Al1, Al2 : corrigés

Exercice 1. Les énoncés suivants sont-ils équivalents à « la famille $(u_i)_{i\in I}$ est liée » ?
(i) Un des u_i s'exprime comme combinaison linéaire des autres.
(ii) Chaque u_i s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
(iii) Il y a une sous-famille finie ($(u_i)_{i\in J}$, où $J \subset I$, J finie) qui est liée.
(iv) on peut trouver deux vecteurs liés dans la famille.

(i) oui ; (ii) est suffisant, mais pas nécessaire pour que la partie soit liée : par exemple, si (u, v) est libre, (u, u, v) est liée sans que v soit combinaison linéaire de u et u.
(iii) est bien équivalent, il suffit pour le voir de se souvenir que « combinaison linéaire » signifie « combinaison linéaire finie ».
(iv) est suffisant, mais pas nécessaire : assez clairement, on peut choisir dans un espace de dimension 2 trois vecteurs e_1, e_2, e_3 tels que (e_1, e_2), (e_1, e_3) et (e_2, e_3) soient libres, alors que (e_1, e_2, e_3) est nécessairement liée.

Exercice 2 (Etude de l'indépendance linéaire de familles).

1. Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes non nuls de degrés deux à deux distincts. Démontrer que cette famille est libre. A quelle condition est-elle une base de $\mathbf{K}[X]$?
   On a le droit, au concours, d'écrire qu'une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre. On parle parfois de famille de polynômes à degrés « étagés ».
2. Démontrer que la famille $\left(X^k(1-X)^{n-k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.
3. (Posé à l'oral) Soit a_1, a_2, a_3 trois réels distincts. La famille (f_1, f_2, f_3), où $f_i\ :\ x \mapsto \sin(x + a_i)$ est-elle libre ?
4. Démontrer que les familles $(x \mapsto \cos^n x)_{0\leq n\leq N}$ et $(x \mapsto \cos nx)_{0\leq n\leq N}$ sont libres et engendrent le même s.e.v. de $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ (on note N un entier naturel non nul).

---

1. Soit $P = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_{i_k}$ où les i_k sont dans I (et supposés deux à deux distincts). Si les λ_k ne sont pas tous nuls, le degré de P est $\displaystyle\max_{\{k\ /\ \lambda_k\neq 0\}} (\deg(P_{i_k}))$. Et donc $P \neq 0$. Donc la famille est libre. Elle est une base de $\mathbf{K}[X]$ si et seulement si l'application $\phi\ :\ i \mapsto \deg(P_i)$ est surjective (donc bijective, puisque par hypothèse elle est déjà injective) de I sur $\mathbf{N}$. En effet, si ϕ est surjective, pour tout $n \geq 0$, $(P_i)_{i\in I_n}$ où $I_n = \{i \in I\ ;\ \deg(P_i) \leq n\}$ est une famille libre à $n + 1$

éléments de $\mathbf{K}_n[X]$, elle en est donc en une base. Donc $\text{Vect}(P_i)_{i\in I}$ contient tous les $\mathbf{K}_n[X]$, donc est $\mathbf{K}[X]$ tout entier. Si $d \notin \phi(I)$, une combinaison linéaire des P_i ne peut pas être de degré d, donc la famille (P_i) n'est pas génératrice. On a donc bien une condition nécessaire et suffisante.

2. Les polynômes considérés ont même degré, mais pas même « valuation ». La valuation n'est pas au programme...mais ce n'est pas la peine de la connaître pour travailler. Supposons

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k (1-X)^{n-k} = 0 \tag{1}$$

si les α_k ne sont pas tous nuls, soit $k_0 = \min(\{k \ ; \ \alpha_k \neq 0\})$. En divisant (1) par X^{k_0}, on obtient

$$\sum_{k=k_0}^{n} \alpha_k X^{k-k_0} (1-X)^{n-k} = 0 \tag{1}$$

ce qui est contradictoire, car en 0 la fonction polynôme associée au premier membre vaut α_{k_0}.

3. Un peu de trigonométrie montrer que, pour tout i,

$$f_i = \cos a_i \ \sin \ + \sin a_i \ \cos$$

Les trois f_i sont donc dans $\text{Vect}(\sin, \cos)$; trois vecteurs d'un espace de dimension ≤ 2 sont liés.

4. Nommons ces fonctions : $\phi_n \ : \ x \mapsto \cos^n x$ et $\psi_n \ : \ x \mapsto \cos(nx)$. Supposons

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \phi_k \ = \ 0 \ .$$

Alors le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \alpha_k X^k$ a une infinité de racines (tous les éléments de $[-1, 1]$), donc est nul, donc tous les α_k sont nuls. Et donc $(\phi_0, \ldots, \phi_N)$ est libre. De plus, la formule

$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbf{R} \qquad \cos^n x &= \frac{1}{2^n}(e^{ix} + e^{-ix})^n \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikx} e^{i(k-n)x} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{i(2k-n)x} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos((2k-n)x)
\end{aligned}$$

(la dernière ligne se déduit facilement de l'avant-dernière car $\cos^n x$ est réel) montre que, pour tout n,

$$\phi_n = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\psi_{|2k-n|} \in \text{Vect}(\psi_0,\dots,\psi_n)$$

donc la famille $(\psi_0,\dots,\psi_N)$ engendre $\text{Vect}(\phi_0,\dots,\phi_N)$. Pour des raisons de dimension, elle en est donc une base, et par conséquent est libre.

Exercice 3 (Construction d'une base pour un espace de fonctions, oral Mines). On considère deux réels a et b, $a < b$. On note E l'espace des fonctions continues affines par morceaux sur $[a,b]$, à valeurs réelles (on dit que f est affine par morceaux continue sur $[a,b]$ lorsqu'il existe un entier naturel non nul n et des réels x_i $(0 \le i \le n)$ vérifiant $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ tels que la restriction de f à chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$ soit affine, c'est-à-dire de la forme $x \mapsto \alpha_i x + \beta_i$). Pour tout $c \in [a,b]$, on note f_c l'élement suivant de E : $f_c\ :\ x \mapsto |x-c|$.

1. Démontrer que la famille $(f_c)_{c\in[a,b]}$ est libre (utiliser par exemple un argument de dérivabilité).
2. On note $g_d\ :\ x \mapsto \max(0, x-d)$. Démontrer que, pour tout $d \in [a,b]$, g_d appartient à $\text{Vect}(f_c)_{c\in[a,b]}$ (écrire g_d explicitement comme combinaison linéaire d'un petit nombre de f_c bien choisis).
3. Soit h un élément de E nul en a. Montrer que h est combinaison linéaire des g_d $(d \in [a,b])$.
4. Montrer que toute fonction constante est combinaison linéaire des f_c $(c \in [a,b])$.
5. Déduire des deux questions précédentes que la famille $(f_c)_{c\in[a,b]}$ est une base de E.

