Al2 : Matrices

I Matrices

I.1 Définition, notations

La définition d'une matrice, ce n'est pas très important, puisqu'on voit bien ce que c'est : un « tableau » d'éléments de $\mathbf{K}$. On peut trouver à juste titre cette « définition » peu mathématique. On peut faire mieux : une matrice « à n lignes et p colonnes » à coefficients dans $\mathbf{K}$, c'est une application

$$A : [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \longrightarrow \mathbf{K}$$

que l'on note en général comme une famille : on écrit $A_{i,j}$ plutôt que $A(i,j)$ (et d'ailleurs la tradition veut même qu'on note le plus souvent $a_{i,j}\ldots$), et $\left(A_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ plutôt que A.
On note aussi $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ plutôt que $\mathscr{A}\left([\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\mathbf{K}\right)$.
Mais si on oublie cette définition, considérer une matrice comme un tableau est une bonne idée. Remarquons enfin que lorsque la matrice est carrée, plutôt que $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}$ ou $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n}}$, on note $\left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$.
Les lettres i et j ne sont pas le seul choix possible, mais il vaut mieux respecter la double convention suivante : l'indice de ligne est avant l'indice de colonne à la fois dans l'indexation et dans l'alphabet. Sinon on n'y comprend plus rien.
Par exemple, si

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n}$$

on ne note pas la transposée de A : ${}^tA = A^T = \left(a_{j,i}\right)_{1\leq i,j\leq n}$, mais

$${}^tA = A^T = \left(b_{i,j}\right)_{1\leq i,j\leq n} \qquad \text{où} \qquad \forall (i,j) \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

(la nuance ne saute pas aux yeux...mais dès qu'on calcule, elle devient manifeste).

I.2 Opérations sur les matrices

a Combinaison linéaire

$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, c'est $\mathscr{A}\left([\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!],\mathbf{K}\right)$, et c'est donc un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Avec des opérations « évidentes » :

$$\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}+\left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}=\left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

et

$$\lambda.\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}=\left(\lambda a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

b Produit matriciel avec les coefficients

[Evidemment, on pourrait avoir l'idée de définir le produit de deux matrices terme à terme, comme pour la somme :

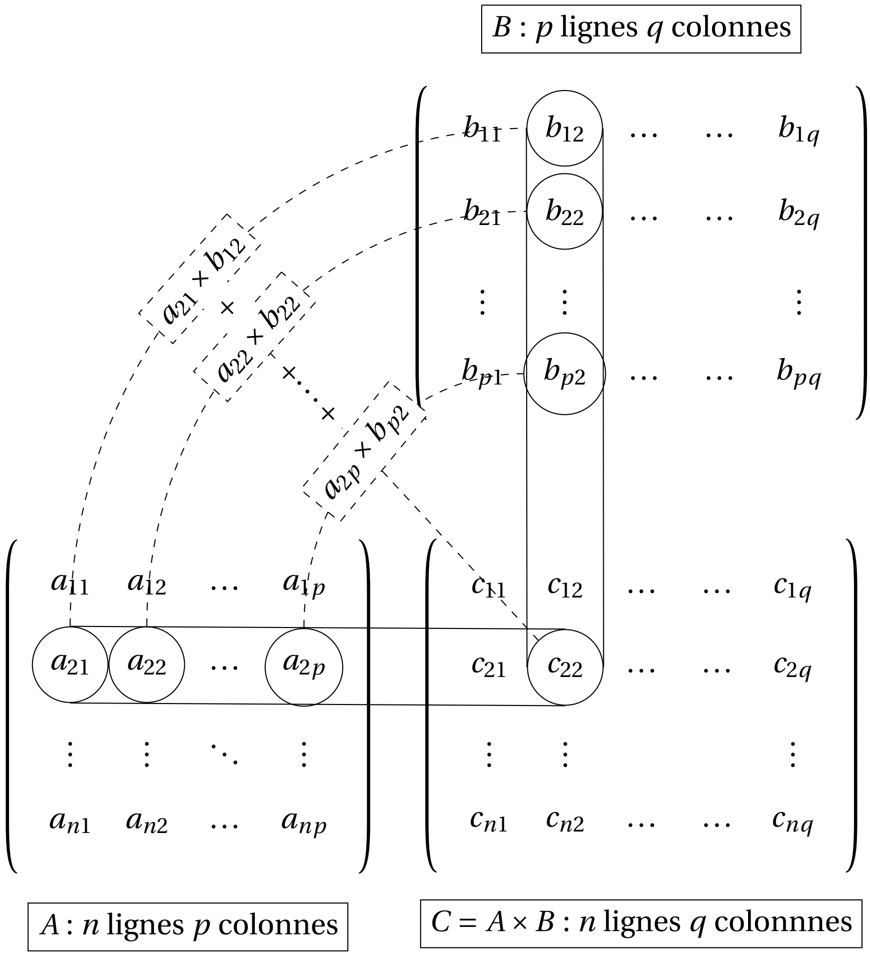
$$\left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}\otimes\left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}=\left(a_{i,j}b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}}$$

...et ça existe ! On appelle cette loi interne « produit d'Hadamard ». Elle peut se retrouver dans des exercices ou problèmes sur les matrices symétriques. Mais elle n'est pas très utile : elle ne permet pas de multiplier une matrice par une colonne, et ne peut donc pas servir à traduire les opérations « vectorielles » (calcul de $u(x)$, de $v\circ u$...) en opérations matricielles (MX, AB...).]

Définition Si A et B sont respectivement dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ et dans $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, on peut définir le produit $C=AB$ dans $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbf{K})$ par la formule (si $1\leq i\leq n$ et $1\leq j\leq q$)

$$c_{i,j}=\sum_{k=1}^{p}a_{i,k}b_{k,j}$$

Cette formule, bien qu'elle soit à connaître, n'est pas toujours la plus utile.
Il n'est pas du tout ridicule de redessiner la matrice A en bas à gauche et la matrice B en haut à droite pour effectuer le produit AB. D'une manière générale, il ne faut jamais hésiter à dessiner des matrices.



c Produit interprété avec les lignes et les colonnes

Tout ce paragraphe n'est rien qu'une lecture attentive d'un produit de matrices convenablement dessiné.

Première remarque : le produit AB, c'est le produit des lignes de A par les colonnes de B. Autrement dit, si $\Lambda_i = (a_{i,1}\ a_{i,2}\ \dots a_{i,p})$ est la ligne i de la matrice A $(1 \leq i \leq n)$ et $\Gamma_j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$ est la colonne j de la matrice B $(1 \leq j \leq q)$ alors, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]$,

$$(AB)_{i,j} = \Lambda_i\ \Gamma_j$$

(avec la convention habituelle : une matrice « scalaire », c'est-à-dire une matrice à un seul coefficient, est identifiée à cet unique coefficient).

Il importe de remarquer que, si $(\Gamma_1, \dots, \Gamma_q)$ est la famille des colonnes de B, alors la famille des colonnes de AB est $(A\Gamma_1, \dots, A\Gamma_q)$ (se voit très bien en représentant graphiquement le produit de matrices, ce qu'il faut faire!). Autrement dit, « multiplier B par A à gauche », c'est multiplier par A les colonnes de B.

Bref, le schéma

$$A \times \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \Gamma_1 & \vdots & \Gamma_2 & \vdots & \cdots & \vdots & \Gamma_n \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ A\Gamma_1 & \vdots & A\Gamma_2 & \vdots & \cdots & \vdots & A\Gamma_n \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

(où les Γ_k sont des colonnes) est peut-être la lecture la plus importante du produit matriciel.

Exercice Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on définit $\Phi_A \in L(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$ par

$$\Phi_A \,:\, M \longmapsto AM$$

On « rappelle » que

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\,;\; AX = (0)\}$$

Décrire $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(A)$.
Plusieurs réponses sont possibles.

