Suites et séries numériques (exercices corrigés)

Exercice 1 (Irrationalité de e)**.** On définit la suite de terme général

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \ .$$

En introduisant la suite de terme général $v_n = u_n + 1/n!$, montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, en déduire que la suite (u_n) converge vers une limite irrationnelle

---

Pas de difficulté particulière pour l'adjacence (montrer que la suite (v_n) décroît se fait en calculant $v_{n+1} - v_n$) ; si la limite est rationnelle, elle s'écrit p/q, et par stricte monotonie on a

$$u_q < \frac{p}{q} < v_q$$

on mutliplie par $q!$, on trouve deux entiers n et m tels que

$$n < m < n + 1$$

ce qui n'est pas possible.

Exercice 2 (Moyenne arithmético-géométrique)**.** Soit a et b deux réels strictement positifs ; on définit deux suites (u_n) et (v_n) par récurrence : $u_0 = a$, $v_0 = b$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \ .$$

Démontrer que ces deux suites convergent vers une limite commune (*appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b, et qu'on peut montrer être égale à $\frac{\pi}{2I}$ où*

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}}$$

Ce résultat est à la base de l'algorithme de Gauss-Salamin de calcul de valeurs décimales approchées de π.).

On voit que pour étudier la monotonie de (u_n) et celle de (v_n), il faut étudier le signe de $u_n - v_n$. Mais $u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)^2$. On en déduit facilement que les deux suites sont monotones bornées, donc convergent. Le « passage à la limite » dans

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

donne l'égalité des limites des deux suites.

Exercice 3 (Procédés de sommation : Césaro, Euler)**.** On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels ou complexes. On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par

$$v_n = \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$$

1. On suppose que la suite (u_n) converge vers 0. Montrer que la suite (v_n) converge vers 0.
2. On suppose que la suite (u_n) converge. Montrer que la suite (v_n) converge. C'est le théorème de Césaro.
3. Donner un exemple montrant que la réciproque de la propriété précédente est fausse.
4. On suppose que la suite (u_n) est réelle et tend vers $+\infty$. Montrer que la suite (v_n) tend elle aussi vers $+\infty$.
5. La réciproque de la propriété précédente est-elle vraie ?
6. On définit maintenant, pour $n \geq 1$,

$$w_n = \frac{1}{2^n}(\binom{n}{0}u_0 + \binom{n}{1}u_1 + \cdots + \binom{n}{n}u_n)$$

   Reprendre les questions précédentes en remplaçant (v_n) par (w_n)

---

1. Soit $\epsilon > 0$, on fixe un rang N_0 tel que

$$\forall n \geq N_0 \qquad |u_n| \leq \epsilon/2$$

   on a alors, pour tout $n \geq N_0$,

$$|v_n| \leq \frac{1}{n+1}(u_0 + \ldots + u_{N_0-1}) + \frac{n - N_0 + 1}{n+1}\frac{\epsilon}{2}$$

   Le majorant tend vers $\epsilon/2$ quand $n \to +\infty$, il existe donc un rang N_1 tel que

$$(n \geq N_1) \Longrightarrow (|v_n| \leq \epsilon)$$

2. Remarquer que
$$v_n - \ell = \frac{1}{n+1}\left((u_0-\ell)+(u_1-\ell)+\cdots+(u_n-\ell)\right)$$
permet de se ramener au cas $\ell = 0$ déjà traité.
3. Non, l'exemple classique étant $u_n = (-1)^n$.
4. Soit A un réel quelconque, on fixe un rang N_0 tel que
$$\forall n \geq N_0 \qquad u_n \geq A+1$$
on a alors, pour tout $n \geq N_0$,
$$v_n \geq \frac{1}{n+1}(u_0+\ldots+u_{N_0-1}) + \frac{n-N_0+1}{n+1}(A+1)$$
Le minorant tend vers $A+1$ quand $n \to +\infty$, il existe donc un rang N_1 tel que
$$(n \geq N_1) \Longrightarrow (v_n \geq A)$$
On peut aussi considérer, pour M donné, la suite de terme général $\min(M, u_n)\ldots$
5. Et la réciproque est encore fausse. . .Prenons par exemple $u_n = n$ si n est pair, $u_n = 0$ si n est impair. La suite (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$, en revanche la suite (v_n) a bien pour limite $+\infty$ (on peut calculer v_{2n} et v_{2n+1} sans grande difficulté).
6. On reprend les calculs précédents, sans grands changements. Il est utile de se souvenir que
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$$
et on aura également besoin de noter que, si $N_0 \geq 1$,
$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{N_0-1}\binom{n}{k}u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
qui est simplement conséquence du fait que, pour chaque k,
$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
(on a assez facilement $\displaystyle\binom{n}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$, et on peut utiliser des croissances comparées de suites de référence).

Exercice 4 (Oral Centrale)**.** *(à n'aborder que si on est assez à l'aise avec l'exercice sur Césaro)*
Soit $(a_n)_{n\geq 0} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ et $\gamma \in]-1,1[$. Montrer
$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} - \gamma a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Seule l'implication de droite à gauche est intéressante. Notons

$$u_n = a_{n+1} - \gamma a_n$$

et essayons d'exprimer a_n à l'aide des u_p (l'hypothèse est que la suite (u_n) converge vers 0) : $a_1 = u_0 + \gamma a_0$, $a_2 = u_1 + \gamma a_1 = u_1 + \gamma u_0 + \gamma^2 a_0$, puis, par récurrence :

$$a_n = u_{n-1} + \gamma u_{n-2} + \gamma^2 u_{n-3} + \cdots + \gamma^{n-1} u_0 + \gamma^n a_0$$

Pour la suite de d'exercice, on constate que quand n est grand u_n et γ^n sont petits. Mais c'est quand même un peu délicat à écrire. Soit $\epsilon > 0$; soit p_0 tel que

$$\forall k \geq p_0 \qquad |u_k| \leq \epsilon$$

et, d'autre part, soit M tel que $\forall k \in \mathbf{N} \quad |u_n| \leq M$ (la suite (u_n) converge, donc est bornée).
Supposons $n > p_0$; on peut alors majorer

$$|a_n| \leq \epsilon(1 + |\gamma| + \ldots + |\gamma|^{n-p_0-1}) + M(|\gamma|^{n-p_0} + \cdots + |\gamma|^{n-1}) + |a_0||\gamma|^n$$

et donc, en utilisant des sommes géométriques :

$$|a_n| \leq \frac{\epsilon}{1-|\gamma|} + M\frac{|\gamma|^{n-p_0}}{1-|\gamma|} + |a_0||\gamma|^n$$

Comme $0 \leq |\gamma| < 1$, la suite $(|\gamma|^n)$ converge vers 0, il existe donc un rang n_0 à partir duquel

$$|a_n| \leq \frac{\epsilon}{1-|\gamma|} + \frac{\epsilon}{1-|\gamma|}$$

et au début, on aurait pu prendre $(1-|\gamma|)\epsilon/2$ à la place de ϵ, on conclut.

Exercice 5. Classer par ordre de prépondérance (avec la relation $\ll$) les suites de termes généraux :
$(\ln n)^3$, $\ln(n^3)$, $\dfrac{3^n}{n^3}$, 2^n, $e^{n/2}$, $(\ln(\ln n))^n$, $n^{\ln(\ln n)}$, $\dfrac{n}{\ln n}$.