---

1. Supposons

$$\sum_{c\in[a,b]} \lambda_c f_c = 0_E \tag{1}$$

où $(\lambda_c)_{c\in[a,b]} \in \mathbf{R}^{([a,b]}$ (ce qui signifie qu'il y a un nombre fini, éventuellement nul, de λ_c non nuls). Soit $c_0 \in]a,b[$; alors $\displaystyle\sum_{c\in[a,b]\setminus\{c_0\}} \lambda_c f_c$ est dérivable en c_0 (combinaison linéaire de fonctions qui le sont). Donc $-\lambda_{c_0} f_{c_0}$ l'est aussi. Or f_{c_0} ne l'est pas. Donc, nécessairement, $\lambda_{c_0} = 0$. Dans le relation (1), il ne reste donc que

$$\lambda_a f_a + \lambda_b f_b = 0$$

relation qu'il suffit d'évaluer en a puis en b pour obtenir successivement $\lambda_b = 0$ puis $\lambda_a = 0$.

2. On a assez facilement $g_a = f_a$ et $g_b = 0_E$; si $d \in]a, b[$, g_d est dérivable partout sauf en d. Donc si elle s'écrit comme combinaison linéaire des f_c, elle doit s'écrire sous la forme

$$g_d = \alpha f_a + \beta f_d + \gamma f_b$$

Or les fonctions g_d et $\alpha f_a + \beta f_d + \gamma f_b$ sont continues, affines sur $[a, d]$ et sur $[d, b]$, donc elles sont égales si et seulement si elles coïncident en a, d et b, donc si et seulement si

$$\begin{cases} & \beta(d-a) & +\gamma(b-a) = 0 \\ \alpha(d-a) & & +\gamma(b-d) = 0 \\ \alpha(b-a) + \beta(b-d) & & = b-d \end{cases}$$

On obtient un système linéaire de trois équations à trois inconnues, qui est de Cramer (calculer le déterminant paraît le plus simple ici), donc a une solution (unique, mais ça on le savait déjà, vu le résultat de la première question).

3. Soit $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_m = b$ une subdivision « adaptée » à h : h est affine sur chaque segment $[x_i, x_{i+1}]$. On cherche (compte tenu des points de non dérivabilité) des réels $\lambda_0, \ldots, \lambda_{m-1}$ tels que

$$h = \lambda_0 g_{x_0} + \lambda_1 g_{x_1} + \ldots + \lambda_{m-1} g_{x_{m-1}}$$

Les deux membres de cette égalité souhaitée sont des fonctions continues, affines sur chaque $[x_i, x_{i+1}]$ $(0 \leq i \leq m-1)$ et donc sont égales si et seulement si elles coïncident en chaque x_i. Ce qui donne un système linéaire (les inconnues sont les λ_i) ayant une et une seule solution (il est triangulaire, à « pivots » non nuls).

4. Soit $h : x \mapsto c$ où c est une constante réelle. On cherche à écrire

$$h = \alpha f_a + \beta f_b$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in [a, b] \qquad c = \alpha(x-a) + \beta(b-x)$$

qui donne un système de deux équations ($\alpha - \beta = 0$, $-a\alpha + b\beta = c$), d'inconnues α et β, qui a une solution unique.

5. Découle assez simplement de ce qui précède, en écrivant un élément de E comme somme d'une constante et d'un élément de E nul en a.

Exercice 4. On considère, pour tout p la suite $u^{(p)}$ définie par :

$$u_n^{(p)} = \delta_{n,p} = 1 \text{ si } n = p \ , \ 0 \text{ sinon}$$

Quel est l'espace vectoriel engendré dans $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ par la famille $\left(u^{(p)}\right)_{p \in \mathbf{N}}$?

L'espace vectoriel cherché est l'ensemble des combinaisons linéaires des suites $u^{(p)}$, qui sont les suites nulles à partir d'un certain rang, ou encore les suites à

support fini, ou encore les suites presque nulles, ou encore. . .les polynômes, dont les $u^{(p)}$ forment la base canonique.
Une erreur classique est de penser que les $u^{(p)}$ forment une base de l'espace $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Mais une suite quelconque ne peut pas s'écrire comme combinaison linéaire **finie** *des $u^{(p)}$*

Exercice 5. Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1})$ une famille donnée d'éléments de $\mathbf{K}$. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel des suites vérifiant la relation de récurrence linéaire :

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+p} + \alpha_{p-1}u_{n+p-1} + \cdots + \alpha_1 u_{n+1} + \alpha_0 u_n = 0?$$

Notons F cet espace, dont il est assez clair que c'est un sous-espace de $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$. Et définissons l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi \ : & F & \longrightarrow & \mathbf{K}^p \\ & u & \longmapsto & (u_0, \ldots, u_{p-1}) \end{array}$$

ϕ est linéaire (facile) ; mais le principe de récurrence dit que ϕ est bijective : étant donné $(a_0, \ldots, a_{p-1}) \in \mathbf{K}^p$, il existe en effet une unique suite u vérifiant

$$\forall i \in [0, p-1] \quad u_i = a_i$$

et

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+p} = -\alpha_{p-1}u_{n+p-1} - \cdots - \alpha_1 u_{n+1} - \alpha_0 u_n$$

Donc $\dim(F) = p$.

Exercice 6 (Oral Mines). Soit F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel E. Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si ... ou ... (*la cns était donnée à l'oral des Mines, mais on peut la trouver soi-même*).

$F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$ (classique, fait dans Ag1 car c'est en fait un exercice sur les groupes, il n'est pas nécessaire d'utiliser la loi externe).

Exercice 7 (exercice classique (démonstration et résultat))**.**

1. Soit f un endomorphisme du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E tel que, pour tout x, x et $f(x)$ soient liés. Vérifier que f est une homothétie.

2. Si E est de dimension finie, en déduire le "centre" de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire l'ensemble endomorphismes qui commutent avec tous les endomorphismes (on pourra remarquer qu'un tel endomorphisme commute nécessairement avec les projections sur toutes les droites vectorielles).
3. Quel est le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$?
4. Retrouver le résultat précédent en utilisant la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.

---

1. Pour tout $x \neq 0_E$, il existe $\lambda(x) \in \mathbf{K}$ tel que

$$f(x) = \lambda(x).x$$

et le but est de montrer que $\lambda(x)$ ne dépend pas de x, i.e. que si $x \neq y$, $\lambda(x) = \lambda(y)$. Pour cela on considère deux vecteurs non nuls x et y, et on examine deux cas :
Si (x, y) est liée, il existe μ tel que $y = \mu x$. On a alors

$$f(y) = \mu f(x) = \mu\lambda(x)x = \lambda(x)y$$

et donc $\lambda(x) = \lambda(y)$.
Si (x, y) est libre, on passe par l'intermédiaire de $x + y$. En effet,
$f(x + y) = f(x) + f(y) = \lambda(x)x + \lambda(y)y$ d'une part,
$f(x + y) = \lambda(x + y)(x + y)$ d'autre part.
Comme (x, y) libre, on obtient $\lambda(x) = \lambda(y) = \lambda(x + y)$. Et c'est ce qu'on voulait...
2. Une homothétie commute avec tout endomorphisme. Réciproquement, soit f un endomorphisme qui commute avec tout endomorphisme. Si $x \neq 0_E$, soit F un supplémentaire de $\mathrm{Vect}(x)$ dans E (*C'est pour l'existence de ce supplémentaire qu'on suppose E de dimension finie*). Soit p la projection sur $\mathrm{Vect}(x)$ parallèlement à F. Alors $f \circ p = p \circ f$. On applique cela en x, on obtient $p(f(x)) = f(x)$, donc $f(x)$ est lié avec x. Et ce, pour tout x. Il ne reste plus qu'à appliquer la question précédente.
3. On en déduit que le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ est constitué par les homothéties (en utilisant l'isomorphisme canonique entre $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$).
4. On retrouve ce résultat en considérant une matrice M du centre et en écrivant

$$\forall (i, j) \in [\![1, n]\!] \qquad ME_{i,j} = E_{i,j}M$$

Exercice 8 (Oral Mines). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Quels sont les endomorphismes de E qui ont la même matrice dans toutes les bases de E ?