I.3 Produit par blocs

Proposition Soit $(A,A') \in \left(\mathscr{M}_p(\mathbf{K})\right)^2$, $(B,B') \in \left(\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})\right)^2$, $(C,C') \in \left(\mathscr{M}_{q,p}(\mathbf{K})\right)^2$, $(D,D') \in \left(\mathscr{M}_q(\mathbf{K})\right)^2$. Alors

$$\begin{pmatrix} A & \vdots & & B & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & & \\ C & \vdots & & D & \\ & \vdots & & & \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A' & \vdots & & B' & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & & \\ C' & \vdots & & D' & \\ & \vdots & & & \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} AA'+BC' & \vdots & & AB'+BD' & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & \vdots & & & \\ CA'+DC' & \vdots & & CB'+DD' & \\ & \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Très, très utile, et admettant des généralisations. Souvent utilisé avec $p=1$ ou $q=1$.

Corollaire Si $A = \begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_1 & & & \\ & B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & B_p \end{pmatrix}$ où pour tout k, A_k et B_k sont dans un même $M_{m_k}(\mathbf{K})$, alors $AB = \begin{pmatrix} A_1B_1 & & & \\ & A_2B_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_pB_p \end{pmatrix}$

On peut aussi considérer que

$$A \times \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ \Gamma_1 & \vdots & \Gamma_2 & \vdots & \cdots & \vdots & \Gamma_n \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ A\Gamma_1 & \vdots & A\Gamma_2 & \vdots & \cdots & \vdots & A\Gamma_n \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots & \end{pmatrix}$$

(où les Γ_k sont des colonnes) est une sorte de produit par blocs.
On ne fera jamais d'erreur dans un produit par blocs si on pense à vérifier que les dimensions des matrices sont cohérentes.

I.4 Colonnes, vecteurs colonnes

Il n'est pas question ici de couper les cheveux en quatre, mais d'examiner une bonne fois pour toutes une petite difficulté de vocabulaire.

Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$, alors la j-ième colonne de A est

$$\Gamma_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

et c'est un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, mais le j-ième vecteur colonne de A est

$$\gamma_j = \left(a_{1,j}\ ,\ \dots\ ,\ a_{n,j}\right)$$

et c'est un élément de $\mathbf{K}^n$. Quand on a un peu l'habitude, on identifie souvent ces deux objets, mais il faut aussi savoir ne pas les confondre.

I.5 Base canonique

a La base canonique

Comme $\mathbf{K}^n$ et $\mathbf{K}[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ a une base canonique : la famille $\left(E_{r,s}\right)_{(r,s)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ où, pour tout couple $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$,

$$\left(E_{r,s}\right)_{i,j} = \delta_{i,r}\delta_{s,j}$$

Autrement dit, si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$,

$$A = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}E_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}E_{i,j}\right) = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}E_{i,j}$$

ce qui justifie l'appellation de « base canonique ».
La double indexation rend cette base un peu moins maniable que des bases naturellement ordonnées.

b Table de multiplication

Il faut savoir multiplier ces matrices élémentaires : si la matrice $E_{r,s}$ est à p lignes et q colonnes, si la matrice $E_{t,u}$ est à q lignes et r colonnes, alors

$$E_{r,s}E_{t,u} =$$

(résultat au programme, donc utilisable).

I.6 Résumé des structures

Espace vectoriel

$(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}), +, .)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

Anneau

$(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}), +, \times)$ est un anneau non intègre (l'élément neutre pour + est (0), l'élément neutre pour × est I_n).

D'abord, il n'est pas commutatif. Donc les formules

$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$

$A^m - B^m = (A-B)\Big($

ne sont valables que pour deux matrices qui commutent ($AB = BA$).

Il est certes rare que deux matrices commutent, mais si l'une des deux est I_n, ça marche. La formule

$$I_n - A^m = (I_n - A)(I_n + A + \cdots + A^{m-1})$$

est assez souvent utilisée.

Il y a beaucoup de « diviseurs de 0 » dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ (de $AB = (0)$ on ne déduit surtout pas $A = (0)$ ou $B = (0)$!), ce qui rend par exemple la résolution des équations matricielles délicate. Même l'équation $A^2 = (0)$ n'est pas simple à résoudre, mais son interprétation est très intéressante ! On sait bien aussi que $A^2 = A$ n'équivaut pas du tout à $A = I_n$ ou $A = (0)$.

Groupe

Le groupe $\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{K})\big)^*$ des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ inversibles pour × est noté $GL_n(\mathbf{K})$.

Algèbre

$(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}),+,\times,.)$ est une algèbre non commutative.

Ce qui résume les propriétés suivantes :

$(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}),+,.)$ *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel.*

$(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}),+,\times)$ *est un anneau.*

$\forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})^2 \qquad (\lambda.A)B = A(\lambda.B) = \lambda.(AB)$

II Matrices et applications linéaires

La notation Mat *qui figure dans ce paragraphe n'est plus officielle, elle a l'avantage de l'éloquence.*

II.1 Matrice d'une application linéaire relativement à des bases

a Définition

On considère deux espaces vectoriels E et F de dimensions finies p et n respectivement, munis des bases $\mathscr{B} = (e_j)_{1\leq j\leq p}$ et $\mathscr{C} = (f_i)_{1\leq i\leq n}$. A tout élément u de $L(E,F)$ on associe la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ définie par

$$\text{pour tout } j, \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i$$

$$\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\
a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np}
\end{pmatrix} &
\begin{array}{l}
\longleftarrow \text{composante sur } f_1 \\
\longleftarrow \text{composante sur } f_2 \\
\\
\longleftarrow \text{composante sur } f_n
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc}
\uparrow & & \uparrow & & \\
u(e_1) & & u(e_j) & &
\end{array} &
\end{array}$$

Insistons : $a_{i,j}$ est la composante sur f_i de $u(e_j)$.

A connaître parfaitement !

b Isomorphisme entre $L(E,F)$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$

Définition Si $\mathscr{B}$ est une base fixée de E et $\mathscr{C}$ est une base fixée de F,

$$\begin{array}{rccc} \phi: & L(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Ce qui signifie que ϕ est linéaire :
Si (u,v) sont dans $L(E,F)$ et λ dans $\mathbf{K}$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u+v)=\lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)+\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$$

et que ϕ est bijective : les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ étant fixées, si $A \in M_{n,p}(\mathbf{K})$ il existe une unique application linéaire u telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)=A$. Autrement dit, une application linéaire en dimension finie est caractérisée par sa matrice.

c Dimension

Proposition $\dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})\right)=np$

Démonstration Il n'y a qu'à compter les éléments de la base canonique.

Corollaire

$$\dim(L(E,F))=\dim E\ \times\ \dim F$$

Démonstration On fixe une base de E et une base de F, et on utilise l'isomorphisme du paragraphe précédent : deux espaces isomorphes sont de même dimension.

d Matrice d'une composée

Le produit matriciel s'accorde bien avec la composition des applications linéaires.

Proposition si E, F, G sont trois espaces vectoriels, si $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$, $\mathscr{D}$ en sont trois bases, si $u\in L(E,F)$ et $v \in L(F,G)$,

$$\underset{\mathscr{B}}{E} \xrightarrow{\quad u \quad} \underset{\mathscr{C}}{F} \xrightarrow{\quad v \quad} \underset{\mathscr{D}}{G}$$

alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v\circ u)$$

Démonstration Cours de mpsi...c'est seulement un calcul, et l'intérêt de la preuve n'est pas considérable, contrairement à celui du résultat.

Remarques : Que de bases! mais en fait, il n'y a pas de risque de se tromper, et la seule chose à mémoriser, c'est le très simple et très naturel

$$\mathrm{Mat}(v\circ u) = \mathrm{Mat}(v)\ \mathrm{Mat}(u)$$

Ensuite, pour que $v\circ u$ soit bien défini, il est nécessaire que l'espace d'arrivée de u soit l'espace de départ de v. Il est naturel alphabétiquement d'appeler E l'espace de départ de u, F l'espace d'arrivée de u qui est aussi l'espace de départ de v, G l'espace d'arrivée de v.
Enfin, on a une base dans chacun de ces trois espaces. Et la formule est complète.

e Cas des endomorphismes

Dans le cas où $E = F$ (cas de très loin le plus fréquent), on prend naturellement $\mathscr{B} = \mathscr{C}$. Alors

$$\begin{array}{rccl} \phi\ : & L(E) & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \\ & u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \end{array}$$

vérifie les propriétés suivantes :

ϕ est bijective.
$\phi(\lambda u + v) = \lambda\phi(u) + \phi(v)$
$\phi(v\circ u) = \phi(v)\phi(u)$
$\phi(Id_E) = I_n$

On dit que ϕ est un isomorphisme d'algèbres (unitaires non commutatives non intègres) de $\big(L(E),+,.,\circ\big)$ sur $\big(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}),+,.,\times\big)$.

