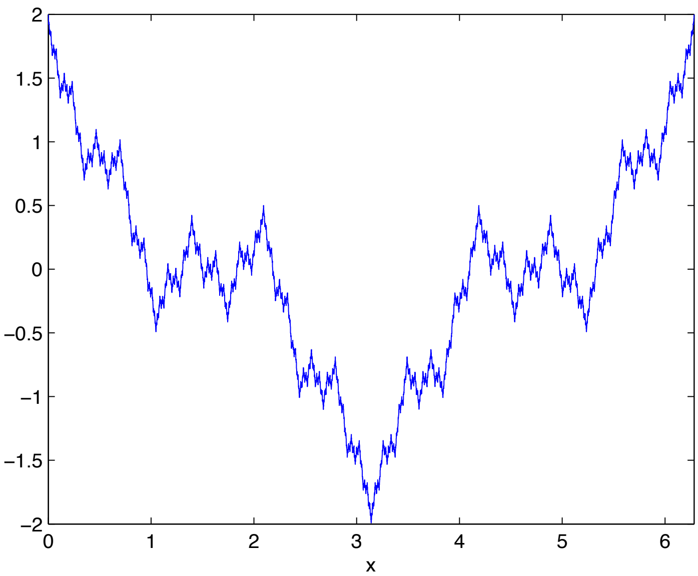
S3 : Suites de fonctions numériques



La fonction de Weierstrass

$$x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(3^n x)}{2^n}$$

est continue, nulle part dérivable, et pourtant limite uniforme sur tout segment d'une suite de fonctions polynomiales

I Convergence simple, convergence uniforme

On considère une suite (f_n) de fonctions définies sur une partie I de $\mathbf{R}$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. Cette partie I sera quasiment toujours un intervalle.

I.1 Convergence simple

a. Définition

Définition On dit que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f sur I lorsque, pour tout élément x de I,

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$$

c'est-à-dire lorsque

$$\forall x \in I \quad \forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\ .$$

On notera alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CS}} f$ (notation non officielle!).

Méthode d'étude Etudier la convergence simple de la suite (f_n), c'est donc étudier, pour chaque $x \in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n\in\mathbf{N}}$. On fixe x, qui joue le rôle d'un paramètre, et on regarde ce qui se passe quand $n \to +\infty$.

b. Exemples

Etudier la convergence (simple) des suites de fonctions suivantes :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

$$g_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x^2 \exp(-nx) \end{array}$$

(α est un nombre réel).

$$h_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n+x}{1+nx} \end{array}$$

I.2 Convergence uniforme

a. Question préliminaire

Soit A une partie de $\mathbf{R}$. Comparer la signification des deux énoncés suivants :

$$\forall x \in A \qquad \exists M \in \mathbf{R} \qquad x \leq M \tag{1}$$

$$\exists M \in \mathbf{R} \qquad \forall x \in A \qquad x \leq M \tag{2}$$

b. Définition

Définition On dit que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur la partie A de $\mathbf{R}$ lorsque, pour tout réel strictement positif ϵ, il existe un rang N tel que,

$$\forall n \geq N \quad \forall x \in A \qquad |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon\ .$$

On note alors $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ (pas plus officielle que la notation précédente, bien évidemment).

c. Une « évidence »

Proposition Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur I, alors (f_n) converge simplement vers f sur I. La réciproque est fausse : il peut y avoir convergence simple non uniforme.

d. Interprétation graphique

La convergence simple n'a pas de signification graphique intéressante. Prenons, par exemple, la suite (f_n) de fonctions définies sur $[0,+\infty[$ par

$$f_n(x) = 1 \text{ si } n \leq x \leq n+1 \qquad , \qquad f_n(x) = 0 \text{ sinon}$$