Le plus commode est probablement d'étudier le problème sous forme matricielle ; soit u un tel endomorphisme, A sa matrice dans une base $\mathcal{B}$. Alors, pour tout $P \in GL_n(\mathbf{K})$,

$$P^{-1}AP = A$$

(car $P^{-1}AP$ désigne la matrice de u dans la base $\mathcal{C}$ telle que P soit la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$). Autrement dit, pour tout $P \in GL_n(\mathbf{K})$,

$$PA = AP$$

et donc A commute avec toutes les matrices inversibles. Désignons comme d'habitude par $E_{i,j}$ les matrices élémentaires $n \times n$. Pour tout couple (i,j) dans $[1,n]^2$, $I_n + E_{i,j}$ est inversible (elle est triangulaire, avec des 1 et éventuellement un 2 (si $i=j$) sur la diagonale. Donc, pour tout couple (i,j),

$$(I_n + E_{i,j})A = A(I_n + E_{i,j})$$

et donc

$$E_{i,j}A = AE_{i,j}$$

On en déduit (exercice classique) que A est une matrice λI_n où $\lambda \in \mathbf{K}$. Et donc $u = \lambda Id_E$, les endomorphismes cherchés sont les homothéties (on a raisonné par condition nécessaire, mais il est réciproquement assez clair qu'une homothétie $u = \lambda Id_E$ a même matrice dans toute base).

Exercice 9 (Noyaux itérés). Les questions 1 et 2 sont à connaître (résultats souvent utilisés)

Soit f un endomorphisme d'un espace de dimension finie n non nulle. On définit, pour tout entier naturel p :

$$F_p = \ker(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \mathrm{Im}(f^p)$$

(f^p désigne l'itérée d'ordre p de f : $f^0 = \mathrm{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$).

1. Démontrer que, des deux suites de s.e.v. (F_p) et (G_p), l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).
2. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à r, $F_p = F_{p+1}$.
3. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel s tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à s, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre r et s ?
4. Démontrer que G_s et F_r sont supplémentaires dans E.
5. Soit H_{k+1} un supplémentaire dans F_{k+2} de F_{k+1}. Démontrer que la restriction de f à H_{k+1} est injective, que $f(H_{k+1})$ est un sous-espace vectoriel de F_{k+1} et qu'il est en somme directe avec F_k. En déduire que la suite (α_k), où $\alpha_k = \dim F_{k+1} - \dim F_k$, est décroissante.

---

1. Si $f^p(x) = 0_E$, $f\left(f^p(x)\right) = 0_E$, i.e. $f^{p+1}(x) = 0_E$. On a donc

$$x \in F_p \implies x \in F_{p+1}$$

Ou encore $F_p \subset F_{p+1}$.

De plus, si $y \in G_{p+1}$, il existe x tel que $y = f^{p+1}(x)$. Mais alors $y = f^p\left(f(x)\right)$, donc $y \in G_p$. Et finalement $G_{p+1} \subset G_p$.
2. On est en dimension finie ; la suite des dimensions des F_p, croissante et majorée, converge. Mais c'est une suite d'entiers naturels. Elle est donc stationnaire. Il existe donc p tel que $F_p = F_{p+1}$ (si un sev est inclus dans un autre et s'ils ont même dimension, ils sont égaux). C'est même toujours vrai à partir d'un certain rang. Mais peu importe, il suffit pour l'instant de considérer

$$r = \min\left(\{p\ ;\ F_p = F_{p+1}\}\right)$$

Montrons maintenant que

$$F_p = F_{p+1} \implies F_{p+1} = F_{p+2}$$

Supposons, donc, $F_p = F_{p+1}$. On sait déjà que $F_{p+1} \subset F_{p+2}$, il s'agit donc de montrer l'inclusion inverse. Considérons $x \in F_{p+2}$. Comme on a envie d'utiliser l'hypothèse qui est $F_{p+1} \subset F_p$, il est naturel de chercher à faire apparaître un élément de F_{p+1}. Or le fait que $f^{p+2}(x) = 0_E$ s'écrit aussi bien $f^{p+1}\left(f(x)\right) = 0_E$, donc $f(x) \in F_{p+1}$. De cela on déduit que $f(x) \in F_p$, c'est-à-dire que $x \in F_{p+1}$. On a donc bien montré ce qu'on voulait et, par récurrence, le résultat demandé s'ensuit.
3. On peut faire le même genre de raisonnement qu'à la question précédente, mais il est plus simple de se souvenir du théorème du rang. En effet, comme pour tout p on a $G_{p+1} \subset G_p$, on a

$$G_p = G_{p+1} \iff \dim(G_p) = \dim(G_{p+1})$$

Mais du théorème du rang on déduit facilement que

$$(\dim(G_p) = \dim(G_{p+1})) \iff (\dim(F_p) = \dim(F_{p+1}))$$

et on est ramené à utiliser les résultats de la question précédente. On trouve $r = s$.
4. Comme $r = s$, le théorème du rang fait qu'il nous suffit de montrer que

$$F_r \cap G_r = \{0_E\}$$

Mais si $x \in F_r \cap G_r$, soit y tel que $x = f^r(y)$; de $f^r(x) = 0_E$ on déduit que $f^{2r}(y) = 0_E$. Donc $y \in F_{2r}$. Mais $F_{2r} = F_r$ d'après 2. Donc $y \in F_r$, donc $x = 0_E$, ce qui conclut.
5. On a $H_{k+1} \cap F_{k+1} = \{0_E\}$, donc, comme $F_1 \subset F_{k+1}$, $H_{k+1} \cap F_1 = \{0_E\}$. Ce qui montre que la restriction de f à H_{k+1} est injective (on constate bien simplement que d'une manière générale, si H est un sev de E, f une application linéaire définie sur E,

$$\mathrm{Ker}\left(f_H\right) = \mathrm{Ker}(f) \cap H\ .$$

De plus, $H_{k+1} \subset F_{k+2}$, donc $f(H_{k+1}) \subset f(F_{k+2})$. Mais $f(F_{k+2}) \subset F_{k+1}$. En effet, si $f^{k+2}(x) = 0_E$, on a $f^{k+1}\left(f(x)\right) = 0_E$. Donc $f(H_{k+1})$ est un sev de F_{k+1}.
Soit $x \in f(H_{k+1}) \cap F_k$. Il existe y tel que $x = f(y)$ et $y \in H_{k+1}$. De plus, $f^k(x) = 0_E$, donc $f^{k+1}(y) = 0_E$. Donc $y \in H_{k+1} \cap F_{k+1}$. Donc $y = 0_E$, et finalement $x = 0_E$.