Enfin, ϕ induit un isomorphisme de groupes entre $(GL(E),\circ)$ et $(GL_n(\mathbf{K}),\times)$ (groupes non commutatifs).

f Matrice d'un vecteur dans une base

Si $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_p)$ est une base de E, si $x\in E$, et si la famille des composantes de x dans la base $\mathscr{B}$ est $(x_1,\dots,x_p)$, on définit la matrice colonne des composantes de x dans la base $\mathscr{B}$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

On la note parfois $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$. Autrement dit,

$$\left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \right] \Longleftrightarrow \left[x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \right]$$

g Calcul matriciel de l'image d'un vecteur

Reprenons deux $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, E et F. Et fixons $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
Soit enfin $u \in L(E, F)$.
Soit $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x))$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
Alors

$$\begin{aligned} u(x) &= u\left(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \left(x_j \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_i \right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j f_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j f_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} y_i f_i \end{aligned}$$

où , pour $i \in [\![1, n]\!]$,

$$y_i = \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$$

ce qui s'écrit matriciellement

$$Y = MX$$

C'est fondamental, puisque c'est ce qui permet d'utiliser les matrices pour le calcul des images des vecteurs par les applications linéaires. Il n'est pas inutile de savoir refaire le calcul ci-dessus, c'est un bon entraînement à la manipulation des sommes et des indices (rappelons qu'il n'y a aucun problème pour intervertir deux sommes finie, c'est seulement une question de commutativité).

On a donc les correspondances suivantes :

Langage vectoriel	**Traduction matricielle**
x, élément de E	$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, matrice colonne des composantes de x dans la base $\mathscr{B}$
u, application linéaire de E dans F	$M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, matrice de u relative aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$
$y = u(x)$, image de x par l'application u	$Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) = MX$

Les choses ne sont pas à sens unique : on traduit aussi bien en langage vectoriel des problèmes matriciels que l'inverse.

h Construction et lecture de matrices

Quelques petits exercices pour voir si on sait « lire » la matrice d'une application linéaire.

Exercice 1 Dans un exercice d'oral des Mines, on considère un endomorphisme u d'un expace vectoriel E de dimension $2n$, et on suppose que dans une certaine base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_{2n})$ de E la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ vérifie $a_{i,i} = \alpha_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,2n+1-i} = \beta_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et $a_{i,j} = 0$ sinon.
Trouver une base $\mathscr{B}'$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ soit « diagonale par blocs », de la

forme

$$\begin{pmatrix} \star & \star & & & & & & \\ \star & \star & & & & & & \\ & & \star & \star & & & & \\ & & \star & \star & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \star & \star \\ & & & & & & \star & \star \end{pmatrix}$$

Exercice 2 Soit E un espace de dimension n, F un sous-espace de E de dimension p (on suppose $1 \leq p \leq n$). On suppose que la base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est « adaptée » à F, c'est-à-dire que $(e_1, \ldots, e_p)$ est une base de F.
Si $u \in L(E)$, on dit que F est stable par u lorsque

$$\forall x \in F \qquad u(x) \in F$$

(ce qui revient à dire que $u(F) \subset F$). Comment la stabilité de F par u se traduit-elle sur la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$? Autrement dit, trouver une propriété de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ équivalente à « F stable par u ».

Rappelons à cette occasion que si $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E, il n'y a aucune raison en général pour qu'on puisse extraire de $\mathscr{B}$ une famille de p vecteurs qui soit une base de F.

Exercice 3 *Prolongement du précédent, il vaut mieux donc le traiter après.* Soit E un espace de dimension n, D une droite de E. On définit

$$X = \{u \in L(E)\ ;\ u(D) \subset D\}$$

(autrement dit, X est l'ensemble des endomorphismes de E qui laissent D stable). Montrer que X est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ et calculer $\dim(X)$.

Exercice 4 Soit E un $\mathbf{K}$-espace de dimension n, $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Trouver $n-1$ sous-espaces $F_1, \ldots, F_{n-1}$ de E tels que l'on ait l'équivalence suivante :

$$\forall u \in L(E) \qquad \Big[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in T_n^+(\mathbf{K})\Big] \iff \Big[\forall i \in [\![1, n-1]\!] \qquad u(F_i) \subset F_i\Big]$$

i Remarque sur les espaces de polynômes

Un des espaces vectoriels de dimension finie les plus couramment manipulés est $\mathbf{K}_n[X]$. Et on considère souvent sa base canonique $\mathscr{B} = (1, X, \ldots, X^n)$. Si $u \in L(\mathbf{K}_n[X])$, si $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbf{K}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors

$$\forall\, i \in [\![0, n]\!] \qquad u(X^i) = \sum$$

Il faut se méfier dans se cas de l'indexation : la j-ème colonne, c'est la colonne des composantes de $u(X^{\cdots})$ dans la base canonique...Pour ne pas se tromper, le plus sûr est de ne pas se précipiter tout de suite sur les indexations et de construire la matrice progressivement (écrire $u(1)$, $u(X)$, $u(X^2)$...).

Exercice (CCP) : Ecrire la matrice dans la base canonique de l'endomorphisme de $\mathbf{K}_n[X]$: $P \mapsto P - P'$.

Exercice (X Math 2 2008, extrait) : Pour tout entier $d > 0$ on désigne par E_d l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée, à coefficients complexes, de degré $\leq d$. On le munit de la base $(X^0 = 1, X, \ldots, X^d)$; on définit un endomorphisme T de E_d par

$$T(P)(X) = P(X+1) \qquad \text{pour tout } P \in E_d$$

1. Déterminer les coefficients $T_{k,n}$ de la matrice représentant T dans la base indiquée (ici $0 \leq k, n \leq d$).
2. Même question pour T^{-1} dont on démontrera l'existence.
3. Etant donné deux vecteurs lignes $(a_0, \ldots, a_d)$ et $(b_0, \ldots, b_d)$ satisfaisant $a_0 = b_0$ et, pour $n = 1, \ldots, d$,

$$a_n = \sum_{q=0}^{n} b_q \binom{n}{q}$$

   écrire les b_q en fonction des a_n.

On remarque que le terme de « vecteurs lignes » peut avantageusement être remplacé par celui de « vecteurs ».

II.2 Canonicité ; image, noyau d'une matrice

a Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Si on veut étudier matriciellement une application linéaire en dimension finie, on choisit une base au départ et une base à l'arrivée.
Inversement, si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, elle est la matrice d'une application linéaire. De beaucoup d'applications linéaires, même.
Mais l'une est plus naturelle que les autres :
Si on veut écrire $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$, il faut que $\mathscr{B}$ ait p vecteurs et que $\mathscr{C}$ ait n vecteurs.

Définition Munissons $E = \mathbf{K}^p$ et $F = \mathbf{K}^n$ de leurs bases canoniques, notées respectivement $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$. L'unique $u \in L(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est l'application linéaire canoniquement associée à A.

Cas d'une matrice carrée Souvent, A est une matrice carrée : $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Notons $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbf{K}^n$; l'unique $u \in L(\mathbf{K}^n)$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est l'endomorphisme canoniquement associée à A.

Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

l'application linéaire canoniquement associée à A est l'application $u \in L(\mathbf{K}^3, \mathbf{K}^2)$ définie par

$$u(x_1, x_2, x_3) = (\qquad\qquad\qquad , \qquad\qquad\qquad)$$

b Image et noyau d'une matrice

Première définition Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice, $u \in L(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ canoniquement associé. On appelle noyau et image de A le noyau et l'image de u.

c Noyau : deuxième définition

Précisons un peu ce qui précède. Notons donc

$$A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$$

L'application linéaire canoniquement associée est notée $u \in L(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$.
Notons $\mathscr{B} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ la base canonique de $\mathbf{K}^p$.
Soit $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbf{K}^p$. On a donc

$$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Alors

$$\begin{aligned} x \in \ker A &\Longleftrightarrow x \in \ker u \\ &\Longleftrightarrow u(x) = 0_{\mathbf{K}^q} \\ &\Longleftrightarrow AX = (0) \end{aligned}$$

(AX est la matrice colonne des composantes de $u(x)$ dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$).