Evidemment, on n'a pris que des suites qui divergent vers $+\infty$, ce qui ne facilite pas les choses. Les deux premières sont des puissances de logarithmes à constante près, les trois suivantes géométriques (même si l'une est quelque peu « tamisée » par une puissance de n, cela n'est que marginal, pas croissances comparées. La 6ème et la 7ème sont a priori plus énigmatiques, il vaut mieux les écrire sous forme exponentielle-logarithme si on veut y voir clair. On s'aperçoit alors que la 6ème est « rapide » (inutile d'ailleurs de passer aux logarithmes/exponentielles pour voir qu'elle croît plus vite qu'une suite géométrique), la 7ème plus lente. Tout en étant plus rapide qu'une puissance fixe de n. Bon, eh bien, avec tout ça, on a fait le plus gros, il ne reste plus que quelques éléments de réflexion pour aboutir à

$$\ln(n^3) \ll (\ln n)^3 \ll \frac{n}{\ln n} \ll n^{\ln(\ln n)} \ll e^{n/2} \ll 2^n \ll \frac{3^n}{n^3} \ll (\ln(\ln n))^n$$

Exercice 6. Classer par ordre de prépondérance (avec la relation $\ll$) les suites de termes généraux :
$\dfrac{1}{n^4}$, $\dfrac{\ln n}{n^5}$, $\dfrac{2^n}{1+3^n}$, $2^{-\ln(\ln n)}$, $\dfrac{\ln(\ln n)}{\ln n \ + \ n}$, $\dfrac{\ln n}{2^n \ + \ n^2}$,
$\dfrac{\tan(1/n)}{1+\cos^3(1/n)}$, $(\cos(1/n))^{\sin(1/n)} - 1$

$$\frac{\ln n}{2^n \ + \ n^2} \ll \frac{2^n}{1+3^n} \ll \frac{\ln n}{n^5} \ll \frac{1}{n^4} \ll (\cos(1/n))^{\sin(1/n)} - 1 \ll \frac{\tan(1/n)}{1+\cos^3(1/n)} \ll \frac{\ln(\ln n)}{\ln n \ + \ n} \ll 2^{-\ln(\ln n)}$$

Exercice 7. Trouver une suite réelle (u_n) telle que

$$n^2 \ll u_n \ll 2^n$$

---

en écrivant tout sous forme exponentielle, on peut avoir l'idée de

$$u_n = \exp\left(\frac{n}{\ln(n)}\right)$$

et on vérifie que ça marche.

Exercice 8. On note C le cercle trigonométrique, S_n (resp. T_n) la longueur du polygone régulier à 2^n côtés inscrit dans C (resp. circonscrit à C). On montre alors :

$$S_n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n} \qquad , \qquad T_n = 2^{n+1}\tan\frac{\pi}{2^n}$$

Donner un équivalent de $T_n - S_n$. *Cet énoncé est basé sur la méthode d'Archimède de calcul de valeurs approchées de π.*

On développe $\tan u$ et $\sin u$ à l'ordre 3 au voisinage de 0. On a le droit de remplacer u par $\pi/2^n$, qui converge vers 0.

Exercice 9. *Oral Mines* Donner un développement asymptotique à deux termes de la suite de terme général

$$\frac{1}{n^{\tan(\pi/4+1/n)}}$$

$$\begin{aligned}\tan(\pi/4+1/n) &= \frac{1+\tan(1/n)}{1-\tan(1/n)}\\ &= \frac{1+1/n+\ o\left(1/n\right)}{1-1/n+\ o\left(1/n\right)}\\ &= 1+2/n+\ o\left(1/n\right)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{\tan(\pi/4+1/n)}} &= \exp\Big(-\ln(n)\,\Big(1+2/n+\ o\left(1/n\right)\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{n}\exp\Big(-2\ln(n)/n+\ o\left(\ln(n)/n\right)\Big)\\ &= \frac{1}{n}\Big(1-2\ln(n)/n+\ o\left(\ln(n)/n\right)\Big)\\ &= \frac{1}{n}-2\frac{\ln n}{n^2}+\ o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\end{aligned}$$

d'où le développement cherché.

Exercice 10. Etudier la convergence des suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous :

$$\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} \quad ; \quad n\left(\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha>0) \quad ; \quad n\sin\pi(n^\alpha+1)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha>1)$$

• Pour la première suite, le bon réflexe est de tout passer sous forme exponentielle :

$$\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n} = \exp\left[\ln^2 n\ -n\ln\left(\ln n\right)\right]$$

Dans l'exponentielle, il y a une somme de deux termes, on identifie celui qui est prépondérant ; on le met en facteur :

$$\ln^2 n\ -n\ln\left(\ln n\right) = n\ln\left(\ln n\right)\left[\frac{\ln^2 n}{n\ln\left(\ln n\right)}-1\right]$$

Par croissances comparées, l'expression entre crochets tend vers -1, donc

$$\ln^2 n \;\; - n\ln(\ln n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

et finalement la première suite a pour limite 0.

• Notons que

$$\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et souvenons-nous que l'arcsinus est bien plus agréable à manipuler que l'arccosinus, or il y a une relation simple entre ces deux fonctions. On a

$$\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{n^\alpha} = \arcsin\frac{1}{n^\alpha}$$

En utilisant l'équivalent célèbre

$$\arcsin x \underset{x\to 0}{\sim} x$$

on obtient que

$$n\Big(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{n^\alpha}\Big) \sim n^{1-\alpha}$$

d'où la limite de la suite : $+\infty$ si $0 < \alpha < 1$ (suite divergente, donc), 1 si $\alpha = 1$, 0 si $\alpha > 1$.

• Dans une somme, on met toujours en facteur le terme prépondérant lorsqu'on fait une étude asymptotique :

$$(n^\alpha + 1)^{1/\alpha} = n\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)^{1/\alpha}$$

On utilise le développement limité au voisinage de 0 :

$$(1+u)^{1/\alpha} = 1 + \frac{u}{\alpha} + \underset{u\to 0}{o}(u)$$

(pourquoi deux termes ? parce qu'on anticipe : le 1 va donner un π qui ne changera que le signe, il faut un terme de plus). Donc

$$\begin{aligned}\sin\left[\pi(n^\alpha+1)^{1/\alpha}\right] &= \sin\left[n\pi + \frac{\pi}{\alpha}n^{1-\alpha} + o\left(n^{1-\alpha}\right)\right]\\ &= (-1)^n \sin\left[\frac{\pi}{\alpha}n^{1-\alpha} + o\left(n^{1-\alpha}\right)\right]\end{aligned}$$

Ne reste plus qu'à se souvenir de l'équivalent très célèbre

$$\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$$

pour conclure qu'un équivalent du terme général étudié est

$$(-1)^n \frac{\pi}{\alpha} n^{2-\alpha}$$

Donc, si $\alpha > 2$, il y a une limite nulle, et si $\alpha \leq 2$ il n'y a pas de limite.

Exercice 11. Donner un équivalent simple, lorsque $n \to +\infty$, de $\cos\Big(\pi n^2 \ln(1+1/n)\Big)$.

On développe :

$$n^2 \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n - \frac{1}{2} + \frac{1}{3n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et on tient compte de $\cos(n\pi + a) = (-1)^n \cos a$ et de $\cos(b - \pi/2) = \sin(b)$ ce qui permet de trouver l'équivalent : $(-1)^n/(3n)$.

Exercice 12. Soit x un nombre réel ; on note ℓ la limite de la suite (u_n) de terme général $u_n = \big(1 + x/n\big)^n$. Déterminer un équivalent de $u_n - \ell$.

On a

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(n \ln(1+x/n)\right) = \exp\left(x - \frac{x^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= e^x \exp\left(-\frac{x^2}{2n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

On retrouve $\ell = e^x$, et

$$u_n - \ell \sim -\frac{x^2}{2n} e^x$$

Exercice 13. Soient (u_n) et (v_n) deux suites à termes réels strictement positifs. On suppose que $u_n \sim v_n$. Montrer que, si (u_n) a pour limite $+\infty$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$. *Rappelons que la simple hypothèse* $u_n \sim v_n$ *n'implique pas* $\ln(u_n) \sim \ln(v_n)$.

Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \ln(u_n) &= \ln(v_n) + \ln\left(\frac{u_n}{v_n}\right) \\ &= \ln(v_n)\left(1 + \alpha_n\right) \end{aligned}$$

où la suite de terme général

$$\alpha_n = \frac{\ln\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)}{\ln(v_n)}$$

a beaucoup de raisons de converger vers 0.

Exercice 14. Déterminer un développement asymptotique à la précision $1/n^2$ de la suite donnée par son premier terme réel x_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad x_{n+1} = \frac{\exp(-x_n)}{n+1} \; .$$

Indication : commencer par chercher un équivalent de x_n, puis utiliser cet équivalent pour trouver un développement plus précis, etc...

On commence par remarquer que la suite est à termes réels strictement positifs (au moins à partir du rang 1), on en déduit

$$\forall n \geq 2 \qquad 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$$

Donc la suite converge vers 0. Donc $\exp(-x_{n-1})$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$, donc

$$x_n \sim \frac{1}{n}$$

Donc

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{n} \exp\left(\frac{1}{n-1} + o\left(\frac{1}{n-1}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n} \exp\left(\frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

et on a ce qu'on veut ; on pourrait continuer, mais ce serait de plus en plus long...