De

$$f(H_{k+1}) \oplus F_k \subset F_{k+1}$$

on déduit que

$$\dim\left(f(H_{k+1})\right) + \dim(F_k) \leq \dim(F_{k+1})$$

Mais d'autre part, f induit un isomorphisme de H_{k+1} sur son image, donc

$$\dim\left(f(H_{k+1})\right) = \dim\left(H_{k+1}\right) = \alpha_{k+2} - \alpha_{k+1}$$

Ce qui apporte la conclusion. Quand on monte l'escalier des dimensions des noyaux itérés, les marches sont de moins en moins hautes.

Exercice 10 (Polynômes de Newton). $\mathbf{K}$ est un sous-corps de $\mathbf{C}$.

1. On définit l'endomorphisme Δ de $\mathbf{K}[X]$ de la manière suivante :

$$(\Delta P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

   Déterminer le degré de ΔP en fonction de celui de P.
2. Déterminer le noyau de Δ.
3. En considérant ses restrictions aux $\mathbf{K}_n[X]$ ($n \geq 0$), démontrer que Δ est surjectif.
4. Démontrer qu'il existe une unique suite $(N_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de polynômes telle que $N_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$N_{n+1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta N_{n+1} = N_n$$

   Les N_n sont les **polynômes de Newton**.
5. Démontrer que, si $n \geq 1$:

$$N_n = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$$

Les polynômes de Newton sont à la dérivation discrète, i.e. à Δ, ce que les polynômes de la base canonique sont à la dérivation, i.e. D.

---

1. Un développement par la formule du binôme donne

$$\deg\left(\Delta(X^{n+1})\right) = n$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en déduit que le degré de $\Delta(P)$ est $-\infty$ si P est constant, $\deg(P) - 1$ sinon.
2. Et donc $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathbf{K}_0[X]$.
3. On applique le théorème du rang à

$$\begin{array}{cccc} \Delta_n \ : & \mathbf{K}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbf{K}_n[X] \\ & P & \longmapsto & \Delta(P) \end{array}$$

On en déduit assez facilement la surjectivité de Δ_n, donc de Δ.

4. L'espace $E_0 = \{P \in \mathbf{K}[X]\ ;\ \widetilde{P}(0) = 0\}$ est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\Delta)$ dans $\mathbf{K}[X]$. Par théorème d'isomorphisme, Δ induit un isomorphisme Δ_0 de E_0 sur $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbf{K}[X]$. Or

$$(N_{n+1}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta N_{n+1} = N_n) \Leftrightarrow \left(N_{n+1} = \Delta_0^{-1}(N_n)\right)$$

Donc il existe une unique suite ayant les propriétés souhaitées : la suite $\left(\Delta_0^{-p}(1)\right)_{p\in\mathbf{N}}$.

5. Définissons $M_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$. Un calcul simple montre que $\Delta(M_1) = 1$, puis que pour tout $n \geq 1$, $\Delta(M_{n+1}) = M_n$. Comme on a clairement, pour tout $n \geq 1$, $N_n(0) = 0$,par unicité, les M_n sont les N_n.

Exercice 11 (base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, à connaître). On considère un entier naturel n non nul. La matrice $E_{i,j}$ est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient en i-ème ligne et j-ième colonne, égal à 1.

1. Calculer le produit $E_{i,j}E_{k,l}$ de deux matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$.
   En déduire que, si ϕ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $\phi(AB) = \phi(BA)$ pour toutes matrices A et B, alors il existe λ dans $\mathbf{K}$ tel que forme $\phi = \lambda \mathrm{tr}$, où tr est la trace.
2. Soit f une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Démontrer (en utilisant de nouveau la base canonique) qu'il existe une unique matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que, pour toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, $f(M) = \mathrm{tr}(AM)$.

La table de multiplication de la base canonique est au programme.
1. Pour tous i, j, k, ℓ on a

$$\phi(E_{i,j}E_{k,\ell}) = \phi(E_{k,\ell}E_{i,j})$$

Donc, si par exemple $j = k$ et $\ell \neq i$, $\phi(E_{i,\ell}) = 0$. Et, si $j = k$ et $\ell = i$, $\phi(E_{i,i}) = \phi(E_{j,j})$. Notons λ la valeur commune aux $\phi(E_{i,i})$. On a, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$,

$$\phi(A) = \sum_{i,j} a_{i,j}\phi(E_{i,j}) = \sum_i a_{i,i}\phi(E_{i,i}) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A)$$

.
2. Notons $g\ :\ M \mapsto \mathrm{Tr}(AM)$. Comme f et g sont deux applications linéaires, elles sont égales si et seulement si elles coïncident sur la base $(E_{i,j})$. On calcule $g(E_{i,j})$, on conclut assez rapidement.

Exercice 12. Soit $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. En considérant les propriétés de l'application $M \mapsto AM$ (de $\mathcal{A}$ dans lui-même), démontrer que, pour toute matrice inversible A de $\mathcal{A}$, A^{-1} est dans $\mathcal{A}$.
ainsi, l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure, l'inverse d'une matrice diagonale inversible est diagonale. . . .

Si $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, c'en est un sous-espace vectoriel, stable par $\times$ et contenant I_n. L'application

$$\phi_A \ : \ M \longmapsto AM$$

est donc un endomorphisme de $\mathcal{A}$. De plus, c'est un endomorphisme injectif ($\phi_A(M) = (0) \ \Rightarrow M = (0)$ par inversibilité de A). Or $\mathcal{A}$ est un espace de dimension finie, donc ϕ_A est surjectif. Or $I_n \in \mathcal{A}$, il existe donc $M \in \mathcal{A}$ telle que $AM = I_n$...c'est fini !

Exercice 13. Soit J la matrice carrée dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer ses puissances.
Utiliser le résultat pour calculer les puissances de la matrice

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \alpha & \dots & \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta & \beta & \dots & \alpha \end{pmatrix}$$

On calcule facilement $J^2 = nJ$.Et par récurrence

$$\forall k \geq 1 \qquad J^k = n^{k-1} J$$

(mais attention aux détails, cette formule n'est pas vraie pour $k = 0$). Ensuite, si on note A la matrice étudiée,

$$A = \beta J + (\alpha - \beta) I_n$$

et on peut utiliser la formule du binôme, car J et I_n commutent : si $k \geq 2$,

$$\begin{aligned} A^k &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} \beta^m (\alpha - \beta)^{k-m} J^m \\ &= (\alpha - \beta)^k I_n + \left(\sum_{m=1}^{k} \binom{k}{m} \beta^m (\alpha - \beta)^{k-m} n^{m-1} \right) J \\ &= (\alpha - \beta)^k I_n + \frac{1}{n} \left[(\alpha + (n-1)\beta)^m - (\alpha - \beta)^k \right] J \end{aligned}$$

Exercice 14 (résultats classiques sur le rang).

