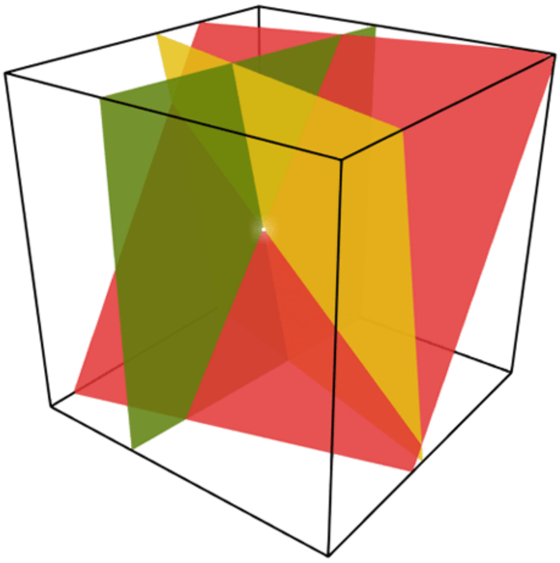
Al1 : Espaces vectoriels, applications linéaires



Le « partage de secret » de Shamir utilise les polynômes de Lagrange

Dans tout ce chapitre, **K** *est un corps commutatif. Dans l'immense majorité des problèmes et exercices,* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *ou* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$*. Mais il y a beaucoup de corps commutatifs, et la théorie des espaces vectoriels est valable sur n'importe quel corps.*

I Définition, principaux espaces vectoriels

I.1 Définition

Lorsque, sur un ensemble E, on a défini une loi interne + telle que $(E,+)$ soit un groupe commutatif, et une « loi externe »

$$\begin{array}{cccc} . : & \mathbf{K}\times E & \longrightarrow & E \\ & (\lambda, x) & \longmapsto & \lambda.x \end{array}$$

(où **K** est un corps commutatif) vérifiant les propriétés suivantes, pour tous x et y dans E et λ et μ dans **K** :
(i) $1.x = x$
(ii) $(\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
(iii) $\lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
(iv) $\lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$,

on dit que $(E,+,.)$ est un **K**-espace vectoriel.

Remarquons que l'habitude de travailler dans les espaces vectoriels, et le modèle des vecteurs géométriques, rendent les propriétés des lois assez faciles à retenir et à utiliser. Par exemple,

$$[\lambda.x = 0_E] \iff [\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E]$$

s'utilise sans y penser (ce n'est pas de l'intégrité, la loi . n'est pas une loi interne). On peut vérifier qu'il n'est pas difficile de la déduire de ce qui précède…

Dans un espace vectoriel, on peut ajouter des vecteurs, en faire des combinaisons linéaires, on ne peut pas les multiplier ni les élever à une puissance.

I.2 Espaces vectoriels classiques

On utilise toutes les propriétés précédentes sans trop y penser...et quand on doit montrer qu'un ensemble F muni de + et de . est un espace vectoriel, on le fait systématiquement apparaître comme sous-espace d'un espace vectoriel connu. Il faut donc s'entendre sur les espaces vectoriels « connus » (i.e. ceux dont on n'a pas besoin dans une copie de redémontrer qu'ils sont bien des espaces vectoriels) :

a $\mathbf{K}^n$

$\mathbf{K}^n$ est l'ensemble des n-uplets d'éléments de $\mathbf{K}$.
On définit les lois par :
$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n)=(x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$
$\lambda.(x_1,\dots,x_n)=(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)$

b $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$

$\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ est l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ (on peut remplacer $\mathbf{N}$ par $\mathbf{N}_*$, ou $[\![n_0,+\infty]\!]$).
On définit les lois par, si $u=(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$,
$u+v=(u_n+v_n)_{n\in\mathbf{N}}$
$\lambda.u=(\lambda u_n)_{n\in\mathbf{N}}$

c $\mathbf{K}[X]$

$\mathbf{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$. En tant qu'espace vectoriel, c'est exactement $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$, ensemble des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ nulles à partir d'un certain rang (on dit aussi : à support fini). C'est un espace vectoriel très important, car c'est le plus simple des espaces vectoriels qui ne soit pas de dimension finie. On l'utilise donc assez souvent pour montrer qu'une propriété valable en dimension finie ne l'est pas en dimension quelconque. Voir ci-dessous !

d $\mathscr{A}(X, E)$

Si X est un ensemble quelconque et E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, alors $\mathscr{A}(X, E)$ est l'ensemble des applications de X dans E. On le munit d'une structure d'espace vectoriel avec les lois :
$f + g \ : \ x \mapsto f(x) + g(x)$
$\lambda.f \ : \ x \mapsto \lambda.f(x)$

Insistons : pour définir de telles lois sur $\mathscr{A}(X, E)$, on a besoin d'une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble d'arrivée E, mais pas sur l'ensemble de départ X.