Définition Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ une matrice; on définit

$$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \ ; \ AX = (0)\}$$

Pourquoi est-ce (très légèrement) différent de la définition précédente? parce qu'ici on considère la matrice A comme définissant une application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, pas de $\mathbf{K}^p$ dans $\mathbf{K}^n$. Par exemple, soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

L'application linéaire canoniquement associée est ici un endomorphisme : A est carrée. On peut l'expliciter. Notons-la u : $u \in L(\mathbf{R}^2)$ (en supposant $\mathbf{K} = \mathbf{R}$). Et, si $x = (x_1, x_2)$, $u(x) = (x_1 + 2x_2, -x_1 - 2x_2)$. Donc

$$(x_1, x_2) \in \mathrm{Ker}(A) \iff x_1 + 2x_2 = 0$$

On devrait donc définir

$$\mathrm{Ker}(A) = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \ ; \ x_1 + 2x_2 = 0\} = \mathrm{Vect}\,((2, -1))$$

Mais il est quand même plus simple de ne pas s'embêter avec u, et de directement résoudre $AX = (0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x_1 + 2x_2 = 0$$

et de définir

$$\mathrm{Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbf{R})\ ;\ x_1 + 2x_2 = 0 \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

d Image : deuxième définition

De même, SI $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, on pose

$$\mathrm{Im}(A) = \{AX\ ;\ X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})\}$$

en associant plutôt à A l'application linéaire $X \mapsto AX$, de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$ dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$. Cela revient à la même chose que la première définition, à condition de confondre un vecteur avec la colonne de ses composantes dans la base canonique.

Proposition Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $(C_1, \dots, C_p)$ la famille de ses vecteurs colonnes. Alors $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Démonstration 1 Si $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p)$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbf{K})$, alors $\big(A\epsilon_1), \dots, A\epsilon_p)\big)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. Or les $A\epsilon_k$ sont les C_k.

Démonstration 2 Notant $C_k = \begin{pmatrix} a_{1,k} \\ \vdots \\ a_{n,k} \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, on calcule :

$$AX = x_1 C_1 + \cdots + x_p C_p$$

Et donc $\{AX\ ;\ X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})\} = \mathrm{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

En reprenant la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ on obtient par exemple

$$\mathrm{Im} A = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

e Utilisation

Ce qui précède est censé nous faire gagner du temps lorsqu'il s'agit de traiter sous forme « géométrique » (i.e. avec des vecteurs, des sous-espaces et des applications linéaires, il n'y a pas forcément grand chose de proprement géométrique là-dedans). En effet, il n'y aura pas besoin de parler d'espaces vectoriels ni de bases, on sera directement à pied d'œuvre avec les applications linéaires. Or un des grands classiques de l'oral est de poser un énoncé sous forme matricielle pour voir si le candidat est capable de le traduire sous forme d'applications linéaires.

Reprenons, pour un exemple, le contexte de l'exercice du début du chapitre. Que cette fois on ne va pas traiter de manière numérique (matricielle) mais de manière géométrique (applications linéaires, endomorphismes ici).

Exercice Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit $\Phi_A \in L(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ par

$$\Phi_A \,:\, M \longmapsto AM$$

Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(\Phi_A)$, en déduire $\mathrm{rg}\,(\Phi_A)$.

Plus difficile... mais un peu dans le même genre, un classique de l'oral Centrale-Mines :
Exercice Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$, on définit $\Psi_A \in L(\mathcal{M}_n(\mathbf{K}))$ par

$$\Psi_A \,:\, M \longmapsto AMA$$

Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(\Psi_A)$ en fonction du rang de A, en déduire $\mathrm{rg}\,(\Psi_A)$.

f Enoncés X-ens

Dans les énoncés d'algèbre linéaire X-ens, on identifie presque systématiquement une matrice et application linéaire qui lui est canoniquement associée. On lira donc couramment Ax (ou $A(x)$, ou $A.x$) où A a été présentée comme élément de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ et x comme élément de $\mathbf{K}^n$. Normalement, avec ces notations, ce qui aurait un sens serait AX (où X est la matrice colonne des composantes de x dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$) ou $u(x)$ (où u est l'endomorphisme canoniquement associé à A). A l'usage, ce mélange $A \leftrightarrow u$ et $X \leftrightarrow x$ est bien commode, mais quand on débute en algèbre linéaire il ne faut pas trop en abuser.

g Conclusion

En tout cas, on évitera d'écrire des théorèmes du rang imaginaires : si $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$, alors

$$\mathrm{rg}(A) + \dim(\mathrm{Ker}(A)) =$$

II.3 Remarque fondamentale sur l'inversibilité des matrices

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. A priori, la multiplication des matrices n'étant pas commutative,

$$[A \in GL_n(\mathbf{K})] \iff [AB = BA = I_n]$$

Un résultat essentiel sur les matrices (dû au fait qu'en dimension finie, un endomorphisme est surjectif si et seulement si il est injectif) est que :

Proposition S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $AB = I_n$, alors $BA = I_n$, donc $A \in GL_n(\mathbf{K})$ et $A^{-1} = B$.
S'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que $BA = I_n$, alors $AB = I_n$, donc $A \in GL_n(\mathbf{K})$ et $A^{-1} = B$.

III Matrices remarquables

III.1 Matrices diagonales, triangulaires

Définitions Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

$[A \in \mathscr{D}_n(\mathbf{K})] \iff \left[(i \neq j) \Rightarrow a_{i,j} = 0\right]$

$\left[A \in T_n^+(\mathbf{K})\right] \iff \left[(i > j) \Rightarrow a_{i,j} = 0\right]$

$\left[A \in T_n^-(\mathbf{K})\right] \iff \left[(i < j) \Rightarrow a_{i,j} = 0\right]$

Structure $\mathscr{D}_n(\mathbf{K})$, $T_n^+(\mathbf{K})$ et $T_n^-(\mathbf{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, stables par $\times$ et contenant I_n, ce qui en fait aussi des sous-anneaux, on résume tout cela en disant que ce sont des sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Dimension $\dim(\mathscr{D}_n(\mathbf{K})) =$

$\dim\left(T_n^+(\mathbf{K})\right) =$

$\dim\left(T_n^-(\mathbf{K})\right) =$

Exercice Soit $A \in T_n^+(\mathbf{K}) \cap GL_n(\mathbf{K})$. Montrer que

$$M \longmapsto AM$$

définit un endomorphisme injectif de $T_n^+(\mathbf{K})$. En déduire que $A^{-1} \in T_n^+(\mathbf{K})$.

Cet exercice n'utilise que la structure d'algèbre, et le résultat reste donc valable si on remplace $T_n^+(\mathbf{K})$ par $T_n^-(\mathbf{K})$, $\mathscr{D}_n(\mathbf{K})$ ou toute autre sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

III.2 Transposition ; matrices symétriques, antisymétriques

a Définition

La transposée d'une matrice est la matrice dont la famille des vecteurs lignes est celle des vecteurs colonnes de la matrice de départ (et vice-versa).
Si $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $A^T = {}^tA$ est définie par

$$A^T = \left(b_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K}) \quad \text{où } \forall (i,j) \quad b_{i,j} = a_{j,i}$$

Il ne faut pas écrire

$$A^T = \left(a_{j,i}\right)_{\substack{1\leq i\leq p\\1\leq j\leq n}}$$

(risque de confusion entre l'indice de ligne et l'indice de colonne).

b Propriétés

Facilement, on montre les propriétés
${}^t({}^tA) = A$
${}^t(\lambda A + \mu B) = \lambda {}^tA + \mu {}^tB$
que l'on peut résumer en

Proposition La transposition est un isomorphisme de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ sur $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbf{K})$, d'isomorphisme réciproque la transposition…mais pas la même (du moins si $p \neq q$) !

Proposition La transposition est un automorphisme involutif de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$.

Remarquons que la transposition est aussi un isomorphisme de $T_n^+(\mathbf{K})$ sur $T_n^-(\mathbf{K})$.

Transposée d'un produit

${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$.