1. Démontrer que, pour toutes matrices A et B de même format,

$$|\operatorname{rg}(A) - \operatorname{rg}(B)| \leq \operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$$

2. Démontrer que

$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \inf(\mathrm{rg}(g), \mathrm{rg}(f))$$

où $f \in L(E, F)$ et $g \in L(F, G)$, E, F et G étant des espaces vectoriels de dimension finie.

---

1. Il est préférable de traiter cette question en utilisant des applications linéaires. Réécrivons donc l'énoncé : soit E, F deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, $(u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$. Montrons d'abord que

$$\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$

Pour cela, remarquons que

$$\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$$

(ce ne sont pas les mêmes ensembles :
$\mathrm{Im}(u + v) = \{u(x) + v(x) \ ; \ x \in E\}$
$\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v) = \{u(x) + v(y) \ ; \ (x, y) \in E^2\}$
Prenant les dimensions on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(u + v) &\leq \dim\left(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)\right) \\ &\leq \dim\left(\mathrm{Im}(u)\right) + \dim\left(\mathrm{Im}(v)\right) \\ &= \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v) \end{aligned}$$

L'inégalité de gauche se déduit de celle de droite, comme dans le contexte de l'inégalité triangulaire sur $\mathbf{C}$:
$\mathrm{rg}(u) \leq \mathrm{rg}(-v) + \mathrm{rg}(u + v) = \mathrm{rg}(v) + \mathrm{rg}(u + v)$
ce qui donne $\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v) \leq \mathrm{rg}(u + v)$; en permutant u et v, on obtient aussi $\mathrm{rg}(v) - \mathrm{rg}(u) \leq \mathrm{rg}(u + v)$ et donc, finalement,

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u + v)$$

2. L'inclusion $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$ donne la première inégalité : $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$. L'inclusion $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$, et le théorème du rang, donnent $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$.
On peut aussi transposer, avec les matrices, pour se ramener une inégalité à l'autre (la transposition préserve le rang).

Exercice 15. Soit A une matrice carrée nilpotente de rang r et d'indice p ($A^p = 0$, $A^{p-1} \neq 0$). Démontrer, en utilisant par exemple l'exercice sur les noyaux itérés, que $p \leq r + 1$. En déduire que, si A est une matrice carrée d'ordre n (i.e. n lignes et n colonnes) et si A est nilpotente, alors $A^n = 0$.

On suppose $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$. Notons F_p le noyau de A^p (c'est-à-dire le noyau de u^p, où u est l'endomorphisme de $\mathbf{K}^n$ canoniquement associé à A). L'hypothèse donnée dans l'énoncé est que l'inclusion $F_{p-1} \subset F_p$ est stricte ($F_p = \mathbf{K}^n$, $F_{p-1} \neq \mathbf{K}^n$). L'exercice sur les noyaux itérés montre alors que les inclusions

$$F_1 \subset F_2 \subset \ldots \subset F_p$$

sont toutes strictes. Mais $\dim(F_1) = n - r$ (théorème du rang) ; donc, comme pour tout $k \in [1, p-1]$ $\dim(F_{k+1}) \geq \dim(F_k) + 1$, on en déduit par récurrence

$$\forall k \in [2, p] \qquad \dim(F_k) \geq n - r + k - 1$$

Et donc $\dim(F_p) \geq n - r + p - 1$. Mais $F_p = \mathbf{K}^n$, donc $n \geq n - r + p - 1$. Ce qui donne bien $p \leq r + 1$.
On remarque alors que $r \leq n - 1$ (A ne peut être inversible, sinon elle ne serait pas nilpotente). Et donc $p \leq n$. Comme $A^p = 0$, on en tire bien $A^n = 0$.

Exercice 16. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

Calculer $A^2, A^3, \ldots, A^n$. Plutôt que d'effectuer des produits matriciels, on aura intérêt à regarder comment l'endomorphisme canoniquement associé à A transforme les vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$.

Soit $u \in L(\mathbf{K}^n)$ canoniquement associé à A, $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$. On a $u(e_1) = e_n$ et, si $k \geq 2$, $u(e_k) = e_{k-1}$. On peut rassembler ces deux cas en écrivant que

$$u(e_k) = e_j$$

avec $j \equiv k - 1$ $[n]$. Donc, par récurrence sur m, on en déduit que pour tout m, on a $u^m(e_k) = e_j$ avec $j \equiv k - m$ $[n]$. En particulier, on en déduit que $u^n = \mathrm{Id}$, i.e. $A^n = I_n$. Et

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$$

etc...

Exercice 17. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on définit la matrice $P_\sigma \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ par

$$(P_\sigma)_{i,j} = 1 \quad \text{si} \quad i = \sigma(j)\ , \quad 0 \text{ sinon}$$

Si $(\sigma, \sigma') \in (\mathfrak{S}_n)^2$, calculer $P_\sigma P_{\sigma'}$.

Soit $u_\sigma \in L(\mathbf{K}^n)$ canoniquement associé à P, $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$.
On a, pour tout j, $u(e_j) = e_{\sigma(j)}$. Avec des notations « évidentes »,

$$(u_\sigma | u_{\sigma'})(e_j) = e_{\sigma(\sigma'(j))}$$

donc $P_\sigma P_{\sigma'} = P_{\sigma \circ \sigma'}$.

Exercice 18. Soit $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbf{K})$ telle que $a_{i,i} = \alpha_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,2n+1-i} = \beta_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$ sinon. Montrer que A est semblable à une matrice « diagonale par blocs », de la forme

$$\begin{pmatrix} \star & \star & & & & & & \\ \star & \star & & & & & & \\ & & \star & \star & & & & \\ & & \star & \star & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \star & \star \\ & & & & & & \star & \star \end{pmatrix}$$

Il suffit de dessiner la matrice A pour voir que, si $(e_1, \ldots, e_{2n})$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A, alors on a intérêt à considérer une base du type $(e_1, e_{2n}, e_2, e_{2n-1}, \ldots, e_n, e_{n+1})$.

Exercice 19. Projecteurs Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$). Soit $p_1, \ldots, p_m$ des projecteurs tels que $p_1 + \ldots + p_m = Id_E$. Démontrer que

$$E = \mathrm{Im}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Im}(p_m)$$

La trace d'un projecteur est égale à son rang…voilà peut-être une occasion d'utiliser ce résultat. En effet, par linéarité de la trace,

$$\dim(E) = \mathrm{Tr}(p_1) + \cdots + \mathrm{Tr}(p_m)$$

ce que l'on peut réécrire en

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(p_1) + \cdots + \mathrm{rg}(p_m)$$

On a de plus

$$\forall x \in E \qquad p_1(x) + \cdots + p_m(x) = x$$

donc

$$\mathrm{Im}(p_1 + \cdots + p_m) = E$$

Mais il est classique que

$$\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$$

(voir exercice sur le rang d'une somme, par exemple), et cela s'étend sans aucune difficulté à plus de deux endomorphismes (même pas besoin d'une récurrence). Donc

$$\mathrm{Im}(p_1) + \cdots + \mathrm{Im}(p_m) = E$$

Et donc, notant $F_k = \mathrm{Im}(p_k)$,

$$\dim(F_1 + \cdots + F_m) = \dim(F_1) + \cdots + \dim(F_m) \ \big(= \dim(E)\big)$$

ce qui conclut. En effet, on sait (cours) que la somme des dimensions est la dimension de la somme si et seulement si celle-ci est directe.