Exercice 15. *Oral Mines* Montrer qu'il existe un unique réel, noté $f(k)$, solution de l'équation $x+\ln x = k$. Etudier le comportement asymptotique de $f(k)$ quand $k \to +\infty$.

La fonction $x \mapsto x + \ln x$ est continue strictement croissante de $]0, +\infty[$ sur $\mathbf{R}$. Voilà pour l'existence et l'unicité ! Si $a \in \mathbf{R}$, si $k_0 > a + \ln a$ alors, pour tout $k \geq k_0$, $f(k) > a$ d'après la stricte croissance mentionnée ci-dessus. Donc

$$f(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} +\infty$$

Notons aussi que la suite $(f(k))$ est strictement croissante. Ensuite,

$$f(k) + \ln(f(k)) = k$$

Donc

$$\frac{f(k)}{k} + \frac{\ln(f(k))}{k} = 1$$

et $1 < f(k) < k$, donc $0 < \ln(f(k)) < \ln k$, on en déduit

$$f(k) \sim k$$

Aller plus loin ? on poserait $f(k) = k(1 + \epsilon(k)$, $\epsilon(k) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$, on injecterait dans l'équation...

Exercice 16. Soit, pour $n \geq 2$, $P_n = X^n - X - 1$. Démontrer que P_n a une unique racine réelle positive u_n. Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à trois termes de u_n (la limite étant le premier de ces trois termes).

P_n a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Elle est négative en 0, et continue, donc s'annule par théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois, et donc a une plus grande racine réelle u_n.
$P_n(1) < 0$, $P_n' > 0$ sur $]1, +\infty[$, et, si $\epsilon > 0$, à partir d'un certain rang $P_n(1+\epsilon) > 0$ (croissances comparées). Donc, à partir d'un certain rang, $1 \leq u_n \leq 1 + \epsilon$. On en déduit

$$u_n = 1 + o(1)$$

Ecrivons alors $u_n = 1 + \epsilon_n$. Comme

$$(1 + \epsilon_n)^n = 1 + \epsilon_n + 1 = 2 + \epsilon_n$$

il semble assez commode, pour développer, de prendre les logarithmes des deux membres (qui sont bien strictement positifs, au moins à partir d'un certain rang). On obtient

$$n \ln(1 + \epsilon_n) = \ln(2 + \epsilon_n) \quad (1)$$

Le premier membre de l'égalité est équivalent à $n\epsilon_n$ (car $\epsilon_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$), le second membre est équivalent à $\ln 2$ (car il tend vers cette limite, non nulle). Donc

$$\epsilon_n \sim \frac{\ln 2}{n}$$

On obtient

$$u_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

et on en voudrait un peu plus. Développons donc (1) un peu plus loin :

$$n\epsilon_n - n\frac{\epsilon_n^2}{2} + o\left(n\epsilon_n^2\right) = \ln 2 + \frac{\epsilon_n}{2} + o\left(\epsilon_n\right)$$

Mais l'équivalent trouvé plus haut nous permet d'affirmer que les deux o sont des $o\left(1/n\right)$. Qui plus est,

$$n\epsilon_n^2 \sim \frac{(\ln 2)^2}{n}$$

ce qui peut s'écrire

$$n\epsilon_n^2 = \frac{(\ln 2)^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Donc :

$$n\epsilon_n = \frac{(\ln 2)^2}{2n} + \ln 2 + \frac{\epsilon_n}{2} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{(\ln 2)^2}{2n} + \ln 2 + \frac{\ln 2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

On remet les choses en ordre, et on obtient :

$$u_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{(\ln 2)^2 + \ln 2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exercice 17. Soit, pour $n \geq 2$, $P_n = X^n - nX + 1$. Démontrer que P_n a une plus grande racine réelle u_n. Démontrer que la suite (u_n) converge, et donner un développement asymptotique à deux termes de u_n (la limite étant le premier de ces deux termes).

P_n a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. Elle est négative en 1, et continue, donc s'annule par théorème des valeurs intermédiaires. Elle ne s'annule qu'un nombre fini de fois, et donc a une plus grande racine réelle u_n.
On a d'autre part $u_n > 1$ dès que $n > 2$ car $P_n(1) = 2 - n < 0$.
On a $P_n'(x) = n(x^{n-1} - 1) > 0$ sur $]1, +\infty[$, et, si $\epsilon > 0$, à partir d'un certain rang $P_n(1+\epsilon) > 0$ (croissances comparées). Donc, à partir d'un certain rang, $1 \leq u_n \leq 1 + \epsilon$. On en déduit

$$u_n = 1 + o\left(1\right)$$

Ecrivons alors $u_n = 1 + \epsilon_n$. On a

$$(1 + \epsilon_n)^n = n(1 + \epsilon_n) - 1$$

Prenons les logarithmes des deux membres :

$$n \ln(1 + \epsilon_n) = \ln n + \ln\left(1 + \epsilon_n - 1/n\right)$$

Le premier membre de l'égalité est équivalent à $n\epsilon_n$ (car $\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$), le second membre est équivalent à $\ln n$. Donc

$$\epsilon_n \sim \frac{\ln n}{n}$$

On obtient

$$u_n = 1 + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

Exercice 18. *Oral X, mines* Soit, pour $n \geq 1$, $f_n \ : \ x \mapsto \sum_{k=1}^{n} x^k \ - 1$. Montrer qu'il existe un unique réel strictement positif tel que $f_n(x_n) = 0$. Etudier la suite (x_n) et en donner un développement asymptotique à deux termes.

---

f_n est strictement croissante, vaut -1 en 0, a pour limite $+\infty$ en $+\infty$. D'où, par théorème des valeurs intermédiaires (il est clair que f_n est continue) l'existence et l'unicité de x_n. On constate que $x_n < 1$ si $n > 1$. Mais aussi,

$$f_n(x) = \frac{x - x^{n+1}}{1-x} - 1 = \frac{-1 + 2x - x^{n+1}}{1-x}$$

Donc

$$x_n^{n+1} = 2x_n - 1 \tag{1}$$

Soit $\alpha \in]0,1[$; $f_n(1-\alpha) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1-2\alpha}{\alpha}$. Donc, si $\alpha < 1/2$, à partir d'un certain rang on a $f_n(1-\alpha) > 0$, et donc $x_n < 1-\alpha$. En fait, on aurait pu se contenter de remarquer que $f_n < f_{n+1}$ sur $\mathbf{R}_*^+$, ce qui donne $0 < f_{n+1}(x_n)$, et donc $x_{n+1} < x_n$ (variations de f_n). On a donc la convergence de (x_n) vers $\ell \in [0,1[$. Mais, dans (1), on a nécessairement $(2x_n - 1)$ qui converge vers 0 (le premier membre converge vers 0). Donc $\ell = 1/2$. Posons

$$x_n = \frac{1}{2} + \epsilon_n$$

où (ϵ_n) converge vers 0. On a

$$(n+1)\ln\left(\frac{1}{2} + \epsilon_n\right) = \ln(2) + \ln(\epsilon_n)$$

qui donne déjà

$$\ln(\epsilon_n) \sim -n\ln 2 \tag{2}$$

mais cela ne suffit pas (on ne peut pas prendre des exponentielles d'équivalents). Mais, repartant sur la relation (1) (sans prendre les logarithmes), on a

$$2\epsilon_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \exp\left((n+1)\ln(1+2\epsilon_n)\right)$$

Mais $(n+1)\ln(1+2\epsilon_n) \sim 2n\epsilon_n$ et $n\epsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (prendre le logarithme de $n\epsilon_n$, (2) montre qu'il tend vers $-\infty$). On obtient

$$\epsilon_n \sim \frac{1}{2^{n+2}}$$

ce qui donne le deuxième terme du développement asymptotique.

Exercice 19. Un ancien rapport de l'X déplore que certains candidats ne sachent pas, en partant de l'hypothèse « la série $\sum a_n$ converge », écrire a_n sous la forme $u_n - u_{n-1}$ où (u_n) est une suite qui converge vers 0. Et vous ?