L'inverse de la tansposée…

…est la transposée de l'inverse. Plus exactement, Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$,

$$(A \in GL_n(\mathbf{K})) \iff \left(A^T \in GL_n(\mathbf{K})\right)$$

et, le cas échéant,

$${}^t(A^{-1}) = ({}^tA)^{-1}$$

c Matrices symétriques et antisymétriques

Une matrice A est dite **symétrique** lorsque ${}^tA = A$, **antisymétrique** lorsque ${}^tA = -A$. Les sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$ (respectivement des matrices symétriques et antisymétriques) sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Ils sont de dimensions respectives
et on s'en occupera, dans le cas $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, lors du chapitre sur les espaces euclidiens.

Exercice : On a vu, dans Al1, que si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, si $u \in L(E)$ vérifie $u^2 = \mathrm{Id}_E$, alors u est une symétrie vectorielle, par rapport à $F = \{x \in E\ ;\ u(x) =$ $\}$ et parallèlement à $G = \{x \in E\ ;\ u(x) =$ $\}$. Et en particulier, F et G sont supplémentaires.
En déduire une démonstration élégante (mais superflue) de

$$\mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$$

IV Matrices de passage, changements de base

IV.1 Matrice d'une famille dans une base

a Définition

Soit $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs d'un espace de dimension finie E, lequel est muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. On définit la matrice de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ dans la base $\mathscr{B}$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p)$ est la matrice dont la colonne j est constituée des composantes de x_j dans la base $\mathscr{B}$. Plus clairement, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_p)$, alors, pour tout $j \in \{1, \dots, p\}$,

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$$

$$\begin{array}{cl}
\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \longleftarrow \text{composante sur } e_1 \\ \longleftarrow \text{composante sur } e_2 \\ \\ \longleftarrow \text{composante sur } e_n \end{array} \\
\begin{array}{ccccc} \uparrow & \quad & \uparrow & \quad & \quad \\ x_1 & & x_j & & \end{array} &
\end{array}$$

Ainsi, la matrice dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$ de la famille $((1,1,1),(2,-1,1))$ est

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b Lien avec la matrice d'une application linéaire

La matrice d'une application linéaire relative à deux bases est la matrice dans la base d'arrivée de la famille des images des vecteurs de la base de départ : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ est une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une base de F, alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{(f_1,\dots,f_n)}\big(u(e_1), \dots, u(e_p)\big)$$

IV.2 Matrice de passage

Si B et B' sont deux bases de E,

$$P_B^{B'} = \mathrm{Mat}_B(B')$$

est appelée matrice de passage de la base B à la base B' (il n'y a plus de notation au programme pour les matrices de passage. La notation $P_B^{B'}$ est commode pour le cours. Dans les exercices et problèmes, on écrit « on note P la matrice de passage de ... à ... ») .
Pour certaines propriétés, il peut parfois être utile de constater que

$$\mathrm{Mat}_B(B') = \mathrm{Mat}_{B',B}(Id_E)$$

(on considère la matrice de l'endomorphisme Id_E non pas relativement à une base unique, comme c'est l'usage, mais en prenant une base différente pour E considéré comme espace de départ et pour E considéré comme espace d'arrivée). Comme c'est à peu près le seul contexte dans lequel on considère un endomorphisme avec une base différente au départ et à l'arrivée, c'est un peu artificiel et déroutant. Et ce n'est pas vraiment important.

IV.3 Formules de changement de base

a Anciennes composantes à l'aide des nouvelles

On considère deux bases B et B' d'un espace vectoriel E. Soit $x \in E$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$. Alors

$$X = P_B^{B'} X'$$

ou encore, de manière plus explicite :

$$\mathrm{Mat}_B(x) = P_B^{B'}\mathrm{Mat}_{B'}(x) = \mathrm{Mat}_B(B')\mathrm{Mat}_{B'}(x)$$

(l'allure « relation de Chasles » de cette dernière égalité permet d'éviter les erreurs. Il vaut d'ailleurs mieux les éviter, cette relation est importante).

b Relations entre matrices de passage

De la confrontation des deux formules

$$\mathrm{Mat}_B(x) = P_B^{B''}\mathrm{Mat}_{B''}(x)$$

et

$$\begin{aligned}\mathrm{Mat}_B(x) &= P_B^{B'}\mathrm{Mat}_{B'}(x)\\ &= P_B^{B'}P_{B'}^{B''}\mathrm{Mat}_{B''}(x)\end{aligned}$$

on déduit avec précautions (mais c'est surtout le résultat qui compte) :

$$P_B^{B''} = P_B^{B'}P_{B'}^{B''}$$

qui est encore assez facile à mémoriser sans erreur !
[Pourquoi avec précaution ? parce que quand on a obtenu

$$P_B^{B''}\mathrm{Mat}_{B''}(x) = P_B^{B'}P_{B'}^{B''}\mathrm{Mat}_{B''}(x) \tag{1}$$

il est assez léger de « simplifier par $\mathrm{Mat}_{B''}(x)$ ». Mais quand même, voyons comment on peut conclure rigoureusement : comme la formule (1) est vraie pour tout $x \in E$, elle est de la forme

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \qquad MX = M'X \tag{2}$$

où M et M' sont deux matrices carrées. Qui peut encore être écrite

$$\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K}) \qquad M''X = (0) \tag{3}$$

avec $M'' = M - M'$. Reste à déduire de (3) que $M'' = (0)$ (rappelons que M'' est une matrice carrée). On peut le faire numériquement, en appliquant (3) à chaque

$$X = E_i = \begin{pmatrix} 0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

(le 1 étant en $i$ème position) ce qui donne que la colonne i de M'' est nulle, et ce pour tout i.
On peut aussi le faire vectoriellement, en notant u l'endomorphisme canoniquement associé à M'', car (3) donne directement $\forall x \in \mathbf{K}^n \quad u(x) = 0$, donc $u = \Theta$, donc $M'' = (0)$.]

En prenant dans ce qui précède le cas particulier $\mathscr{B}'' = \mathscr{B}$, on déduit que toute matrice de passage est inversible, et que

$$P_{B'}^{B} = \left(P_{B}^{B'}\right)^{-1}$$

c Changement de bases pour une application linéaire

Formule Soit u est une application linéaire définie sur un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie E muni de deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ à valeurs dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie F muni de deux bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$:

$$\underset{\mathscr{B},\mathscr{B}'}{E} \xrightarrow{\quad u \quad} \underset{\mathscr{C},\mathscr{C}'}{F}$$

On note $P = P_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}'}$, $Q = P_{\mathscr{C}}^{\mathscr{C}'}$, en notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$, on a :

$$M' = Q^{-1}MP$$

Démonstration Il suffit de réécrire les formules obtenues jusqu'à présent. On considère un $x \in E$ quelconque, et on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$, $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u(x))$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u(x))$. Alors on a, en vrac,

$$X = PX' \qquad Y = QY' \qquad Y = MX \qquad Y' = M'X'$$

et comme tout ceci est valable pour tout colonne X', on doit bien pouvoir conclure…

d Changement de bases pour un endomorphisme

Dans le cas particulier (mais c'est celui qu'on utilise tout le temps) où u est un endomorphisme, c'est-à-dire $E = F$, $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, $\mathscr{B}' = \mathscr{C}'$, donc $P = Q$, avec $M = \mathscr{M}_B(u)$ et $M' = \mathscr{M}_{B'}(u)$, on obtient :

$$M' = P^{-1}MP$$

que l'on utilisera en général sous la forme

$$M = PM'P^{-1}$$

V Opérations élémentaires sur lignes et colonnes

V.1 Définition des opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes sont :
• l'addition à une ligne du produit d'une autre par un scalaire ($L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$)
• la permutation de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$)
• la multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ($L_i \leftrightarrow \lambda L_i$, avec $\lambda \neq 0$).

On définit des opérations analogues sur les colonnes. On peut aussi remarquer qu'opérer sur les colonnes d'une matrice, c'est opérer sur les lignes de sa transposée (et réciproquement).

V.2 Interprétation en termes de produits matriciels

Bien que l'interprétation des opérations élémentaires sous forme de produits matriciels ne soit pas souvent évaluée aux concours, il vaut mieux avoir quelques idées nettes sur la question, qui se retrouveront assez facilement à partir du préliminaire fondamental suivant :

a Calcul préliminaire

On désigne par n et p deux entiers naturels non nuls.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $E_{r,s} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ élémentaire (i.e. la matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient (r,s), égal à 1). Décrire $E_{r,s}A$ (on suppose implicitement que $1 \leq r,s \leq n$).
2. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Soit $E_{r,s} \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ (comme précédemment mais cette fois carrée d'ordre p). Décrire $AE_{r,s}$.

