un réel adhérent à I, éventuellement $a = +\infty$ dans le cas où I est non majoré, éventuellement $a = -\infty$ dans le cas où I est non minoré.

On suppose que chaque f_n a une limite ℓ_n en a.

On suppose que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

Alors la série $\sum \ell_n$ converge, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ a une limite en a, et cette limite est $\sum_{n=0}^{+\infty} \ell_n$. Autrement dit, **sous les hypothèses précédentes**,

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to a} f_n(x)$$

Remarque : Il s'agit bien d'un théorème d'interversion de limites, pas d'un théorème d'interversion de somme et de limite

Exemple : On définit, si $x > 1$,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Montrer que la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $]1,+\infty[$ en étudiant le théorème de la double limite en 1 (*Assez classique, surtout dans des exercices d'oral : on montre qu'il n'y a pas convergence uniforme en montrant que les conclusions du théorème de la double limite ne sont pas vérifiées.*)
2. Montrer que ζ a une limite en $+\infty$, la calculer.

Exercice : Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x}$ ne converge pas uniformément sur $]0,+\infty[$.

II.4 Equivalent en une borne du domaine de définition

C'est un thème d'exercice que l'on rencontre à l'oral. Même si chaque cas est particulier, une méthode est à retenir : la comparaison série-intégrale. Il faut bien sûr qu'on soit sous les hypothèses permettant de l'appliquer. Et surtout il faut avoir les idées claires, ne pas confondre n et x...On n'aura aucun problème si on rédige bien et si on utilise des notations claires.
On peut par exemple calculer un équivalent de ζ au voisinage de 1 :
Exercice : On note, si $x > 1$, $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Trouver un équivalent simple de $\zeta(x)$ quand $x \to 1$ en utilisant une comparaison série/intégrale.

Table des matières