Si on part de $a_n = S_n - S_{n-1}$, où les S_n sont les sommes partielles, la suite (S_n) ne converge pas vers 0. Mais elle converge, vers S. Or

$$a_n = (S_n - S) - (S_{n-1} - S)$$

on peut donc prendre

$$u_n = S_n - S = -R_n$$

(on peut aussi directement penser aux restes).

Exercice 20. Soit (u_n) une suite de réels positifs. Montrer que si $\sum u_n$ converge, alors $\sum u_n^2$ converge. Donner un exemple prouvant que si (u_n) est une suite de réels quelconques, ce n'est plus toujours vrai.

La suite (u_n) converge vers 0, sinon il y aurait divergence grossière. Et donc

$$u_n^2 = o\,(u_n)$$

le résultat s'ensuite par comparaison à une série à termes réels positifs. La série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est un bon exemple montrant que si on enlève l'hypothèse de positivité, ça ne marche plus.

Exercice 21. Soit P, Q deux polynômes. A quelle condition la série

$$\sum_{n\geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)}$$

(n_0 choisi pour que le dénominateur ne s'annule pas) converge-t-elle ?

En utilisant des équivalents, la cns est

$$\deg(P) - \deg(Q) \leq -2$$

(ou < -1, ça revient au même).

Exercice 22. Nature de la série $\sum \sin n$?

Grossièrement divergente ; la formule

$$\sin(n+1) = \sin n \ \cos 1 + \cos n \ \sin 1$$

montre assez facilement (sachant que $\sin 1 \neq 0$) que la suite $(\sin n)$ ne converge pas vers 0.

Exercice 23. Soit (u_n) une suite à termes réels positifs, décroissante. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors $u_n = o\,(1/n)$. Montrer que ce résultat est faux si on enlève l'hypothèse « décroissante »

Le plus important est de retenir le fait que le critère de comparaison à Riemann n'est pas une condition nécessaire. Par exemple, prenons $u_n = 1/n$ si n est un carré, 0 sinon. $\sum u_n$ converge, et pourtant on n'a pas $u_n = o\,(1/n)$.
Mais si (u_n) décroît, avec des notations habituelles,

$$0 \leq n u_{2n} \leq S_{2n} - S_n$$

Donc $(n u_{2n})$ converge vers 0. Donc $(2n u_{2n})$ aussi. Et également $((2n+1)u_{2n+1})$ grâce à

$$0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq \frac{2n+1}{2n} 2n u_{2n}$$

Exercice 24. Soit $k > 1$; on note $S_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^k}$ et $\Sigma_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^k}$; calculer Σ_k en fonction de S_k.

Toutes les séries convergent, on peut écrire

$$S_k = 1 + \Sigma_k + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^k} = 1 + \Sigma_k + \frac{1}{2^k} S_k$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 25 (Oral Mines). Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Déterminer la nature des séries de terme général donné par les formules

$$u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \quad , \quad v_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^\alpha} \quad , \quad w_n = \frac{\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)^\alpha}$$

La plus facile est sans doute la deuxième, pour laquelle, par théorème sur les séries alternées, dont les hypothèses sont assez évidemment réalisées ici,

$$|v_n| \leq \frac{1}{n^\alpha}$$

ce qui, par comparaison à une série de Riemann, donne la convergence absolue, donc la convergence, de $\sum v_n$.
Pour la première, on fait une comparaison série-intégrale : c'est une idée importante à avoir quand on veut un ordre de grandeur de ce genre de terme. On a

$$\int_n^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \leq u_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$$

On calcule :

$$\frac{1}{\alpha - 1} n^{1-\alpha} \leq u_n \leq \frac{1}{\alpha - 1} (n-1)^{1-\alpha}$$

Mais cela implique

$$u_n \sim \frac{1}{\alpha - 1} n^{1-\alpha}$$

et donc $\sum u_n$ converge si et seulement si $1 - \alpha < -1$, i.e. $\alpha > 2$ (comparaison à une série de Riemann).
Pour la troisième, des comparaisons séries-intégrales donnent l'équivalent

$$w_n \sim \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

On est donc ramené à l'étude de convergence d'une série de Bertrand, dans un cas qui se règle (encore !) par comparaison série-intégrale, on trouve qu'il y a convergence si et seulement si $\alpha > 1$.

Exercice 26 (Oral Mines). Nature de la série de terme général $\sin(\pi\sqrt{1+n+n^2})$.

On développe :

$$\pi\sqrt{1+n+n^2} = n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}$$

jusqu'à un ordre suffisant...Or
$n\pi\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = n\pi$ (qui donnera un signe) $+\ \frac{\pi}{2}$ (qui changera sin en $\pm$ cos) $+\frac{\pi}{2n}-\frac{\pi}{8n}$ (cela risque de ne pas suffire...)$+\,O\left(\frac{1}{n^2}\right)$
(le O est une astuce ici qui évite l'explicitation des termes d'ordre suivant). Ce qui donne :

$$\sin(\pi\sqrt{1+n+n^2}) = (-1)^n\cos\left(\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

et la divergence est grossière...on peut donc penser que l'énoncé est erroné, et qu'il s'agissait d'examiner $\sum u_n$ avec

$$u_n = \cos(\pi\sqrt{1+n+n^2})$$

On aurait en effet, beaucoup plus intéressant,

$$\begin{aligned} u_n &= (-1)^n\sin\left(\frac{3\pi}{8n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= (-1)^n\frac{3\pi}{8n}+w_n \end{aligned}$$

où $w_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Donc $\sum w_n$ converge (car elle converge absolument, comparaison à Riemann), or $\sum(-1)^n\frac{3\pi}{8n}$ converge (série alternée vérifiant les hypothèses du théorème), donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 27 (Oral Centrale, Mines). Etudier la nature de la série $\sum\sin\Big(\pi(2-\sqrt{3})^n\Big)$ et en déduire celle de la série $\sum\sin\Big(\pi(2+\sqrt{3})^n\Big)$.
Ce très vieux classique est parfois posé en ne donnant que la deuxième question, ce qui le rend plutôt astucieux.

Un équivalent montre que la première série converge. L'idée est ensuite de développer avec la formule du binôme pour s'apercevoir que $\pi(2-\sqrt{3})^n$ et $\pi(2+\sqrt{3})^n$ sont plus ou moins congrus modulo π, ce qui permet de ramener l'étude de la première série à celle de la seconde.

Exercice 28 (Oral Centrale). Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{u_n^2 + 1}$. Etudier la nature de la série de terme général $v_n = u_n - 1$.

On voit rapidement que $u_{n+1} \geq -1$, donc la suite est positive à partir du rang 2 au moins. Puis on situe u_n par rapport à 1. On calcule $u_{n+1} - 1$, et on voit que u_n est alternativement plus grand et plus petit que 1. Puis on montre que $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - 1|$. D'où la convergence de (u_n) vers 1 et la convergence de $\sum v_n$ par comparaison à une série géométrique.

Exercice 29. Etudier, suivant la valeur du réel strictement positif a, la convergence de la série de terme général $a^{\ln n}$.

On écrit

$$a^{\ln n} = e^{\ln n \ \ln a} = n^{\ln a}$$

puis on est ramené aux séries de Riemann.

Exercice 30. Etudier, suivant la valeur du réel strictement positif a, la convergence de la série de terme général a^{H_n} où $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Le développement asymptotique

$$H_n = \ln n \ + \ \gamma + \ o\,(1)$$

n'est pas au programme. On encadre :

$$\int_1^{n+1} \frac{dt}{t} \leq H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dt}{t}$$

ce qui suffit pour conclure, avec un argument du type de celui utilisé dans l'exercice précédent.