(On pourrait juger préférable de noter les matrices $E_{r,s}$ rencontrées dans les deux questions précédentes $E_{r,s}^{(n)}$ et $E_{r,s}^{(p)}$ respectivement, car elles ne sont pas de même format, mais cette notation plus explicite a l'inconvénient d'être assez lourde).

b Matrices de transvections

Ici encore A désigne une matrice quelconque de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Et λ un élément de $\mathbf{K}$.

1. En utilisant le calcul préliminaire, définir une matrice $T_{r,s}(\lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que la matrice $T_{r,s}(\lambda)\ A$ s'obtienne à partir de A en ajoutant à la ligne r de A λ fois la ligne s de A ($1 \leq r \leq n$, $1 \leq s \leq n$, $r \neq s$).
2. Définir une matrice $T_{r,s}(\lambda) \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ telle que la matrice $AT_{r,s}(\lambda)$ s'obtienne à partir de A en ajoutant à la colonne r de A λ fois la colonne s de A ($1 \leq r \leq n$, $1 \leq s \leq n$, $r \neq s$).

L'appellation « matrice de transvection » n'est pas à connaître.

c Matrices de permutation

On désigne par A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

1. En utilisant le calcul préliminaire, définir une matrice $P_{r,s} \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$ telle que la matrice $P_{r,s}\ A$ s'obtienne à partir de A en permutant les lignes r et s de A ($1 \leq r \leq n$, $1 \leq s \leq n$, $r \neq s$).
2. Définir une matrice $P_{r,s} \in \mathscr{M}_p(\mathbf{K})$ telle que la matrice $A\ P_{r,s}$ s'obtienne à partir de A en permutant les colonnes r et s de A ($1 \leq r \leq p$, $1 \leq s \leq p$, $r \neq s$).

Remarque : On devrait appeler ces matrices $P_{r,s}$ « matrices de transposition ».

d Matrices de dilatation

(Encore un terme hors programme).
On désigne par A une matrice quelconque de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$. Et par λ un élément de $\mathbf{K} \setminus \{0\}$.

1. Définir une matrice $D_r(\lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ telle que la matrice $D_r(\lambda)\ A$ s'obtienne à partir de A en multipliant par λ la ligne r de A ($1 \leq r \leq n$).
2. Définir une matrice $D_r(\lambda) \in \mathcal{M}_p(\mathbf{K})$ telle que la matrice $A\ D_r(\lambda)$ s'obtienne à partir de A en multipliant par λ la colonne r de A ($1 \leq r \leq n$).

e Inverses

Une petite astuce élégante permet de montrer sans calcul que toutes les matrices introduites précédemment (pas les $E_{r,s}$ quand même) sont inversibles, et de calculer leurs inverses.

1. On reprend les notations précédentes. Que vaut

$$T_{r,s}(-\lambda)\,T_{r,s}(\lambda)\,A \qquad ?$$

   (sans calcul !). En déduire que $T_{r,s}(\lambda)$ est inversible, et écrire son inverse.
2. Déterminer de même $P_{r,s}^{-1}$.
3. On considère $u_{r,s}$ l'endomorphisme canoniquement associé à $P_{r,s}$ (considérée comme carrée d'ordre n par exemple). Si $(\epsilon_1, \ldots \epsilon_n)$ est la base canonique de $\mathbf{K}^n$, calculer $u_{r,s}(\epsilon_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et utiliser ce résultat pour retrouver l'inverse de $P_{r,s}$.

V.3 Utilisation

a Très utile

• Les opérations élémentaires permettent d'étudier le rang d'une matrice, car elles ne le modifient pas (voir plus loin).
• Les opérations élémentaires servent dans le calcul des déterminants : voir chapitre sur les déterminants.

b Utile

Les opérations élémentaires sont utilisées dans la résolution des systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss.

c Intéressant mais anecdotique

Proposition Les opérations élémentaires sur les colonnes ne changent pas l'image d'une matrice.

Ce résultat, au programme de mpsi, ne sert jamais, mais sa démonstration est intéressante ! elle repose en effet sur la définition de l'image d'une matrice à partir de l'application linéaire canoniquement associée, sur l'interprétation des opérations élémentaires sur les colonnes comme multiplication à droite par une matrice inversible, et enfin sur le résultat suivant :
Si v est un automorphisme, si u est une application linéaire

$$\mathrm{Im}(u \circ v) = \mathrm{Im}(u)$$

Proposition Les opérations élémentaires sur les lignes ne changent pas...
.

d Intéressant, mais...

...on ne le demande jamais aux concours :
Les opérations élémentaires permettent d'étudier l'inversibilité d'une matrice et de calculer son inverse. Par exemple, on peut calculer l'inverse de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'idée : on fait des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes de la matrice M pour aboutir à I_n. Si ce n'est pas possible (si on est bloqué), M n'est pas inversible.
La chose importante : il faut choisir et ne faire que des opérations sur les lignes ou que des opérations sur les colonnes. Si on arrive à I_n par opérations sur les

lignes, il existe une suite de matrices de type transvections, dilatations, permutations $A_1, \dots, A_q$ telles que

$$A_q \dots A_1 M = I_n$$

ce qui signifie que

$$M^{-1} = A_q \dots A_1$$

Si on arrive à I_n par opérations sur les colonnes, il existe une suite de matrices de type transvections, dilatations, permutations $B_1, \dots, B_p$ telles que

$$MB_1 \dots B_p = I_n$$

ce qui signifie que

$$M^{-1} = B_1 \dots B_p$$

Dans les deux cas, inutile d'écrire les matrices en question : il suffit de remarquer que la même suite d'opérations sur les lignes (respectivement les colonnes) qui a mené de M à I_n mène de I_n à M^{-1}.

VI Rang

VI.1 Définitions

a Rang d'une application linéaire

Le rang de u est, quand elle est finie, la dimension de $\mathrm{Im}(u)$.

b Théorème du rang

Si $u \in L(E,F)$, si $\dim E < +\infty$, alors u est de rang fini, et

$$\mathrm{rg}\, u = \dim E \; - \; \dim(\mathrm{Ker}\, u)$$

c Rang d'une famille de vecteurs

On appelle rang d'une famille de vecteurs la dimension du sous-espace vectoriel engendré par ces vecteurs (si celle-ci est finie) :

$$\mathrm{rg}\left((x_i)_{i\in I}\right) = \dim\left(\mathrm{Vect}\left((x_i)_{i\in I}\right)\right)$$

d Lien

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, E étant un espace de dimension finie. Si $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base de E, alors $(u(e_1),\ldots,u(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(u)$, donc

$$\mathrm{rg}\, u = \mathrm{rg}\left(u(e_1),\ldots,u(e_n)\right)$$

e Rang d'une matrice

On définit le rang d'une matrice comme celui de la famille de ses vecteurs colonnes, donc celui de l'application linéaire qui lui est canoniquement associée (en effet, l'image d'une matrice est engendrée par la famille de ses vecteurs colonnes).

Définition Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, soit $(c_1,\ldots,c_p)$ la famille de ses vecteurs colonnes (ce sont des éléments de $\mathbf{K}^n$, ou de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{K})$, si on veut). Alors on définit

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(c_1,\ldots,c_p)$$

Pourquoi les colonnes et pas les lignes? en fait, c'est la même chose, mais ce n'est pas tout-à-fait évident, donc patience.

f Lien

Proposition Le rang d'une application linéaire est celui de sa matrice (relative à n'importe quel choix de bases).