---

exercices divers...

Exercice 20 (Centrale). Soit E un espace vectoriel de dimension finie, f et g dans $\mathcal{L}(E)$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$ si et seulement s'il existe h dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $f = g \circ h$.

Il y a un sens qui n'est pas difficile. Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(g)$. soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour tout i, $f(e_i) \in \mathrm{Im}(g)$. Soit, pour chaque i, u_i tel que $f(e_i) = g(u_i)$. Il y a une unique application linéaire qui envoie chaque e_i sur u_i. Notons-la h. Alors f et $g \circ h$ coïncident sur la base $(e_1, \ldots, e_n)$.

Exercice 21 (Ulm, Lyon, Cachan). Soit A, B, C trois matrices de $\mathcal{M}_n\mathbf{K})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $X \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $C = AXB$. *On pourra traduire l'énoncé en termes d'endomorphismes.*

On considere les endomorphismes canoniquement associés. Soit u, v, w trois endomorphismes dans $\mathcal{L}(\mathbf{K}^n)$. A quelle condition nécessaire et suffisante existe-t-il un endomorphisme ϕ de $\mathbf{K}^n$ tel que $w = u \circ \phi \circ v$?

Une **condition nécessaire** est : $\mathrm{Ker}\, v \subset \mathrm{Ker}\, w$ et $\mathrm{Im}\, w \subset \mathrm{Im}\, u$. Cette condition est-elle suffisante ? supposons-la dorénavant réalisée.

On a alors : $\forall x \in \mathrm{Ker}\, v \qquad 0 = w(x) = (u \circ \phi \circ v)(x)$

et donc, si G est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} v$ dans $\mathbf{K}^n$,

$$w = u\circ\phi\circ v \quad \Leftrightarrow \quad \forall x\in G \quad w(x) = (u\circ\phi\circ v)(x)$$

On nomme alors v_1 l'isomorphisme induit par v de G sur $\operatorname{Im}(v)$:

$$w = u\circ\phi\circ v \quad \Leftrightarrow \quad \forall y\in \operatorname{Im} v \quad (w\circ v_1^{-1})(y) = (u\circ\phi)(y)$$

Soit $(e_1,\ldots,e_r)$ une base de $\operatorname{Im} v$; pour tout i, $(w\circ v_1^{-1})(e_i)$ est dans $\operatorname{Im} w$, donc dans $\operatorname{Im} u$. Soit alors f_i tel que $u(f_i) = (w\circ v_1^{-1})(e_i)$. On complète la famille $(e_1,\ldots,e_r)$ en une base $(e_1,\ldots,e_n)$ de $\mathbf{K}^n$, et on considère l'unique endomorphisme ϕ qui à chaque e_i associe f_i si $1\leq i\leq r$, 0 si $i>r$. La relation $(w\circ v_1^{-1})(y) = (u\circ\phi)(y)$ est vérifiée sur une base de $\operatorname{Im} v$, donc sur $\operatorname{Im} v$. Ce qui achève la démonstration :

Une cns est : $\operatorname{Ker} B\subset \operatorname{Ker} C$ **et** $\operatorname{Im} C\subset\operatorname{Im} A$**.**

Exercice 22 (Préparatoire au suivant). Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ une matrice de rang r. Déterminer la dimension de l'espace $\{M\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\ ;\ AM=(0)\}$ par deux méthodes :

1. Changer de contexte : intrepréter la question en termes d'endomorphismes.
2. Utiliser la matrice J_r

---

1. Soit $a\in L(\mathbf{K}^n)$ canoniquement associé à A, $u\in L(\mathbf{K}^n)$ canoniquement associé à M. Alors

$$AM=(0) \iff a\circ u = \Theta \iff \operatorname{Im}(u)\subset\operatorname{Ker}(a)$$

Reste à déterminer la dimension de

$$\{u\in L(\mathbf{K}^n) \qquad \operatorname{Im}(u)\subset\operatorname{Ker}(a)\}$$

Cet espace est assez facilement isomorphe à $L(\mathbf{K}^n,\operatorname{Ker}(a))$, et a donc pour dimension $n(n-r)$.

2. Soit P et Q dans $GL_n(\mathbf{K})$ tels que $A = PJ_rQ$, alors

$$AM=(0)\iff J_rQM=(0)$$

L'application $M\longmapsto QM$ étant un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ la dimension cherchée est la même que celle de $\{T\in\mathcal{M}_n(\mathbf{K})\ ;\ J_rT=(0)\}$. On écrit alors par blocs $T = \begin{pmatrix} T_1 & T_2\\ T_3 & T_4\end{pmatrix}$ et $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0)\\ (0) & (0)\end{pmatrix}$ (dimensions cohérentes et évidentes...). Alors

$$J_rT = \begin{pmatrix} T_1 & T_2\\ (0) & (0)\end{pmatrix}$$

et donc $J_rT=(0) \iff T_1=T_2=(0)$. La dimension cherchée est donc $n(n-r)$.

Exercice 23 (Centrale, Mines). Soit $V = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R}) \ / \ AMA = 0\}$ avec $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ de rang r. Montrer que V est un espace vectoriel. Quelle est sa dimension ?

Méthode matricielle : Il n'est pas difficile de montrer que V est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$: il contient (0), et est stable par combinaison linéaire, car si $AMA = 0$ et $AM'A = 0$, alors $A(M + \lambda M')A = 0$.
Commençons par envisager le cas de la matrice $A = J_r$; si on découpe M en blocs :

$$M = \begin{array}{r} \\ \text{r lignes} \left\{ \right. \\ \text{n-r lignes} \left\{ \right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{\text{r colonnes}} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{n-r colonnes}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} M_1 & M2 \\ M_3 & M4 \end{pmatrix} \end{array}$$

On voit que, les r premières colonnes de la matrice J_r étant celles de la matrice unité et les $n - r$ suivantes étant nulles,

$$MJ_r = \begin{pmatrix} M_1 & (0) \\ M_3 & (0) \end{pmatrix}$$

et, en raisonnant de même sur les colonnes,

$$J_r M J_r = \begin{pmatrix} M_1 & (0) \\ (0) & (0) \end{pmatrix}$$

Donc $M \in V \Leftrightarrow M_1 = (0)$; V est donc ici l'ensemble des matrices de la forme

$$M = \begin{array}{r} \\ \text{r lignes} \left\{ \right. \\ \text{n-r lignes} \left\{ \right. \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\quad}^{\text{r colonnes}} & \overbrace{\qquad\qquad}^{\text{n-r colonnes}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} (0) & M2 \\ M_3 & M4 \end{pmatrix} \end{array}$$

et on voit clairement que

$$\dim(V) = r(n - r) + (n - r)r + (n - r)(n - r) = n^2 - r^2$$

Soit maintenant A de rang r quelconque, il existe U_1 et U_2 dans $\mathcal{GL}_n\mathbf{R}$ telles que $A = U_1 J_r U_2$. Donc

$$M \in V \Leftrightarrow U_1 J_r U_2 M U_1 J_r U_2 = 0 \Leftrightarrow J_r U_2 M U_1 J_r = 0$$