Exercice 31. Etudier, suivant les valeurs du réel strictement positif a, la convergence des séries de termes généraux : a^{n^2}, a^n, $a^{\sqrt{n}}$, $a^{\ln(n)}$

Si $a \geq 1$, toutes ces séries divergent grossièrement. Si $a < 1$, la deuxième converge, a fortiori la première (comparaison). Pour la troisième, on compare à $1/n^2$ par exemple (d'Alembert ne marche pas, on doit donc faire une comparaison plus fine que la comparaison à une série géométrique, pourquoi ne pas comparer à une série de Riemann).
Plus précisément, regardons si par hasard on n'aurait pas

$$a^{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ce qui équivaut à

$$n^2 a^{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Comme il ne s'agit pas d'une croissance comparée classique, on explicite l'expression sous forme exponentielle :

$$n^2 a^{\sqrt{n}} = \exp\left(2\ln(n) + \sqrt{n}\ln(a)\right)$$

On retrouve alors des croissances comparées connues : une puissance strictement positive de n est prépondérante devant $\ln n$. Plus précisément :

$$2\ln(n) + \sqrt{n}\ln(a) = \sqrt{n}\ln(a)\left(1 + 2\frac{\ln n}{\sqrt{n}\ln(a)}\right)$$

(rappelons que $a < 1$, donc $\ln a \neq 0$). Comme

$$\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

on a $2\ln(n) + \sqrt{n}\ln(a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$. On en déduit bien que $a^{\sqrt{n}} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la conclusion est que $\sum a^{\sqrt{n}}$ converge par comparaison d'une série à termes réels positifs à une série de Riemann.
Pour la quatrième, voir un exercice précédent.

Exercice 32 (Oral Mines). Discuter, en fonction des réels strictement positifs a et α, la nature de la série de terme général

$$u_n = a^{x_n} \qquad \text{où} \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k^\alpha$$

Si $a \geq 1$, divergence grossière. Supposons donc $a < 1$. Si (x_n) converge, divergence grossière aussi. Supposons donc $\alpha \leq 1$. Si $\alpha = 1$, voir un exercice précédent. Si $\alpha < 1$, la comparaison à une série de Riemann (et une comparaison somme-intégrale pour évaluer l'ordre de grandeur de x_n) montre la convergence.

Exercice 33 (Oral Mines). Discuter la nature de la série de terme général $\dfrac{\ln(1+a^n n^\alpha)}{n^\beta}$ où a, α, β sont des réels, $a \geq -1$.
On remarquera qu'il se peut que le terme général ne soit pas défini, ou ne le soit qu'à partir d'un certain rang.

Dans l'expression, $a^n n^\alpha$, le terme le plus important est a^n. On commence par étudier le cas $a > 1$. Dans ce cas, notant u_n le terme général,

$$u_n = \frac{n\ln(a) + \alpha \ln n + \ln(1 + a^{-n}n^{-\alpha})}{n^\beta}$$

dont il n'est pas difficile de donner un équivalent. Et on conclut donc la discussion sous cette hypothèse.
Le cas $0 < a < 1$ n'est pas si différent, on a directement un équivalent : $a^n n^{\alpha-\beta}$, et on obtient la convergence par comparaison ou avec d'Alembert.
Si $a = 1$, on distingue $\alpha = 0$, série de Riemann, $\alpha < 0$ on trouve l'équivalent $n^{\alpha-\beta}$ (encore une série de Riemann), $\alpha > 0$:

$$u_n = \frac{\alpha \ln n + \ln(1 + n^{-\alpha})}{n^\beta}$$

d'où un équivalent, et on est ramené à une série de Bertrand.
Si $-1 < a < 0$, convergence absolue avec les mêmes outils que $0 < a < 1$; si $a = -1$, $\alpha < 0$, un développement asymptotique à deux termes et le théorème sur les séries alternées...

Exercice 34. Démontrer que, si $|x| < 1$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{1+x^n}$ converge. Par comparaison avec une intégrale, montrer que, si l'on note $f(x)$ sa somme, $f(x)$ est équivalent au voisinage à gauche de 1 à $\dfrac{\ln 2}{1-x}$.

Un équivalent de la valeur absolue donne la convergence par comparaison. Puis on encadre : si $0 < x < 1$, on note

$$h_x \ : \ t \mapsto \frac{x^t}{1+x^t}$$

dont on vérifie qu'elle est positive décroissante. On encadre donc la somme par deux intégrales (à un terme près). Il se trouve qu'on sait primitiver h_x, on peut donc finir le calcul...

Exercice 35 (**Classique : séries de Bertrand).** Etudier la nature de la série $\sum \frac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$ suivant les valeurs des réels α et β.

Si $\alpha > 1$, on prend une « marge de sécurité » : soit δ tel que $1 < \delta < \alpha$. Alors

$$\frac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta} = o\left(\frac{1}{n^\delta}\right)$$

ce qui donne la convergence.
Si $\alpha < 1$, alors

$$\frac{1}{n} = o\left(\frac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}\right)$$

ce qui donne la divergence.
Si $\alpha = 1$ et $\beta \leq 0$, alors

$$\frac{1}{n} = O\left(\frac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}\right)$$

donne encore la divergence.
On est donc réduit au cas $\alpha = 1$, $\beta > 0$, qui se traite par comparaison à une intégrale.

Exercice 36 (**Oral Centrale).** Pour quelles valeurs du réel α le nombre $u_n = \sum_{k=n}^{\infty} (k+1)^{-\alpha}$ existe-t-il ? Etudier alors la nature de la série de terme général u_n.

Il y a existence si et seulement si $\alpha > 1$; et dans ce cas, on peut encadrer u_n par deux intégrales qu'on calcule. On trouve alors que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\alpha > 2$.

Exercice 37. Etudier suivant les valeurs du réel α la convergence de la série de terme général
$\exp\left(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - 1$.

Si $\alpha \leq 0$, il y a divergence grossière. Si $\alpha > 0$, on fait un développement asymptotique à deux termes :

$$\exp\Big(\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\Big) - 1 = \alpha_n + \beta_n$$

où $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ et $\beta_n = \dfrac{1}{2n^{2\alpha}} + o\left(\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\right)$. Or $\sum \alpha_n$ converge (séries alternées), donc la série étudiée converge si et seulement si $\sum \beta_n$ converge, donc si et seulement si $\alpha > 1/2$.

Exercice 38. Etudier suivant les valeurs du réel α la nature de la série de terme général

$$\frac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha + (-1)^n} \ .$$

Même technique que ci-dessus : un développement asymptotique à deux termes (on suppose $\alpha > 0$: si $\alpha = 0$, la série n'est pas définie, si $\alpha \leq 0$ elle diverge grossièrement).

Exercice 39. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n + \sin n}$

Encore un développement asymptotique à deux termes...ou plus simplement, voir que les hypothèses du théorème sur les séries alternées sont vérifiées.

Exercice 40 (Centrale, Mines, X : critère de Raabe-Duhamel).

1. On considère une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to\infty}{O}\Big(\frac{1}{n^2}\Big)$$

où α est un réel. On considère la suite de terme général $v_n = \ln(n^\alpha u_n)$ et la série $\sum w_n$ où $w_n = v_{n+1} - v_n$. Démontrer que cette série converge. Qu'en déduit-on pour la suite (v_n) ? Démontrer alors qu'il existe un réel strictement positif λ tel que

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n^\alpha} \ .$$

2. On considère la suite donnée par la condition initiale $u_0 = 1$ et la relation de récurrence, pour tout entier naturel n,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+a}{n+b}$$

où a et b sont deux réels strictement positifs fixés. Etudier suivant les valeurs des réels a et b la convergence de la série $\sum u_n$.

3. On considère une série $\sum u_n$ à termes strictement positifs telle que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \underset{n\to\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

où α est un réel. Dire pour quelles valeurs de α on peut conclure à la convergence de la série $\sum u_n$, pour quelles valeurs on peut conclure à sa divergence, et pour quelle valeur on ne peut conclure. Indication : considérer $v_n = \frac{1}{n^\beta}$, donner un développement limité de $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ et le comparer à celui de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour conclure, suivant les valeurs de β, $u_n = O(v_n)$ ou l'inverse.