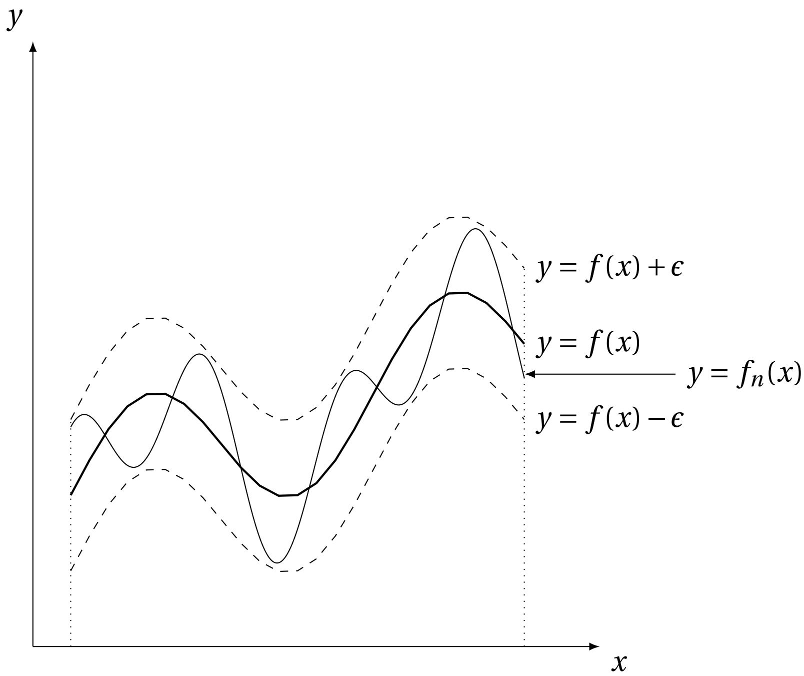
Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction f que l'on déterminera. Tracer les graphes de f_n et de f.

Même question pour la suite de fonctions (f_n) affines par morceaux continues définies sur $[0,1]$ de la manière suivante :
$f_n(0) = f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = f_n(1) = 0$, $f_n\left(\dfrac{1}{2n}\right) = n$, f affine sur $[0,\dfrac{1}{2n}]$, sur $[\dfrac{1}{2n},\dfrac{1}{n}]$ et sur $[\dfrac{1}{n},1]$.

Ces deux exemples sont instructifs, et peuvent servir pour montrer que la convergence simple n'a pas beaucoup de propriétés intéressantes.

En revanche, pour des fonctions à valeurs réelles du moins, la convergence uniforme sur un intervalle s'interprète très bien graphiquement. En effet, si les f_n et f sont définies sur I et à valeurs réelles, $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CU}} f$ sur I si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \; \forall x \in I \qquad f(x) - \epsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \epsilon$$



autrement dit si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il y a un rang à partir duquel le graphe de f_n ne sort plus de la bande délimitée par les graphes de $f + \widetilde{\epsilon}$ et de $f - \widetilde{\epsilon}$

I.3 Norme de la convergence uniforme

a. Norme sur un R ou C-espace vectoriel

On note $\mathbf{K}$ le corps $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On désigne par E un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{K}$ (un $\mathbf{K}$-espace vectoriel).

Définition On appelle **norme** sur E une application $N : E \to \mathbf{R}$ qui vérifie les quatre propriétés suivantes :

1. $\forall x \in E \quad N(x) \geq 0$
2. $\forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall x \in E \qquad N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (H)
3. $\forall (x, y) \in E^2 \qquad N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (I.T.)
4. $N(x) = 0 \Rightarrow x = 0_E$

($x = 0_E \Rightarrow N(x) = 0$) découle de 2. ; 4. est donc une équivalence.
Si on aime les astuces, on peut chercher pourquoi 1. est redondante. . .néanmoins, quand on doit montrer qu'une application est une norme, on commence par montrer qu'elle est bien définie (dans certains cas ce peut être non évident), et à valeurs dans $\mathbf{R}^+$.
(H) est l'homogénéité, (I.T.) est l'inégalité triangulaire.

On dit alors que (E, N) est un **espace vectoriel normé**.

b. Un exemple : la norme « infini » ou norme de la convergence uniforme

Définition Si A est une partie non vide de $\mathbf{R}$, on note $B(A, \mathbf{K})$ l'ensemble des applications bornées sur A, à valeurs dans $\mathbf{K}$.

Définition Si $f \in B(A, \mathbf{K})$, on définit

$$N_\infty(f) = \sup_A |f| = \sup_{x \in A} \left|f(x)\right| = \sup \left(\left\{|f(x)| \ ; \ x \in A\right\}\right)$$

Proposition : $B(A, \mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, N_∞ est une norme sur $B(A, \mathbf{K})$.