Démonstration (pas fondamentale, c'est le résultat qui compte) On considère $u \in L(E,F)$ où E et F sont deux espaces vectoriels de dimensions finies p et n respectivement. Soit $\mathscr{B} = (e_1,\ldots,e_p)$ une base de E, $\mathscr{C} = (f_1,\ldots,f_n)$ une base de F. Soit enfin $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
Si ϕ est l'unique application linéaire de F dans $\mathbf{K}^n$ qui transforme $\mathscr{C}$ en la base canonique $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)$ de $\mathbf{K}^n$, on peut calculer, pour tout j,

$$\begin{aligned}(\phi\circ u)(e_j) &= \phi\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} f_j\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\phi(f_j)\\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\epsilon_j\\ &= c_j\end{aligned}$$

où c_j est le $j$ème vecteur colonne de A. Mais alors :

$$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(c_1,\ldots,c_p) = \mathrm{rg}(\phi\circ u)$$

Or ϕ est un isomorphisme (il transforme base en base), donc $\mathrm{rg}(\phi\circ u) = \mathrm{rg}(u)$, ce qui conclut.

VI.2 Stabilité

Proposition Si $P \in GL_p(K)$, $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ et $Q \in GL_q(K)$, alors

$$\mathrm{rg}(PAQ) = \mathrm{rg}(A)$$

Démonstration Soit u, v, w respectivement dans $L(\mathbf{K}^p)$, $L(\mathbf{K}^q,\mathbf{K}^p)$, $L(\mathbf{K}^q)$ canoniquement associés à P, A, Q respectivement. Alors $u\circ v\circ w$ est canoniquement associé à PAQ. Il s'agit de montrer que

$$\mathrm{rg}(u\circ v\circ w) = \mathrm{rg}(v)$$

mais c'est déjà fait, car u et w sont des isomorphismes.

VI.3 Caractérisation

Proposition Une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de rang r si et seulement si il existe deux matrices inversibles (et donc carrées) U et V telles que

$$A = U J_r^{(n,p)} V$$

où $J_r^{(n,p)}$ est la matrice canonique de rang r à n lignes et p colonnes, souvent notée simplement J_r quand le format est fixé par le contexte :

$$J_r = (\alpha_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \text{ où } \alpha_{i,j} = 1 \text{ si } i = j \le r, 0 \text{ sinon.}$$

$$J_r^{(n,p)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow r \\ \\ \\ \end{array} \updownarrow n \text{ lignes} \\ \uparrow \\ r \\ \longleftrightarrow \\ p \text{ colonnes} \end{array}$$

(si $r = 0$, J_0 est la matrice nulle). Cette matrice gagne à être écrite par blocs, surtout si elle est carrée :

$$J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & (0) \\ \hline (0) & (0) \end{array}\right)$$

Utilisation Lorsque dans un énoncé le rang de la matrice est sa propriété essentielle, il faut penser à ce résultat.

Remarque Nécessairement, ci-dessus, $U \in GL_n(\mathbf{K})$ et $V \in GL_p(\mathbf{K})$. Carrées et inversibles, U et V doivent en effet être de formats convenables pour que le produit $U J_r V$ ait un sens.

Corollaire Une matrice et sa transposée ont même rang, donc la famille des vecteurs lignes d'une matrice a même rang que celle des vecteurs colonnes.

La proposition peut se démontrer par deux moyens très différents et tous deux intéressants. On n'interrogera guère aux concours sur ces preuves, mais les comprendre et les assimiler n'est pas du temps perdu.

Démonstration 1 (vectorielle) : Soit $u \in L(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$ canoniquement associée à A. Essayons de trouver une base $\mathscr{B}$ de $\mathbf{K}^p$ et une base $\mathscr{C}$ de $\mathbf{K}^n$ telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_r$$

Une bonne lecture de la matrice guide alors ce qui suit. Le principal outil est le théorème d'isomorphisme.
On considère un supplémentaire G de $\mathrm{Ker}\, u$ dans $\mathbf{K}^p$, et une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_p)$ adaptée à

$$G \oplus \mathrm{Ker}\, u = \mathbf{K}^p$$

(c'est-à-dire $\quad \mathscr{B} = (\underbrace{e_1, \dots, e_r}_{\text{base de } G}, \underbrace{e_{r+1}, \dots, e_n}_{\text{base de Ker}\, u}) \quad$)

Le théorème d'isomorphisme dit que $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$, donc une famille libre qu'il est possible de compléter en une base
$\mathscr{C} = \big(u(e_1), \dots, u(e_r), f_{r+1}, \dots, f_n\big)$ de $\mathbf{K}^n$. Et on a bien ce qu'on voulait :

$$\mathrm{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = J_r$$

ce qui, avec la formule de changement de base, permet de conclure.

Démonstration 2 (matricielle) : L'interprétation des opérations élémentaires en termes de produits à droite ou à gauche par des matrices inversibles montre qu'il suffit de trouver une suite de telles opérations qui fasse passer de la matrice A à la matrice J_r (ou réciproquement, mais c'est moins naturel !).
Si $A = (0)$, il n'y a rien à faire.
Sinon, en permutant deux lignes et/ou deux colonnes, on trouve une matrice $P_1 A Q_1$ dont le coefficient $(1, 1)$ est non nul.

En multipliant par une matrice $D_1(\lambda)$ à gauche ou à droite, on trouve une matrice P_2AQ_2 dont le coefficient $(1,1)$ est égal à 1.
En multipliant par des matrices $T_{r,1}(\lambda_r)$ $(2 \leq r \leq p)$ convenables à gauche (pour annuler les autres coefficients de la première colonne), puis par des matrices $T_{1,s}(\mu_s)$ $(2 \leq s \leq n)$ à droite (pour annuler les autres coefficients de la première ligne), on trouve une matrice P_3AQ_3 dont les coefficients $(1,j)$ et $(i,1)$ sont tous nuls sauf le coefficient $(1,1)$, égal à 1.
Il s'agit maintenant de travailler sur les colonnes 2 à p et les lignes 2 à n, ce qui ne modifiera pas le travail déjà effectué. On obtient donc une démonstration par récurrence et un algorithme.

Démonstration du corollaire : Si

$$A = UJ_r^{(p,q)}V$$

alors

$$A^T = V^T \left(J_r^{(p,q)}\right)^T U^T$$

et il suffit de remarquer (outre le fait que la transposée d'une matrice inversible est inversible) que

$$\left(J_r^{(p,q)}\right)^T =$$

Exercice (exemple d'utilisation de la matrice J_r) : Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, on définit $\Psi_A \in L(\mathscr{M}_n(\mathbf{K}))$ par

$$\Psi_A : M \longmapsto AMA$$

Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(\Psi_A)$ en fonction de $r = \mathrm{rg}(A)$.

(Cet exercice a été étudié vectoriellement, il s'agit de le faire numériquement).

VI.4 Rang et matrices carrées extraites

Un résultat souvent assez mal connu, mais il est au programme et c'est, avec la continuité du déterminant, ce qui permet de dire que l'ensemble des matrices de rang $\geq m$ est ouvert.

Proposition : Le rang d'une matrice A est la dimension maximale d'une matrice carrée inversible extraite de A.

Définition : On appelle matrice extraite de $A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ toute matrice $\left(a_{i,j}\right)_{i\in I,\ j\in J}$ où $I \subset [\![1,n]\!]$ et $J \subset [\![1,p]\!]$. Cette matrice extraite est carrée lorsque $|I| = |J|$ (attention : on n'impose pas du tout $I = J$).

Proposition : $\mathrm{rg}(A) = r$ si et seulement si : il existe une matrice $\left(a_{i,j}\right)_{(i,j)\in I\times J}$ inversible extraite de A avec $|I| = |J| = r$ et il n'existe aucune matrice $\left(a_{i,j}\right)_{i\in I,\ j\in J}$ inversible extraite de A avec $|I| = |J| > r$.

$$A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{1} & 2 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ \boxed{2} & \boxed{0} & 2 & \boxed{1} & 3 \\ \boxed{3} & \boxed{1} & 4 & \boxed{0} & 2 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \leftarrow i_1 \\ \\ \\ \leftarrow i_2 \\ \leftarrow i_3 \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ j_1 & j_2 & & j_3 & \end{array} & \end{array}$$

Par exemple, pour la matrice ci-dessus, A est de rang 3, $I = \{i_1, i_2, i_3\} = \{1,4,5\}$ et $J = \{j_1, j_2, j_3\} = \{1,2,4\}$ conviennent. Ce n'est pas le seul choix possible. Toutes les matrices carrées extraites de format 4×4 ou 5×5 sont non inversibles.
Remarque : A est de format rectangulaire quelconque, mais une matrice carrée extraite doit bien sûr pour être inversible être carrée.