---

1. On peut écrire :

$$\begin{aligned}
w_n &= v_{n+1} - v_n \\
&= \ln\big((n+1)^\alpha u_{n+1}\big) - \ln(n^\alpha u_n) \\
&= \alpha \ln(1 + \frac{1}{n}) + \ln \frac{u_{n+1}}{u_n} \\
&= \alpha\Big(\frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\Big) + \ln\Big(1 - \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\Big) \\
&= \frac{\alpha}{n} + \Big(-\frac{\alpha}{n}\Big) + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\
&= O\left(\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Ce qui revient à dire que

$$|w_n| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et donc, par comparaison à l'exemple de Riemann, $\sum |w_n|$ converge ; l'absolue convergence dans $\mathbf{R}$ complet implique la convergence, donc

$$\boxed{\text{La série } \sum w_n \text{ converge}}$$

Mais alors, par correspondance suites-séries,

$$\boxed{\text{La suite } (v_n) \text{ converge}}$$

Notons k sa limite ; par continuité de l'exponentielle, la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers $\lambda = e^k$. Et, comme $\lambda \neq 0$, on peut écrire

$$n^\alpha u_n \sim \lambda$$

et donc

$$\boxed{u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}}$$

2. On voit que la suite (u_n) est bien définie par récurrence, à valeurs strictement positives. Et on peut écrire

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1+\dfrac{a}{n}}{1+\dfrac{b}{n}} \\ &= (1+\frac{a}{n})(1-\frac{b}{n}+O\,(\frac{1}{n^2}) \\ &= 1+\frac{a-b}{n}+O\,(\frac{1}{n^2}) \end{aligned}$$

On est donc bien sous les hypothèses du **1.**, qui permettent de dire qu'il existe un réel strictement positif λ tel que

$$u_n \sim \frac{\lambda}{n^{b-a}}$$

Et donc, par comparaison à l'exemple de Riemann,

$$\boxed{\text{La série } \sum u_n \text{ converge si et seulement si } b > a+1}$$

3. Sans indication, ce serait peu évident ! Il s'agit de faire ici une comparaison logarithmique à une série de Riemann (rappelons que le critère de d'Alembert est, lui, une comparaison logarithmique à une série géométrique, ce qui est plus simple).

   Définissons donc, pour tout $n \in \mathbf{N}_*$,

$$v_n = \frac{1}{n^\beta}$$

et effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} \frac{v_{n+1}}{v_n} &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^\beta \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\beta} \\ &= 1-\frac{\beta}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

D'où l'on déduit

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\beta - \alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

ce qui permet d'utiliser le lemme de comparaison logarithmique :

• Si $\alpha < \beta$, alors, de

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} \sim \frac{\beta - \alpha}{n}$$

et du fait que deux suites équivalentes ont, à partir d'un certain rang, même signe, on déduit qu'à partir d'un certain rang, $\frac{u_{n+1}}{u_n} - \frac{v_{n+1}}{v_n} > 0$, et donc, par lemme de comparaison logarithmique,

$$v_n = O(u_n)$$

• Si $\alpha > \beta$, alors de même,

$$u_n = O(v_n)$$

Quand peut-on dire que $\sum u_n$ converge ? On sait qu'il est possible de conclure cela lorsque u_n est dominée au voisinage de $+\infty$ par le terme général d'une série convergente. On pourra donc conclure à la convergence de $\sum u_n$ par ce qui précède lorsque les deux conditions suivantes seront remplies :

⋆ $\alpha > \beta$ (pour avoir $u_n = O(v_n)$)

⋆ $\beta > 1$ (pour avoir $\sum v_n$ convergente)

L'existence d'un tel β est équivalente à la condition $\alpha > 1$ (que cette condition soit nécessaire est bien claire ; elle suffit, car si $\alpha > 1$, on peut trouver un β dans $]1, \alpha[$).

De même, si $\alpha < 1$, on peut trouver un $\beta \in]\alpha, 1[$ tel que $v_n = O(u_n)$ et $\sum v_n$ diverge. Ce qui implique la divergence de $\sum u_n$. Finalement,

Si $\alpha > 1$, $\sum u_n$ converge Si $\alpha < 1$, $\sum u_n$ diverge Si $\alpha = 1$, on ne peut rien affirmer

(On vérifie évidemment que c'est cohérent avec la première question, où l'hypothèse était plus forte)

Exercice 41 (Constante d'Euler, formule de Stirling).

1. On définit, pour tout entier naturel non nul n,
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad u_n = S_n - \ln n\ .$$
Trouver un équivalent de $u_{n+1} - u_n$. En déduire que la suite (u_n) converge. On appelle γ sa limite.
2. On note
$$u_n = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{\sqrt{n}}{n!}$$
et $v_n = \ln u_n$. Déterminer un équivalent de $v_{n+1} - v_n$. Qu'en déduit-on ?

---

2. On écrit
$$v_n = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n - \ln(n!)$$
et donc
$$v_{n+1} - v_n = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n+1) - 1 + \frac{1}{2} \ln(1 + \frac{1}{n}) - \ln(n+1)$$
ce qui permet de trouver facilement un équivalent en $1/n^2$ et d'utiliser les séries de Riemann.

Exercice 42. Calculer les sommes des séries suivantes, dont on justifiera au préalable la convergence :
$$\sum \frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad \sum \frac{1}{n^2 - 1} \quad , \quad \sum \frac{\sin n\alpha}{2^n} \quad , \quad \sum \frac{n^2 + n + 2}{n!}.$$

Pour les deux premières, on décompose en éléments simples, et on fait le calcul en passant aux sommes partielles. Pour la troisième, c'est la partie imaginaire d'une somme de série géométrique. Le calcul de la quatrième est facilité par l'écriture $n^2 = n(n-1) + n$ (pour les simplifications avec la factorielle du dénominateur).

Exercice 43. [Fonction zeta]
On note, si $z = x + iy$ est un nombre complexe (x, y réels), si $n \geq 0$,
$$n^z = n^x e^{iy \ln(n)}$$

1. Calculer, à l'aide de la partie réelle du nombre complexe z, le module de n^z.
2. Pour quelles valeurs du nombre complexe z la série $\sum \frac{1}{n^z}$ est-elle absolument convergente ? On note $\zeta(z)$ sa somme.
3. En comparant la série à une intégrale, démontrer que
$$\left|\frac{1}{z-1} - \zeta(z)\right| \leq \frac{|z|}{x}$$
où x désigne la partie réelle de z.
4. On se restreint à $\mathbf{R}$. Déterminer un équivalent, au voisinage de 1 à droite, de $\zeta(s)$.

La série converge absolument pour $|\mathrm{Re}(z)| > 1$. On veut comparer $\zeta(z)$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^z}$. Cette dernière intégrale vaut $1/(z-1)$ (calcul facile quand on a remarqué qu'une puissance complexe se dérive comme une puissance réelle). On a :

$$\begin{aligned}\frac{1}{z-1} - \zeta(z) &= \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^z} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^z} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^z} - \frac{1}{n^z} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{t^z} - \frac{1}{n^z} \right) dt \right)\end{aligned}$$

Pour chaque n, une intégration par parties donne (on dérive $1/t^z - 1/n^z$, on primitive astucieusement le 1 en $t - (n+1)$ pour faire disparaître le crochet) :

$$\int_n^{n+1} \left(\frac{1}{t^z} - \frac{1}{n^z} \right) dt = z \int_n^{n+1} \frac{t-(n+1)}{t^{z+1}} dt$$

ce qui permet de majorer :

$$\left| \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{t^z} - \frac{1}{n^z} \right) dt \right| \leq |z| \int_n^{n+1} \frac{1}{t^{x+1}} dt$$

Exercice 44 (Oral X). On définit : $u_n = 1/n$ si n n'est pas un carré, $u_n = -1/n$ si n est un carré. Nature de la série $\sum u_n$?

Posons $v_n = 1/n$ si n n'est pas un carré, $v_n = 0$ sinon. Posons $w_n = -1/n$ si n est un carré, $w_n = 0$ sinon. Alors $u_n = v_n + w_n$, or $\sum v_n$ diverge et $\sum w_n$ converge. Conclusion…

Exercice 45 (X). Soit $d>0$ et (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n\neq m$, $|z_n-z_m|\geq d$. Soit $\alpha>2$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

Exercice élégant car géométrique. Mais difficile car très inhabituel dans la démarche suivie.