Appelons V_r le sous-espace V étudié précédemment, pour le cas $A = J_r$. On a donc

$$M \in V \Leftrightarrow U_2 M U_1 \in V_r$$

ce qui permet de définir

$$\begin{array}{cccc} \phi \ : & V & \longrightarrow & V_r \\ & M & \longmapsto & U_2 M U_1 \end{array}$$

qui est clairement linéaire, et bijective (de réciproque $M \mapsto U_2^{-1} M U_1^{-1}$). Et donc

$$\dim(V) = \dim(V_r) = n^2 - r^2$$

Méthode vectorielle : Soit $\mathcal{B}$ la base (par exemple) canonique de l'espace vectoriel (par exemple) $\mathbf{K}^n$ (on pourrait travailler avec une base quelconque d'un espace vectoriel de dimension n quelconque, cela ne changerait rien). On sait que l'application

$$\begin{array}{cccc} \psi : & \mathcal{L}(\mathbf{K}^n) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \\ & f & \longmapsto & \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. Soit $u = \psi^{-1}(A)$, c'est-à-dire l'endomorphisme canoniquement associé à A. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, et soit v canoniquement associé à M ($v = \psi^{-1}(M)$). Alors

$$M \in V \Leftrightarrow AMA = 0 \Leftrightarrow u \circ v \circ u = \Theta$$

où Θ désigne l'endomorphisme nul. On est donc ramené à l'étude de $\mathcal{V}$, où

$$\mathcal{V} = \{v \in \mathcal{L}(\mathbf{K}^n \ / \ u \circ v \circ u = \Theta\}$$

Comme ψ induit un isomorphisme de $\mathcal{V}$ sur V, ces deux espaces ont même dimension. Analysons un peu le problème :

$$\begin{aligned} u \circ v \circ u = \Theta &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{K}^n \quad (u \circ v \circ u)(x) = 0_{\mathbf{K}^n} \\ &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{K}^n \quad v\big(u(x)\big) \in \operatorname{Ker} u \\ &\Leftrightarrow v\big(\operatorname{Im} u\big) \subset \operatorname{Ker} u \end{aligned}$$

Soit G un supplémentaire de $\operatorname{Im} u$ (dans $\mathbf{K}^n$). Le résultat sur la définition d'une application linéaire par ses restrictions à des sous-espaces supplémentaires permet de dire que l'application

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{L}(\mathbf{K}^n) & \longrightarrow & \mathcal{L}(\operatorname{Im} u, \mathbf{K}^n) \times \mathcal{L}(G, \mathbf{K}^n) \\ & v & \longmapsto & (v|_{\operatorname{Im} u}, v|_G) \end{array}$$

est un isomorphisme. Mais, par l'analyse précédente,

$$\mathcal{V} = \varphi^{-1}\big(\mathcal{L}(\operatorname{Im} u, \operatorname{Ker} u) \times \mathcal{L}(G, \mathbf{K}^n)\big)$$

Mais

$$\begin{aligned} \dim\Big(\mathcal{L}(\operatorname{Im} u, \operatorname{Ker} u) \times \mathcal{L}(G, \mathbf{K}^n)\Big) &= \dim\Big(\mathcal{L}(\operatorname{Im} u, \operatorname{Ker} u)\Big) + \dim\Big(\mathcal{L}(G, \mathbf{K}^n)\Big) \\ &= \dim\big(\operatorname{Im} u\big)\ \dim\big(\operatorname{Ker} u\big) + \dim(G)\ \dim(\mathbf{K}^n) \\ &= r(n-r) + (n-r)n \\ &= n^2 - r^2 \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 24 (**Centrale, ens, X**). Démontrer que deux s.e.v. de même dimension d'un espace de dimension finie admettent un supplémentaire commun. On commencera par examiner le cas où ces deux s.e.v. sont supplémentaires, et on pourra regarder ce qui se passe en petite dimension.

Première méthode C'est une méthode constructive, partant du fait que le résultat est vraiment simple quand F et G sont deux droites d'un plan E (sur un dessin, on voit qu'il n'est pas vraiment compliqué de dessiner une droite qui soit supplémentaire de chacune de ces deux droites).
Si $E = F \oplus G$ et si F et G ont même dimension, on prend deux bases $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_p)$ de F et G respectivement. Alors $H = \mathrm{Vect}(e_1 + f_1, \ldots, e_p + f_p)$ est un supplémentaire commun à F et à G : $F \oplus H = G \oplus H = E$ (vérification assez simple).Si $F \cap G = \{0_E\}$, si H est un supplémentaire commun à F et à G

dans $F \oplus G$ (donné ci-dessus), si H' est un supplémentaire dans E de $F \oplus G$, alors $H \oplus H'$ est un supplémentaire commun à F et G dans E.

Enfin, dans le cas général, si F' et G' sont des supplémentaires de $F \cap G$ dans F et G respectivement, H un supplémentaire commun à F' et G' dans $F' \oplus G'$, H' un supplémentaire dans E de $F \oplus G$, alors $H \oplus H'$ est un supplémentaire commun à F et G dans E.

Deuxième méthode On considère deux sev F et G d'un même espace E. On suppose $\dim F = \dim G = m$ et $\dim E = n > m$ (si $n = m$, il y a un supplémentaire commun. C'est $\{0_E\}$). On considère d la dimension maximale d'un sous-espace en somme directe à la fois avec F et avec G. Supposons $d < n - m$, et soit H un sev de dimension d tel que $F \cap H = G \cap H = \{0_E\}$. Comme $F \oplus H \neq E$ et $G \oplus H \neq E$, on peut trouver $x \notin F \oplus H \cup G \oplus H$ (évident ? géométriquement, on « voit » bien qu'un espace vectoriel ne peut pas être réunion de deux sous-espaces stricts. Supposons en effet que A et B soient deux sev d'un ev E, $A \neq E$, $B \neq E$. Si $A \subset B$ ou $B \subset A$, on a $A \cup B = B \neq E$ ou $A \cup B = A \neq E$. Sinon, il existe $a \in A$ tel que $a \notin B$ et $b \in B$ tel que $b \notin A$. Alors $a + b \notin A \cup B$ (par l'absurde).[*Un exercice un peu plus difficile est de montrer que si le corps de base est infini, un espace vectoriel ne peut pas être réunion d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels stricts*].
Reprenons : on vérifie alors que $H \oplus \mathrm{Vect}(x)$ est en somme directe avec F et avec G. Et est de dimension $> d$. Ce qui conclut.

Exercice 25 (**Centrale, X**). On a démontré que, pour toute forme linéaire ϕ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, il existe une unique matrice A dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K}) \qquad \phi(M) = \mathrm{tr}(AM)$$

En déduire que tout hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ contient au moins une matrice inversible (on admet qu'un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle).