Démonstration : La rédaction de l'inégalité triangulaire est à connaître.

Corollaire : N_∞ définit une norme sur $C([a,b],\mathbf{K})$ si $[a,b]$ est un segment (en effet, $C([a,b],\mathbf{K}) \subset B([a,b],\mathbf{K})$).

Notation : On note plus souvent $\|.\|_\infty$ que N_∞.

c. Norme $\|.\|_\infty$ et convergence uniforme

Proposition La suite (f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si

(i) Au moins à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée sur I

(ii) $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

La propriété **(ii)** se lit « la suite $(f_n - f)$ converge vers 0 pour la norme $\|.\|_\infty$ » (voir chapitre sur les espaces vectoriels normés).

I.4 Méthodes d'étude d'une convergence uniforme

a. Première méthode

On commence par la convergence simple (pour trouver, si elle existe, la limite simple f).
Si, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée, et si on sait calculer $\|f_n - f\|_\infty$, on n'a plus qu'à vérifier que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exemple : Utiliser cette méthode pour étudier la convergence uniforme sur $\mathbf{R}^+$ de la suite de fonctions $\left(x \longmapsto e^{-x}\dfrac{x^n}{n!}\right)_{n\geq 0}$ (on pourra utiliser l'équivalent de Stirling, que l'on rappelle :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \quad)$$

b. Deuxième méthode

On commence par la convergence simple (pour trouver, si elle existe, la limite simple f).
Mais il est trop compliqué, voire impossible de calculer $\|f_n - f\|_\infty$.
Ou tout simplement on n'a pas envie de le faire, parce que ce n'est pas la peine !
Il suffit en effet de majorer $|f_n(x) - f(x)|$ indépendamment de x :

$$\forall x \in A \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$$

(insistons : α_n ne dépend pas de x. On appelle cela une « majoration uniforme »). Si la suite (α_n) converge vers 0, la convergence est bien uniforme.

Exemple : Utiliser cette méthode pour étudier la convergence uniforme sur **R** des suites de fonctions

$$\left(x \longmapsto \frac{\sin(nx)}{n}\ e^{-x^2}\right)_{n\geq 1},$$

$$\left(x \longmapsto \frac{\sin(nx)}{n^2 x}\ \arctan(nx+1)\right)_{n\geq 1}$$

(pour cette deuxième suite, les fonctions sont supposées prolongées par continuité en 0).

c. Pour démontrer qu'une convergence n'est pas uniforme...

Plusieurs méthodes snt envisageables.
On suppose dans la suite que (f_n) converge simplement vers f...S'il n'y a déjà pas convergence simple, il ne peut pas y avoir convergence uniforme.

- S'il n'existe pas de rang à partir duquel $f_n - f$ est bornée, la convergence ne peut pas être uniforme.
- Si les f_n sont continues et si f ne l'est pas, la convergence n'est pas uniforme (voir plus loin). C'est un argument très simple et très utilisé.
- Si les conclusions du théorème de la double limite ne sont pas vérifiées, alors la convergence n'est pas uniforme (voir plus loin).
- Plus technique, si aucune des deux méthodes précédentes ne marche : on peut par exemple essayer de trouver une suite (x_n) telle que la suite $\big(f(x_n) - f_n(x_n)\big)$ ne converge pas vers 0. On choisira une suite x_n qui tend vers « là où est le problème ».
  Exercice Montrer que l'existence d'une telle suite empêche bien que la convergence soit uniforme.
- La représentation graphique des fonctions f_n (lorsqu'elle est possible) est souvent utile.

d. Quelques remarques

Remarque 1 S'il y a convergence uniforme sur $[0,1[$ et convergence simple en 1, il y a convergence uniforme sur $[0,1]$.

Remarque 2 En revanche, il peut bien y avoir convergence uniforme sur tout segment $[0,a]$, $0<a<1$, sans qu'il y ait convergence uniforme sur $[0,1[$.