L'idée est de montrer qu'il y a « peu » de z_n dont le module est « petit »...Soyons plus précis, et comptons les z_n qui sont dans une couronne : on définit

$$n(p)=\mathrm{Card}\Big(\{k\in\mathbf{N}\ /\ p\leq|z_k|\leq p+1\}\Big)$$

Si $p\leq|z_k|\leq p+1$, $D(z_k,d/2)$ est un disque inclus dans la couronne

$$A_p=\{z\ /\ p-d/2\leq|z|\ \leq p+1+d/2\}$$

Il y a $n(p)$ tels disques, et ils sont disjoints. La somme de leurs aires est donc inférieure ou égale à l'aire de la couronne A_p, ce qui se traduit par

$$n(p)\times\pi\Big(\frac{d}{2}\Big)^2\leq\pi(p+1+\frac{d}{2})^2-\pi(p-\frac{d}{2})^2$$

d'où, en simplifiant un peu :

$$n(p)\leq\frac{4}{d^2}(d+1)(1+2p)$$

Il y a d'autre part un nombre fini de k tels que $|z_k|\leq 1$.
Soit $N\geq 1$;

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{|z_n|^\alpha}=\sum_{n\in[\![0,N]\!]/|z_n|\leq 1}\frac{1}{|z_n|^\alpha}+\sum_{p=1}^{+\infty}\quad\sum_{n\in[\![0,N]\!]/|z_n|\in[p,p+1[}\frac{1}{|z_n|^\alpha}$$

(la deuxième somme est, contrairement aux apparences, finie). Donc

$$\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{|z_n|^\alpha}=\sum_{n\in[\![0,N]\!]|z_n|\leq 1}\frac{1}{|z_n|^\alpha}+\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{n(p)}{p^\alpha}$$

Mais $\dfrac{n(p)}{p^\alpha}\leq\dfrac{4}{d^2}\dfrac{2p+1}{p^\alpha}(d+1)\sim\dfrac{8}{dp^{\alpha-1}}$
donc $\displaystyle\sum_{p\geq 1}\frac{n(p)}{p^\alpha}$ converge, donc $\dfrac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

Exercice 46 (ens Paris, Lyon). Soit (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq 1$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{z_n^3}$ converge.

---

cf ci-dessus.

Exercice 47 (X). Soit a une suite de réels strictement positifs, strictement croissante. Etudier la nature de la série de terme général $\dfrac{a_n - a_{n+1}}{a_n}$.

On comence par faire quelques essais. Pour une suite constante, ça converge ; pour $a_n = n$, $a_n = n^2$, $a_n = e^n$, ça diverge...Supposons qu'il n'y ait pas divergence grossière, i.e. que a_{n+1}/a_n tende vers 1. Alors, en posant $u_n = (a_{n+1} - a_n)/a_n$, on a

$$u_n \sim \ln(1 + u_n)$$

et les deux séries ont même nature (car le signe de u_n est positif toujours). Or

$$\ln(1 + u_n) = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$$

terme général d'une série télescopique. Donc trois possibilités a priori : la série diverge grossièrement, ou elle ne diverge pas grossièrement et $a_n \to +\infty$, alors elle diverge, ou elle ne diverge pas grossièrement et $a_n \to \ell \in \mathbf{R}$, alors elle converge. Mais si (a_n) converge, vers une limite nécessairement strictement positive, alors la série ne peut pas diverger grossièrement. Donc finalement, la série converge si et seulement si la suite (a_n) converge.

Exercice 48 (Oral X). Soit (u_n) une suite réelle strictement positive telle que la série de terme général u_n converge. On note R_n le reste d'ordre n : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. On note S_n la somme partielle d'ordre n. Etudier la nature des séries de termes généraux u_n/R_n, u_n/R_{n-1} et u_n/S_n.

D'abord la dernière : la suite (S_n) converge vers une limite ℓ strictement positive, on a donc le droit d'écrire

$$u_n/S_n \sim u_n/\ell$$

et de conclure que $\sum u_n/\ell$ converge (comparaison de séries positives).

Avec les restes, c'est moins facile ; en effet, on voit assez facilement que

$$u_n = o(u_n/R_n)$$

mais c'est dans le mauvais sens...on ne conclut donc pas si directement. Il n'est pas anormal ni inquiétant de sécher un peu sur cet exercice. A l'oral, on devrait avoir l'idée de tester ce qui se passe pour quelques séries particulières. Lesquelles ? des séries dont on sait calculer les restes (séries géométriques) ou au moins en déterminer un équivalent (séries de Riemann, en utilisant une comparaison série-intégrale).
Une idée pas trop étrange est d'écrire u_n à l'aide des restes :

$$\frac{u_n}{R_n} = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_n}$$

Que faire de cette expression ? on peut l'écrire sous forme intégrale :

$$\frac{u_n}{R_n} = \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{R_n} \geq \int_{R_n}^{R_{n-1}} \frac{dt}{t}$$

Donc

$$\sum_{n=1}^{p} \frac{u_n}{R_n} \geq \int_{R_p}^{R_0} \frac{dt}{t}$$

ce qui, compte tenu de la non intégrabilité de $t \mapsto 1/t$ sur $]0, R_0]$, montre que la série de terme général u_n/R_n diverge.
Si on fait la même chose avec $\dfrac{u_n}{R_{n-1}}$, ça ne marche pas (inégalité dans le mauvais sens). Mais si la suite de terme général

$$1 - \frac{R_n}{R_{n-1}}$$

ne converge pas vers 0, il y a divergence grossière. On n'envisage donc que ce cas intéressant, c'est-à-dire le cas $R_n \sim R_{n-1}$. Mais alors

$$\frac{u_n}{R_n} \sim \frac{u_n}{R_{n-1}}$$

et une comparaison au cas déjà étudié conclut encore à la divergence.
Plus simple : On dit que $\dfrac{u_n}{R_n} = \dfrac{R_{n-1}}{R_n} - 1$; si $\dfrac{R_{n-1}}{R_n}$ ne tend pas vers 1, il y a divergence grossière. Supposons donc que $\dfrac{R_{n-1}}{R_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Alors

$$\frac{R_{n-1}}{R_n} - 1 \sim \ln\Big(\frac{R_{n-1}}{R_n}\Big) = \ln(R_{n-1}) \ - \ \ln(R_n)$$

On est ramené à une série télescopique, et à la correspondance suites-séries. Or la suite $\big(\ln R_n\big)$ diverge vers $-\infty$, d'où la divergence de la série. Et le même traitement s'applique à $\dfrac{u_n}{R_{n-1}} = 1 - \dfrac{R_n}{R_{n-1}}$

Exercice 49 (Paris-Lyon-Cachan). Soit $(a_n)_{n\in\mathbf{N}} \in (\mathbf{R}^+)^{\mathbf{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge. Existe-t-il une suite (b_n) de réels positifs, tendant vers $+\infty$, telle que $\sum a_n b_n$ converge ?

Des essais montrent qu'en général, oui. Si on cherche un contre-exemple, on a du mal à en trouver un...d'où l'idée de montrer que c'est vrai. Supposons d'abord les a_n positifs. On va essayer de faire tendre les b_n vers l'infini « assez lentement » pour ne pas perturber la convergence de la série. Introduisons les restes de la série (décalés d'un rang pour des commodités de rédaction) :

$$R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} a_k$$

Si $\dfrac{1}{2^{p+1}} < R_n \leq \dfrac{1}{2^p}$, posons par exemple $b_n = p$. Si $R_n > 1$, on définit $b_n = 0$. Le fait que la suite (R_n) converge vers 0 donne assez facilement la divergence de (b_n) vers $+\infty$, sauf si R_n s'annule, ce que nous supposerons dans un premier temps ne pas arriver.
Comme la suite (a_n) est positive, la suite (R_n) est décroissante. Soit n_0 le premier rang tel que $R_{n_0} \leq 1$, n_1 le premier rang tel que $R_{n_1} \leq \dfrac{1}{2}, \dots$, n_k le premier rang tel que $R_{n_k} \leq \dfrac{1}{2^k}$ pour tout entier naturel k (la suite (n_k) est bien définie par convergence vers 0 de la suite (R_n), croissante par décroissance de la suite (R_n), et tend vers $+\infty$ (sinon elle est stationnaire, mais dans ce cas R_n est nul à partir d'un certain rang, ce que nous avons exclu). On peut alors découper, si $N > n_0$,

$$\sum_{k=n_0}^{N} a_k b_k = \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k b_k \ + \sum_{k=n_1}^{n_2-1} a_k b_k \ + \ \ldots + \sum_{k=n_q}^{N} a_k b_k$$

où n_q est le plus grand n_k inférieur ou égal à $N-1$. On peut noter que rien n'oblige la suite (n_k) à être strictement croissante, et donc certaines sommes ci-dessus peuvent être indexées par $\emptyset$, donc nulles, ce n'est pas gênant. On peut alors facilement majorer :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n_0}^{N} a_k b_k &\leq \sum_{k=n_0}^{n_1-1} a_k \times 0 \ + \sum_{k=n_1}^{n_2-1} a_k \times 1 \ + \ \ldots + \sum_{k=n_q}^{N} a_k \times q \\
&\leq (R_{n_1} - R_{n_2}) + \cdots + q(R_{n_q} - R_{n_q+1}) \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \cdots + \frac{q}{2^q} \\
&\leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}
\end{aligned}$$

ce qui donne bien la convergence de la série (car elle est à termes réels positifs).