On doit montrer que, si A est une matrice non nulle, il existe M inversible telle que $\mathrm{tr}(AM) = 0$. Astucieusement, on écrit $A = PJ_rQ$, et on sait que $\mathrm{tr}(PJ_rQM) = \mathrm{tr}(J_rQMP)$. On déplace donc le problème : trouver, pour tout $r \in [\![1, n]\!]$, une matrice B inversible telle que $\mathrm{tr}(J_rB) = 0$. Et ça, c'est du bricolage, pas infaisable.

Exercice 26 (Oral X)**.** Montrer que l'ensemble des suites complexes périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^{\mathbf{N}}$, en donner une base.

Notons F l'ensemble des suites complexes périodiques. Il est très facile de montrer que c'est un sous-espace de $\mathcal{C}^{\mathbf{N}}$, il suffit de remarquer qu'une combinaison linéaire d'une suite p-périodique et d'une suite q-périodique est une suite pq-périodique (on peut même se contenter du ppcm de p et q). L'idée de considérer des suites avec des 1 et des 0 n'est pas stupide, mais elle amène à se poser des questions non simples. Et peut-être faudrait-il utiliser le fait qu'on est sur $\mathbf{C}$. D'où l'idée suivante : si $\omega_1, \ldots, \omega_p$ sont les racines p-ièmes de 1 (p entier naturel non nul), les p suites $(\omega_k^n)_{n\geq 0}$, $k = 1, \ldots, p$ sont périodiques. Or elles sont linéairement indépendantes : supposons en effet

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \alpha_1\omega_1^n + \cdots + \alpha_p\omega_p^n = 0$$

par combinaison linéaire de ces égalités, on aurait, pour tout polynôme Q, $\alpha_1 Q(\omega_1) + \ldots + \alpha_p Q(\omega_p) = 0$, ce qui, en utilisant les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux ω_i, donne tous les α_i nuls (on peut aussi utiliser un déterminant de Vandermonde).
Or l'espace des suites p périodiques est de dimension p (facile, voir exercice sur les suites vérifiant une relation de récurrence linéaire). On en a donc trouvé une base.
Les suites $u_\omega = \left(\omega^n\right)_{n\in\mathbf{N}}$, où ω décrit les racines de l'unité dans $\mathbf{C}$ ($\omega \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbf{N}_*} \mathbf{U}_k$), forment donc une base de l'espace des suites complexes périodiques.

Exercice 27 (Ulm, Lyon, Cachan)**.** Déterminer les matrices $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbf{C})$ telles que A et A^{-1} soient dans $\mathcal{M}_n(\mathbf{R}^+)$.

C'est bien de commencer par dire qu'il y en a. Evidemment, I_n. Mais aussi les matrices de permutation, i.e. les matrices dont chaque ligne (et, partant, chaque colonne) a un coefficient égal à 1 et les autres nuls. Si on en cherche d'autres, on n'a pas l'impression que ce soit facile. Peut-être sont-elles les seules ? on peut étudier le cas $n = 2$. Dans le cas général, on considère une matrice A qui vérifie les conditions demandées. On note $B = A^{-1}$. La première idée est que, si $i \neq j$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = 0$$

et que cela implique (nullité d'une somme de réels positifs)

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \qquad a_{i,k} = 0 \quad \text{ou} \quad b_{k,j} = 0$$

Donc, si $b_{k,j} \neq 0$, pour tout $i \neq j$ on a $a_{i,k} = 0$. Autrement dit, chaque coefficient non nul de B entraîne la nullité de beaucoup de coefficients de A...

Exercice 28. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Montrer qu'il existe deux projecteurs p_1 et p_2 et un automorphisme f de E tels que

$$u = p_1 \circ f \quad \text{et} \quad u = f \circ p_2$$

A quelle condition peut-on choisir $p_1 = p_2$?

Ce genre d'exercice n'est pas évident. On ne voit pas bien comment montrer l'existence de p_1, p_2, f si ce n'est en les construisant. Et comment les construire ? deux outils sont assez utiles : la définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base, et la définition d'une application linéaire par ses restrictions à des s.e.v. supplémentaires. Par exemple, si F désigne un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E, la condition $u = p_1 \circ f$ équivaut à

$$\forall x \in \text{Ker}(u) \quad p_1\left(f(x)\right) = 0_E \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F \quad p_1\left(f(x)\right) = u(x)$$

et la condition $u = f \circ p_2$ équivaut à

$$\forall x \in \text{Ker}(u) \quad f\left(p_2(x)\right) = 0_E \qquad \text{et} \qquad \forall x \in F \quad f\left(p_2(x)\right) = u(x)$$

Chacune des conditions « $\forall x \in \text{Ker} u \ldots$ » s'interprète facilement : la première par $f(\text{Ker}(u)) \subset \text{Ker}(p_1)$ et la seconde par $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(p_2)$.
La quatrième condition s'écrit

$$\forall x \in F \qquad p_2(x) = f^{-1}\left(u(x)\right)$$

qui définit p_2 sur F. Entre autres, on en déduit que, si $x \in F \setminus \{0_E\}$, $p_2(x) \neq 0_E$. Et par suite que

$$\text{Ker}(p_2) = \text{Ker}(u)$$

et

$$\text{Im}(p_2) = f^{-1}\left(\text{Im}(u)\right)$$

de même on a, comme $f\left(\text{Ker}(u)\right) \subset \text{Ker}(p_1)$ et $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(p_1)$ (par la deuxième relation), avec le théorème du rang,

$$\text{Im}(p_1) = \text{Im}(u) \qquad \text{et} \qquad \text{Ker}(p_1) = f\left(\text{Ker}(u)\right)$$

Remarquons qu'on aurait pu emprunter un raccourci commode : on a $p_1 \circ u = u$ et $u \circ p_2 = u$, qui donnent $\text{Im}(u) \subset \text{Im}(p_1)$ et $\text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(p_2)$. Or d'autre part $\text{rg}(p_1) = \text{rg}(p_2) = \text{rg}(u)$...
Constatons qu'on doit avoir

$$\text{Im}(u) \oplus f\left(\text{Ker}(u)\right) = E$$

et

$$\mathrm{Ker}(u) \oplus f^{-1}(\mathrm{Im}(u)) = E$$

On sait que u induit un isomorphisme de F sur $\mathrm{Im}(u)$. Soit f coïncidant avec cet isomorphisme sur F. Soit d'autre part G un supplémentaire de $\mathrm{Im}(u)$, v un isomorphisme de $\mathrm{Ker}(u)$ sur G, on impose à f de coïncider avec v sur $\mathrm{Ker}(u)$. Alors f est bien un automorphisme. On définit p_1 comme la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à G, p_2 comme la projection sur F parallèlement à $\mathrm{Ker}(u)$. On vérifie $u = p_1 \circ f$ car ces deux applications linéaires coïncident sur $\mathrm{Ker}(u)$ et sur F. On vérifie pareillement que $u = f \circ p_2$.
On peut prendre $p_1 = p_2$ si et seulement si

$$\mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$$