[Démonstration] Si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de rang r, montrons qu'on peut en extraire une matrice carrée inversible $r\times r$.
On note comme d'habitude $(c_1,\ldots,c_p)$ la famille des vecteurs colonnes de A. Alors

$$\mathrm{rg}(c_1,\ldots,c_p) = r$$

et donc, par théorème, il existe une partie $J \subset [\![1,p]\!]$ telle que la famille $(c_j)_{j\in J}$ soit une base de $\mathrm{Vect}(c_1,\dots,c_p)$. Et en particulier, $|J| = r$. La matrice

$$A_1 = \left(a_{i,j}\right)_{1\le i\le n,\ j\in J}$$

est de rang r car le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs colonnes.
On note $(\ell_1,\dots,\ell_n)$ la famille des vecteurs lignes de A_1. Elle est de rang r, et donc, par théorème, il existe une partie $I \subset [\![1,n]\!]$ telle que la famille $(\ell_i)_{j\in I}$ soit une base de $\mathrm{Vect}(\ell_1,\dots,\ell_n)$. Et en particulier, $|I| = r$. La matrice

$$A_2 = \left(a_{i,j}\right)_{i\in I,\ j\in J}$$

est carrée, de rang r, à r lignes et r colonnes, extraite de A, c'est donc terminé.
Montrons maintenant que si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ est de rang r, on ne peut pas en extraire une matrice carrée inversible $m\times m$ avec $m > r$. Soit $B = \left(a_{i,j}\right)_{i\in I,\ j\in J}$ avec $|I| = |J| = m$. Notons $(c_1,\dots,c_p)$ la famille des vecteurs colonnes de A (on pourrait aussi travailler sur les lignes, cela reviendrait au même). Comme $m > r$, on sait que la famille $(c_j)_{j\in J}$ est liée. Il existe donc une famille $\left(\lambda_j\right)_{j\in J}$ d'éléments de $\mathbf{K}$ non tous nuls et tels que

$$\sum_{j\in J} \lambda_j c_j = 0_{\mathbf{K}^n}$$

Ce qui peut se détailler en disant que toutes les composantes de ce vecteur sont nulles :

$$\forall i \in [\![1,n]\!] \qquad \sum_{j\in J} \lambda_j a_{i,j} = 0$$

En particulier,

$$\forall i \in [\![I]\!] \qquad \sum_{j\in J} \lambda_j a_{i,j} = 0$$

ce qui exprime que la famille des vecteurs colonnes de B est liée, cette matrice n'est donc pas inversible.

VI.5 Un exercice classique sur le rang

Très classique même ; est posé parfois à l'oral des Mines.
Exercice : Montrer, si $(A,B) \in \left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})\right)^2$, que

$$\operatorname{rg}(A+B) \leq \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(B)$$

Exercice : Montrer, si $(A,B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K}) \times \mathscr{M}_{p,n}(\mathbf{K})$, que

$$\operatorname{rg}(AB) \leq \min\left(\operatorname{rg}(A), \operatorname{rg}(B)\right)$$

VII Matrices équivalentes

Cette notion est principalement introduite pour semer la confusion avec la notion de matrices semblables. On ne s'en sert jamais, de toute façon.

Définition On dira que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes lorsqu'il existe deux matrices carrées inversibles U et V telles que

$$B = UAV$$

($U \in GL_n(\mathbf{K})$ et $V \in GL_p(\mathbf{K})$).

Proposition La relation « est équivalente à » ainsi définie est une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$.

Caractérisation Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Ce résultat permet de compter les classes d'équivalence pour la relation d'équivalence des matrices sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{K})$: il y en a

VIII Trace

Définition La trace d'une matrice carrée est la somme de ses coefficients diagonaux :

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

Proposition L'application trace est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$:

$$\operatorname{tr}(\lambda A + B) = \lambda \operatorname{tr} A \ + \ \operatorname{tr} B$$

Proposition Soit A, B deux matrices telles que AB et BA soient carrées (i.e. $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbf{K})$; alors $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Définition Deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ (carrées, donc) sont dites semblables lorsqu'il existe $P \in GL_n\mathbf{K}$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

A et B sont donc semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases.

Proposition Deux matrices semblables ont même trace.

Définition Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E. La trace de la matrice de u dans une base de E ne dépend pas du choix de cette base. On l'appelle trace de l'endomorphisme u.

Proposition L'application $u \mapsto \operatorname{tr} u$ est une forme linéaire sur $L(E)$, vérifiant, pour tous u et v de E : $\operatorname{tr}(u \circ v) = \operatorname{tr}(v \circ u)$.

Proposition La trace d'un projecteur est égale à son rang.

Ce résultat un peu anecdotique est indispensable pour résoudre de petits exercices d'oral.

IX Matrices semblables, matrices équivalentes

IX.1 Rappel des définitions

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbf{K})$ sont équivalentes lorsqu'il existe $P \in GL_p(\mathbf{K})$ et $Q \in GL_q(\mathbf{K})$ telles que

$$B = PAQ$$

On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbf{K})$ sont **semblables** lorsqu'il existe $P \in GL_n(\mathbf{K})$ telle que

$$B = P^{-1}AP$$

a Lien entre similitude et équivalence

Deux matrices carrées semblables sont, a fortiori, équivalentes.
Deux matrices non carrées (mais de même format) peuvent être équivalentes, en revanche se demander si elles sont semblables n'a pas de sens.

b Critères ?

Il est facile de voir si deux matrices sont équivalentes : ceci équivaut à dire qu'elles ont même rang. Elles sont alors équivalentes à la même matrice canonique J_r.
Il n'est pas du tout facile de voir si deux matrices carrées sont semblables. Avoir même rang, mais aussi même déterminant, même trace. . .est nécessaire mais ne suffit pas. Avoir même polynôme caractéristique (voir plus loin) ne suffit pas non plus.
Deux matrices A et B sont semblables si et seulement si il existe un endomorphisme u et deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ telles que $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B}}(u)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathscr{B}'}(u)$.
Deux matrices A et B sont équivalentes si et seulement si il existe une application linéaire u, deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de l'espace de départ, deux bases $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de l'espace d'arrivée telles que $A = \mathcal{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $B = \mathcal{M}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$.

c Principale différence

La principale différence, c'est que l'équivalence des matrices ne sert à rien, alors qu'on utilisera beaucoup les matrices semblables.

X Survol des système d'équations linéaires

X.1 Ecritures matricielle et vectorielle

Un système linéaire de n équations à p inconnues s'écrit, sous forme matricielle

$$AX = B$$

où A est une matrice à n lignes et p colonnes; il s'interprète donc comme l'équation linéaire

$$u(x) = b$$

où u est l'application linéaire canoniquement associée à A ($u \in \mathscr{L}(\mathbf{K}^p, \mathbf{K}^n)$) et b est l'élément de $\mathbf{K}^n$ dont la matrice colonne des composantes dans la base canonique de $\mathbf{K}^n$ est B (l'inconnue x étant dans $\mathbf{K}^p$).

X.2 Système homogène associé

Le système homogène associé est le système $AX = 0$, qui s'écrit vectoriellement $u(x) = 0$. L'ensemble de ses solutions est un s.e.v de dimension $p - rg(A)$, où $rg(A) = rg(u)$ est par définition le rang du système.

X.3 Structure de l'ensemble des solutions

S'il y a au moins une solution, le système est dit compatible; l'espace des solutions est un sous-espace affine de direction le s.e.v. des solutions du système homogène. L'ensemble des solutions s'obtient donc en ajoutant à une solution quelconque du système l'ensemble des solutions du système homogène.
En effet, si X_0 est une solution (pour écrire les choses matriciellement) :

$$\begin{aligned} AX = B &\Longleftrightarrow AX = AX_0 \\ &\Longleftrightarrow A(X - X_0) = (0) \\ &\Longleftrightarrow X - X_0 \in S_H \end{aligned}$$

où S_H est l'ensemble des solutions de H, et donc est un espace vectoriel.

Il peut n'y avoir aucune solution : le système est dit incompatible.

Si $p = n = rg(A)$, le système est dit Cramer ; il y a une solution unique, $X = A^{-1}B$. Elle se détermine par exemple en utilisant un pivot de Gauss.

Table des matières