Si la suite (R_n) s'annule, à partir d'un certain rang les a_n sont nuls, on peut prendre les b_n comme on veut (tendant vers $+\infty$), aucune difficulté.
Si les a_n ne sont pas positifs, c'est beaucoup plus délicat ! et surtout si les R_n s'annulent de temps en temps. . .mais l'idée de départ est encore valable.

Exercice 50 (X)**.** Soit σ une permutation de $\mathbf{N}^*$. Nature de la série de terme général $\dfrac{\sigma(n)}{n^2}$?

Pour $\alpha \leq 2$, pas de problème, il suffit de prendre $\sigma = Id$. Pour $\alpha > 2$, prenons par exemple $n = 3$ pour que ce soit plus clair, on se rendra vite compte que tous les cas se traitent de même. On définit, si $p \geq 1$,

$$\sigma(2p) = p^3$$

Les deux ensembles $\{2p+1 \ ; \ p \geq 0\}$ (ensemble des nombres impairs) et $\mathbf{N} \setminus \{p^3 \ ; \ p \in \mathbf{N}_*\}$ (les entiers qui ne sont pas des cubes) sont dénombrables (toute partie infinie de $\mathbf{N}$ est dénombrable, i.e. en bijection avec $\mathbf{N}$; en effet, si A est une telle partie, on définit $f(0) = \min(A)$,
$f(n+1) = \min(\llbracket 1+f(n), +\infty\llbracket \cap A)$ par récurrence, f est alors une bijection de $\mathbf{N}$ sur A). On peut donc prolonger σ en une permutation de $\mathbf{N}_*$ pour laquelle la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^\alpha}$ diverge car elle est grossièrement divergente (les termes d'indices pairs valent $1/8$).

Autres résultats du même genre :
Proposition 2 : Si σ est une permutation de $\mathbf{N}_*$, alors $\displaystyle\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$ converge.
Démonstration en utilisant Cauchy-Schwarz.

Proposition 3 : Si σ est une permutation de $\mathbf{N}_*$, alors $\displaystyle\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.
En disant par exemple que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sigma(k)}{k^2} \geq \frac{1}{(2n)^2} \sum_{k=n+1}^{2n} \sigma(k) \geq \frac{1}{(2n)^2} \frac{n(n+1)}{2}$$

et ce minorant ne tend par vers 0 quand $n \to +\infty$.

Exercice 51 (**ens Paris-Lyon-Cachan**)**.** Comparer les natures des séries de termes généraux a_n et $\sqrt{a_n a_{n+1}}$, (a_n) étant une suite de réels positifs.

L'inégalité
$$\sqrt{a_n a_{n+1}} \leq \frac{1}{2}(a_n + a_{n+1})$$
montre que si $\sum a_n$ converge, alors $\sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge. Réciproque fausse : prendre $a_n = 1/n$ si n pair, $a_n = 0$ si n impair. Si on veut une suite strictement positive, prendre $a_n = 1/n$ si n pair, $a_n = 1/n^3$ si n impair.

Exercice 52 (Oral X). Posons, pour tout $n \in \mathbf{N}_*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note ℓ sa limite.
2. Préciser le signe de ℓ.
3. Montrer que $\ell = -(1+\sqrt{2}) \displaystyle\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}}$.
4. Montrer que $u_n = \ell + \dfrac{1}{2\sqrt{n}} + O\left(\dfrac{1}{n^{3/2}}\right)$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}_*$, $u_n = -\displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{p-1})^2}$.

---

1. Plusieurs méthodes possibles. On peut calculer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$ pour montrer que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, et appliquer la correspondance suites-séries. On peut aussi considérer la fonction f : $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et utiliser la convergence de la série $\sum w_n$. Cette méthode est naturelle, dans la mesure où l'énoncé fait penser à l'exercice classique sur le développement asymptotique de H_n (somme partielle de la série harmonique). Le cours nous permet de dire que la série de terme général
$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} - \frac{1}{\sqrt{k}} \qquad (k \geq 1)$$
converge, et si on calcule une somme partielle de cette série on tombe à peu de choses près sur le résultat.
2. Pour cette deuxième question, une comparaison somme-intégrale est de nouveau intéressante :
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$$
En calculant :
$$2(\sqrt{n+1} - 1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$$
On a donc $-2 \leq \ell \leq -1$.

3. La convergence de la série au second membre relève du théorème sur les séries alternées. On s'inspire du calcul de la somme de la série harmonique alternée, en séparant les termes d'indices pairs et impairs. Ce qui ne peut se faire que dans une somme partielle, sinon on écrit des séries divergentes. Comme la série converge, on peut se contenter des sommes ayant un nombre pair de termes. Si $N \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}} &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{2k+1}} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2k}} \\
&= \sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{p}} - 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2k}} \\
&= u_{2N} + 2\sqrt{2N} - \frac{2}{\sqrt{2}}(u_N + 2\sqrt{N}) \\
&\xrightarrow[N \to +\infty]{} (1-\sqrt{2})\ell
\end{aligned}$$

D'où le résultat, qui d'ailleurs confirme le signe de u_n. On pouvait aussi retrancher à $\displaystyle\sum_{p=1}^{2N} \frac{(-1)^{p+1}}{\sqrt{p}}$ la somme $\displaystyle\sum_{p=1}^{2N} \frac{1}{\sqrt{p}}$, une présentation un peu différente de la même idée.

4. *Question technique. Le jour de l'oral, l'examinateur teste le candidat sur ses initiatives et ses réactions, il ne s'attend pas à un raisonnement qui mène tout droit au résultat.* L'idée (enfin, une idée, on peut toujours envisager les choses autrement) est d'approfondir la comparaison somme-intégrale : pour cela, définissons

$$w_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

et intégrons astucieusement par parties :

$$\begin{aligned}
w_n &= \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \mathrm{d}t \\
&= \left[(t-(n+1)) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) \right]_n^{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{n+1-t}{2t^{3/2}} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

et recommençons :

$$\begin{aligned}
w_n &= \int_n^{n+1} \frac{n+1-t}{2t^{3/2}} \mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{-1}{2}(n+1-t)^2 \frac{1}{2t^{3/2}} \right]_n^{n+1} - \frac{3}{4} \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{t^{5/2}} \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4n^{3/2}} - \frac{3}{4} \int_n^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{t^{5/2}} \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Or $\sum_{k=1}^{n} w_k = u_n + 2\sqrt{n} - \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = u_n + 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n+1} + 2$ Ce qui donne

$$u_n = -2 + \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} - \frac{3}{4}\int_1^{n+1} \frac{(n+1-t)^2}{t^{5/2}}\mathrm{d}t$$

S'il faut faire encore une comparaison série-intégrale, ça va être fatigant...Remarquons plutôt que

$$\begin{aligned}\frac{1}{k^{1/2}} - \frac{1}{(k+1)^{1/2}} &= k^{-1/2}\left(1-(1+\frac{1}{k})^{-1/2}\right)\\ &= k^{-1/2}\left(\frac{1}{2k}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\\ &= \frac{1}{2k^{3/2}}+O\left(\frac{1}{k^{5/2}}\right)\end{aligned}$$

et encore un peu de travail pour conclure, mais ça marche. Beaucoup d'autres manières de faire, finalement, plutôt que le télescopisme un peu astucieux vu ci-dessus, écrire

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} = \sigma - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}}$$

et encadrer le reste par des intégrales...

5. Avec l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+\sqrt{p-1})^2} &= \sum_{p=1}^{n} \frac{(\sqrt{p}-\sqrt{p-1})^2}{\sqrt{p}}\\ &= 2\sum_{p=1}^{n}\sqrt{p} - \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}} - 2\sum_{p=1}^{n}\sqrt{p-1}\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat.