TD : sous-groupes finis de $GL(E)$, projecteurs et traces

Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soit G un sous-groupe fini de $(GL(E), \circ)$ (qui, lui, n'est pas fini du tout). On notera $m = |G|$. Ce qui permet de définir

$$p = \frac{1}{m} \sum_{u \in G} u$$

1. Montrer que $\forall v \in G \qquad v \circ p = p \circ v = p$
2. Montrer que p est un projecteur.
3. Montrer que
$$\mathrm{Im}(p) = \{x \in E\ ;\ \forall u \in G\ u(x) = x\}$$
4. Montrer que $\sum_{u \in G} \mathrm{Tr}(u)$ est un entier divisible par m.
5. *Question indépendante des questions 1, 2, 3, 4.*

   On suppose que F est un sous-espace vectoriel de E stable par tous les éléments de G : $\forall u \in G \quad u(F) \subset F$. Soit H un supplémentaire de F dans E, et q la projection sur F parallèlement à H. On définit
$$r = \frac{1}{m} \sum_{u \in G} u \circ q \circ u^{-1}$$
   (a) Montrer que r est un projecteur.
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(r) = F$.
   (c) En déduire qu'il existe un supplémentaire de F dans E qui est stable par tous les éléments de G.

1. Si $v \in G$, l'application $u \longmapsto v \circ u$ est une bijection de G dans lui-même (la bijection réciproque est $u \longmapsto v^{-1} \circ u$). Donc
$$v \circ p = \frac{1}{m} \sum_{u \in G} v \circ u = \frac{1}{m} \sum_{u \in G} u = p$$
de même de l'autre côté.

---

2. Et donc
$$p \circ p = \frac{1}{m} \sum_{u \in G} p \circ u = \frac{1}{m} \sum_{u \in G} p = p$$
ce qui montre bien que p est un projecteur.

---

3. Les éléments de $F = \{x \in E\ ;\ \forall u \in G\ u(x) = x\}$ vérifient bien $p(x) = x$, donc sont dans $\mathrm{Im}(p)$. Réciproquement, si $x \in \mathrm{Im}(p)$, $p(x) = x$, donc par la question 1 on obtient $u(x) = x$ pour tout $u \in G$. Ce qui permet de conclure.

---

4. La trace de p est un entier, c'est son rang...

---

5. (a) Bêtement, on peut essayer $r \circ r$:
$$r \circ r = \frac{1}{m^2} \sum_{u \in G} \left(\sum_{v \in G} u \circ q \circ u^{-1} \circ v \circ q \circ v^{-1} \right)$$
Mais quand on est dans F, on reste dans F par tous les éléments de G, et on n'est pas modifié par q, donc
$$u \circ q \circ u^{-1} \circ v \circ q \circ v^{-1} = u \circ u^{-1} \circ v \circ q \circ v^{-1} = v \circ q \circ v^{-1}$$
ce qui permet de conclure $r \circ r = r$.

   (b) Tout élément x de F vérifie assez facilement $r(x) = x$, donc est dans l'image. De plus, $q \circ r = r$ (même argument que ce qui précède), donc l'inclusion réciproque est vraie (si $x \in \mathrm{Im}(r)$, $q(x) = x$, donc $x \in \mathrm{Im}(q)$).

(c) Le même genre de raisonnement qu'au 1 permet de trouver, pour tout $v \in G$,

$$v \circ r \circ v^{-1} = r$$

d'où le fait que r commute avec tout élément de G. Et, assez facilement, le fait que son noyau est stable par tous les éléments de G, ce qui donne le supplémentaire cherché.