Remarque 3 Si A est un ensemble fini, « la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur A » équivaut à « la suite de fonctions (f_n) converge simplement sur A ». Mais on s'occupe en général de fonctions définies sur un intervalle, et un intervalle est infini (ne pas confondre, d'ailleurs, « infini » et « non borné »)

e. Exemples :

Etudier la convergence uniforme des suites de fonctions suivantes (s'il n'y a pas convergence uniforme sur le domaine de définition, trouver des intervalles sur lesquels il y a convergence uniforme) :

$$f_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & x^n \end{array}$$

$$g_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha x^2 \exp(-nx) \end{array}$$
(α est un nombre réel).

$$h_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}_*^+ & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{n+x}{1+nx} \end{array}$$

$$k_n : \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ x & \longmapsto & \sin\left(\dfrac{n}{n+1}x\right) \end{array}$$

II Limite uniforme d'une suite des fonctions bornées

Proposition Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A, et si chaque f_n est bornée sur A, f est bornée sur A.

Formulation brève La limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est une fonction bornée.

Corollaire Si une suite de fonctions bornées converge simplement vers une fonction non bornée, la convergence n'est pas uniforme.

III Limite uniforme d'une suite de fonctions continues

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur A, et si chaque f_n est continue en a $(a \in A)$, f l'est aussi.

On dit parfois que la convergence uniforme « transmet » ou « conserve » la continuité.

$\star$ démonstration importante $\star$

Remarque : Ce théorème peut donc servir à démontrer qu'une convergence n'est pas uniforme, aussi bien qu'à établir une continuité. Si les f_n sont continues en a et pas f, la convergence ne peut pas être uniforme.

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur la partie A de **R**, et si chaque f_n est continue sur A, f l'est aussi.

Théorème Si la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout segment inclus dans l'intervalle I de **R**, et si chaque f_n est continue sur I, f l'est aussi.

Remarque : Il est à peine utile de donner la défintion suivante :
On dit que la suite (f_n) de fonctions (définies sur un **intervalle** I de **R**, à valeurs dans **R** ou **C**) converge « uniformément vers f sur tout segment » lorsque, pour tout segment K inclus dans I, la suite $(f_n|_K)$ converge uniformément sur K vers $f|_K$.

On verra que dans la pratique, on est très souvent contraint de se contenter de la convergence uniforme sur tout segment, faute de convergence uniforme sur l'intervalle tout entier. Cette convergence uniforme sur tout segment suffit pour avoir les résultats de transmission de la continuité, etc...

IV Théorème de la double limite

Point adhérent à une partie de R Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$. On dira qu'un réel b est adhérent à A lorsque, pour tout $\epsilon > 0$, $]b-\epsilon, b+\epsilon[\cap A \neq \emptyset$. *(voir chapitre sur la topologie des espaces vectoriels normés).*

Formulation équivalente Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$. Un réel b est adhérent à A si et seulement s'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers b.

Théorème Soit A une partie non vide de $\mathbf{R}$, et (f_n) une suite de fonctions définies sur A, à valeurs réelles ou complexes. Soit a un réel adhérent à A. On suppose

1. La suite (f_n) converge uniformément vers f sur A ;
2. Chaque f_n a en a une limite b_n.

Alors

1. la suite (b_n) converge ;
2. f a une limite en a ;
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} (b_n)$.

Si la partie A est non majorée, le résultat s'étend au cas $a = +\infty$.

Si la partie A est non minorée, le résultat s'étend au cas $a = -\infty$.

Utilisation : Surtout dans le cadre des séries de fonctions. Et beaucoup pour montrer qu'une convergence n'est pas uniforme ! Par exemple, si on définit pour chaque n la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = 0 \text{ si } x < n \qquad , f_n(x) = 1 \text{ si } x \geq n$$

alors la suite (f_n) ne converge pas uniformément (exemple peu convaincant, tant la non uniformité est évidente ici, mais on verra mieux).

Remarque sur les hypothèses : Contrairement à d'autres résultats (transmission de la continuité, classe C^1), le théorème de la double limite ne se contente pas de la convergence uniforme sur tout segment.

Remarque : Ce théorème de la double limite est un théorème d'interversion de limites. Il y a beaucoup de problèmes d'interversion de limites qui ne relèvent pas du théorème de la double limite. Mais une interversion de limites ne se fait pas sans hypothèse. Si on veut intervertir et si on ne sait pas comment le justifier, on doit dire « j'admets que je peux intervertir les limites ».

Remarque sur les hypothèses (bis) Si on s'occupe de la limite en $+\infty$, la convergence uniforme sur $[2, +\infty[$ ou sur $[10^5, +\infty[$ sont bien suffisantes. Mais cela n'a rien à voir avec la convergence uniforme sur tout segment.

V Opérations

Proposition Si deux suites de fonctions $\left(f_n\right)_{n\geq 0}$ et $\left(g_n\right)_{n\geq 0}$ convergent uniformément sur A respectivement vers f et g, alors $(\alpha f_n+\beta g_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers $\alpha f+\beta g$ (α et β désignent des nombres, réels ou complexes).

Démonstration Les ϵ sont superflus !

Proposition (H.P.) Si la suite de fonctions $\left(f_n\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur A vers f, si h est une fonction bornée, alors la suite $\left(hf_n\right)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur A vers hf

VI Théorèmes d'approximation uniforme

VI.1 Approximation des fonctions continues par morceaux par des fonctions en escalier sur un segment

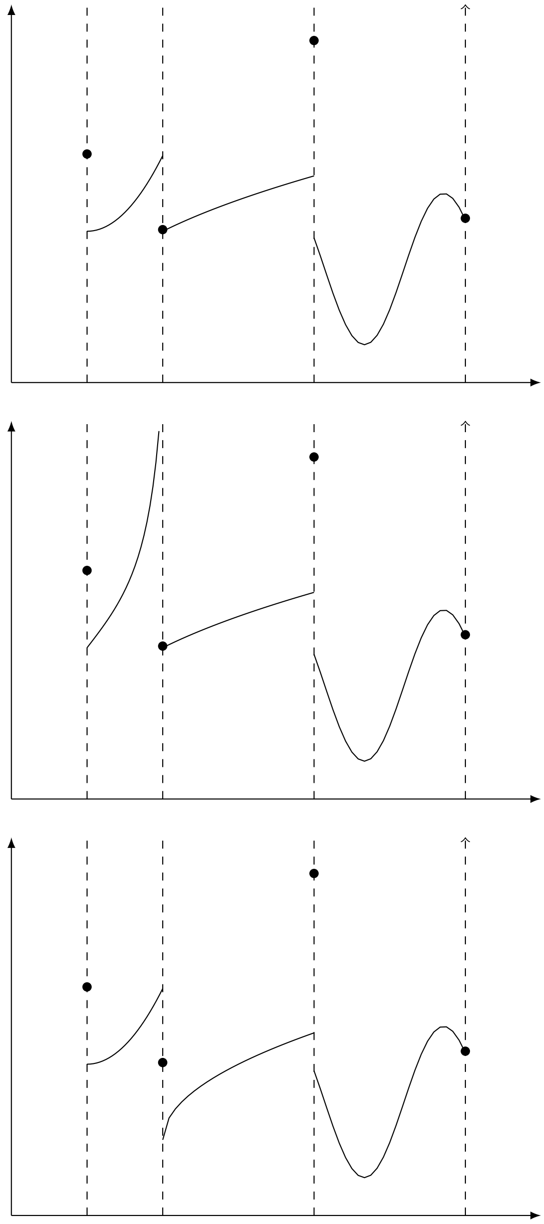
Définition Une application f définie sur un segment $[a, b]$ est dite **en escalier** lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0\le i\le n}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ soit constante. Une telle subdivision est dite subordonnée (ou adaptée) à f.

Définition Une application f définie sur un segment $[a, b]$ est dite **continue par morceaux** lorsqu'il existe une subdivision $(x_i)_{0\le i\le n}$ de $[a, b]$ telle que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ se prolonge en une fonction continue sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$, ce qui revient à dire que la restriction de f à chaque intervalle ouvert $]x_i, x_{i+1}[$ est continue et admet une limite et que f admet une limite à gauche et une limite à droite en chacun des x_i.

Définition On dit qu'une application est continue par morceaux sur un intervalle I lorsque sa restriction à chaque segment inclus dans I est continue par morceaux.

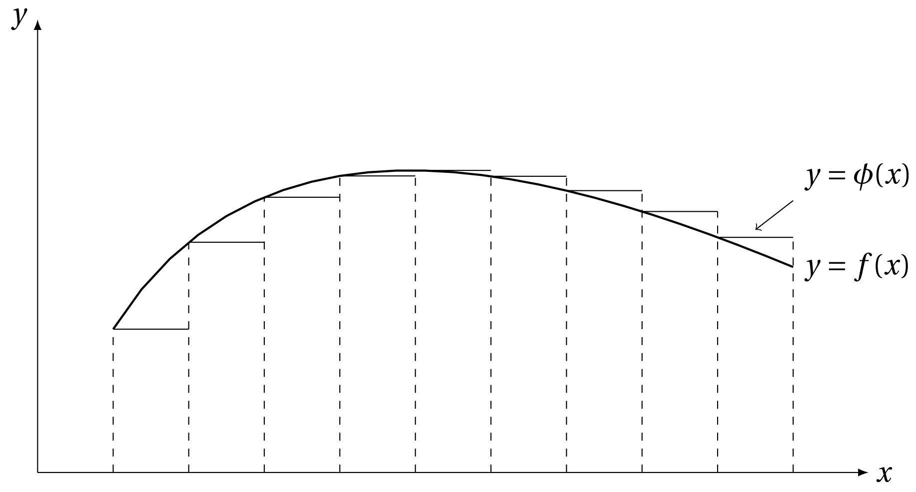
Exercice Montrer qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée sur ce segment.

Les fonctions suivantes sont-elles continues par morceaux?



Théorème Toute application continue par morceaux sur un segment est limite uniforme sur ce segment d'une suite d'applications en escalier sur ce segment.

Autre formulation Soit f continue par morceaux sur $[a,b]$. Pour tout réel strictement positif ϵ, il existe ϕ en escalier sur $[a,b]$ telle que $N_\infty\big(f-\phi\big) \leq \epsilon$.



Démonstration
L'idée n'est pas compliquée : si f est continue, on subdivise le segment $[a,b]$ en considérant les

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n} \qquad (0 \leq k \leq n)$$

et la fonction en escalier construite comme sur le dessin ci-dessus. On espère que si n est grand, cette fonction est proche de f...et ça marche! (en utilisant la continuité uniforme). Si la fonction n'est que continue par morceaux, on fait des raccords.

Supposons d'abord f continue (rédaction intéressante).
D'après le théorème de Heine, f est alors uniformément continue.
Soit $\epsilon > 0$; soit $\eta > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [a,b]^2 \quad |x-y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon$$

(l'existence de η est assurée par la continuité uniforme).

Fixons N entier naturel non nul tel que $\dfrac{b-a}{N} \leq \eta$. On considère alors la subdivision $\left(a + k\dfrac{b-a}{N}\right)_{0\leq k\leq N}$ régulière de pas constant $\dfrac{b-a}{N} \leq \eta$ et on construit la fonction ϕ en escalier de la manière suivante, en notant $x_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$ $(0 \leq k \leq N)$:
$\forall k \in [\![0, N-1]\!] \qquad \forall x \in [x_k, x_{k+1}[\qquad \phi(x) = f(x_k)$
(il reste $\phi(b)$ à définir, on prend simplement $\phi(b) = f(b)$).
On a alors, de par le fait que

$$[a,b] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [x_k, x_{k+1}[\quad \cup \{b\}$$

$\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$ ce qui conclut.

Si f n'est que continue par morceaux (plus anecdotique).
Soit $(y_j)_{0\leq j\leq p}$ une subdivision de $[a,b]$ « adaptée » à f : sur chaque $]y_j, y_{j+1}[$, f est continue, et f a une limite à gauche en y_{j+1} et une limite à droite en y_j.
Pour tout j dans $[\![0, p-1]\!]$, soit f_j continue sur $[y_j, y_{j+1}]$ qui coïncide avec f sur $]y_j, y_{j+1}[$.
Soit $\epsilon > 0$; par le cas précédent, il existe pour chaque j dans $[\![0, p-1]\!]$ une fonction ϕ_j en escalier sur $[y_j, y_{j+1}]$ telle que

$$\forall j \in [\![0, p-1]\!] \quad \forall x \in [y_j, y_{j+1}] \qquad |f_j(x) - \phi_j(x)| \leq \epsilon$$

Soit alors ϕ définie sur $[a,b]$ par
$\forall j \in [\![0, p-1]\!] \quad \forall x \in]y_j, y_{j+1}[\qquad \phi(x) = \phi_j(x)$
$\forall j \in [\![0, p]\!] \qquad \phi(x) = f(x)$
Alors ϕ est en escalier sur $[a,b]$, et $\forall x \in [a,b] \quad |f(x) - \phi(x)| \leq \epsilon$.

VI.2 Théorème de Weierstrass

Théorème Toute fonction continue sur un segment, à valeurs réelles ou complexes, est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynômes.

Autre formulation Soit f continue sur $[a, b]$, à valeurs dans $\mathbf{R}$ (respectivement $\mathbf{C}$). Pour tout $\epsilon > 0$, Il existe une fonction polynôme P à coefficients réels (respectivement complexes) telle que

$$\forall x \in [a, b] \quad |f(x) - P(x)| \leq \epsilon \ .$$

Insistons : si f n'est pas continue, ça ne marche pas, ça ne peut pas marcher !
Si on n'est pas sur un segment, ça ne marche pas non plus.

Exercice classique : Soit a un réel, $I = [a, +\infty[$.
a. Quelles sont les fonctions polynomiales bornées sur I ?
b. Soit (p_n) une suite de fonctions polynomiales sur I convergeant uniformément sur I vers une fonction f. Montrer qu'à partir d'un certain rang au moins, la fonction $p_n - p_{n+1}$ est constante sur I.
c. Sous les hypothèses de la question précédente, en déduire que la fonction f est polynomiale sur I
Question subsidiaire (oral Mines) : Quelles sont les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ et à valeurs réelles telles qu'il existe une suite (p_n) de fonctions polynômes (p_n) convergeant uniformément vers f sur tout segment inclus dans $\mathbf{R}$?

VII Convergence simple, convergence uniforme

La convergence simple est plus faible que la convergence uniforme.
Si A est un ensemble fini, la convergence simple sur A est équivalente à le convergence uniforme sur A (le démontrer!).
Un certain nombre de résultats montrent que la convergence simple sur un segment d'une suite de fonctions (f_n) implique sa convergence simple, mais en rajoutant des hypothèses sur les f_n (voire sur leur limite). Par exemple :
Exercice : Soit (f_n) une suite de fonctions k-lipschitziennes sur $[0,1]$, à valeurs réelles. (*Insistons : k ne dépend pas de n*). On suppose que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f.
1. Montrer que f est k-lipschitzienne sur $[0,1]$ (*question facile!*).
2. Montrer que la convergence est uniforme. On pourra s'aider d'une subdivision de $[0,1]$ à pas constant.

Culture générale : la preuve de Bernstein

La démonstration du théorème de Weierstrass est hors-programme. La preuve initiale de Weierstrass est assez technique. Bernstein est tombé un peu par hasard sur une preuve étonnante, car elle est constructive (on ne fait pas que montrer qu'il y a une suite de polynômes telle que, on en définit une). En effet, si f est continue sur $[0,1]$, définissons

$$B_n[f] \,:\, x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

alors la suite $\big(B_n[f]\big)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$. Pour le démontrer, on peut répondre aux questions suivantes :

1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ suivant toutes une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(x)$ ($x \in [0,1]$). On note

$$X = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\ .$$

Exprimer l'espérance de $f(X)$ à l'aide de $B_n[f]$.

2. On fixe dorénavant $\epsilon > 0$. Justifier l'existence de deux réels strictement positifs η et M tels que

$$\forall t \in [0,1] \quad |f(t)| \leq M \qquad \text{et} \qquad \forall (t_1, t_2) \in [0,1]^2 \quad |t_1 - t_2| \leq \eta \Longrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

3. On reprend les notations du **1.** et du **2.** On note

$$Y = \big|f(X) - f(x)\big|$$

On considère l'évènement $A = (|X - x| \leq \eta)$, $\overline{A}$ l'évènement complémentaire. En remarquant que

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_A) + \mathbf{E}(Y\mathbf{1}_{\overline{A}})$$

montrer qu'il existe un rang N tel que

$$\forall n \geq N \qquad \mathbf{E}(Y) \leq \epsilon$$

(indication : on pourra majorer $\mathbf{P}(\overline{A})$ à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev). En déduire que la suite $\big(B_n[f]\big)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

Table des matières