e Un exemple de sous-espace vectoriel

On rencontrera souvent pendant l'année des espaces fonctionnels (espaces de fonctions). Par exemple, on parlera de « l'espace des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$, à valeurs réelles ».
$C^1([0, 1], \mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}([0, 1], \mathbf{R})$, car il est non vide et toute combinaison linéaire (à coefficients réels) de fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles est de classe C^1 sur $[0, 1]$ et à valeurs réelles.
Les rappels sur les sous-espaces vectoriels suivent...un peu plus bas.

f Un autre espace vectoriel...qui n'en est pas un autre

Beaucoup d'espaces vectoriels du programme rentrent dans le cadre précédent, même si cela n'est pas forcément évident à première vue :
Exemple 1 :
$\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{C})$ (les matrices à n lignes et p colonnes à coefficients complexes) peut être écrit comme l'espace vectoriel $\mathscr{A}(\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket, \mathbf{C})$.
Une matrice est en effet une application $(i, j) \mapsto m_{i,j}$ définie sur un ensemble de la forme $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket$. Même si en pratique, il vaut bien mieux voir une matrice comme un tableau que comme une application.
Voir plus loin, chapitre sur les matrices.
Exemple 2 :
$\mathscr{L}(E, F)$, ensemble des applications linéaires de E dans F, où E et F sont des espaces vectoriels, est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{A}(E, F)$, car une combinaison

linéaire d'applications linéaires est une application linéaire.

II Les polynômes : K[X]

II.1 Définition d'un polynôme

La construction de $\mathbf{K}[X]$ *n'est pas au programme : on se permet donc de ne pas trop détailler. Mais un polynôme n'est pas un objet mathématique compliqué. C'est tout simplement une suite nulle à partir d'un certain rang.*
Autrement dit, le « polynôme » $2X^6 + X^3 - 5X + 7$ *est une écriture (commode pour les opérations) de la suite*
$7, -5, 0, 1, 0, 0, 2, 0, 0 \ldots$.
$\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$*, ensemble des suites d'éléments de* $\mathbf{K}$ *nulles à partir d'un certain rang, est un sous-espace vectoriel de* $\mathbf{K}^{\mathbf{N}} = \mathscr{A}(\mathbf{N}, \mathbf{K})$ *(les suites d'éléments de* $\mathbf{K}$*).*
En plus des opérations + et . d'espace vectoriel, on peut définir une multiplication sur $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$*. C'est pour avoir une notation adaptée à cette multiplication qu'on introduit l'indéterminée (X) et la notation habituelle d'un polynôme. On définit*
$X = 0, 1, 0, 0, 0 \ldots = \left(\delta_{n,1}\right)_{n \geq 0}$
où les $\delta_{i,j}$ *sont les symboles de Kronecker, valant* 1 *si* $i = j$ *et* 0 *sinon.*
On a alors
$X^2 = 0, 0, 1, 0, 0, 0 \ldots = \left(\delta_{n,2}\right)_{n \geq 0}$
etc…
Comprendre ce qu'est un polynôme, c'est être capable de faire la distinction entre polynôme et fonction polynôme. Dans la plupart des contextes, cette distinction n'est pas utile, mais elle peut parfois être indispensable.

On appelle, donc, polynôme sur le corps commutatif **K** toute suite d'éléments de **K** nulle à partir d'un certain rang : un polynôme P est une suite $P = (p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle qu'il existe n_0 vérifiant

$$\forall n \geq n_0 \qquad p_n = 0$$

L'étude de l'ensemble $\mathbf{K}^{(\mathbf{N})}$ de ces suites nulles à partir d'un certain rang (que l'on nomme aussi parfois suites à support fini), et la construction de lois sur cet ensemble (addition, multiplication par un scalaire, multiplication interne) conduit à la représentation suivante, très commode :
$(p_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est noté $p_0 + p_1X + \cdots + p_dX^d$ (où d est tel que, si $n > d$, $a_n = 0$) ou encore $\sum\limits_{k=0}^{d} a_kX^k$ ou encore $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_kX^k$.
Il peut paraître étrange d'écrire le symbole ∞ dans l'indexation d'une somme qui ne contient en fait qu'un nombre fini de termes non nuls, mais cela évite de changer l'indice du haut de la somme suivant le degré du polynôme. Par contre, il faut surtout être toujours conscient du fait que l'on ne manipule ici que des sommes finies, même si cela n'apparaît pas toujours dans leur écriture.
On peut étendre les définitions à des suites infinies de coefficients, on parle de séries formelles, hors-programme.

II.2 Indéterminée

L'indéterminée, X, est donc la suite $0, 1, 0, 0, 0\ldots$. Ce n'est pas une variable, il est donc incorrect de lui "donner une valeur"...comme on le dit parfois abusivement ; lorsque l'on commet cet abus, on confond polynôme et fonction polynomiale, et on confond indéterminée et variable. Ce qui n'est pas toujours à éviter, tout dépend du contexte.

II.3 Structure

Les définitions suivantes :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_kX^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k)X^k$$

$$\lambda \sum_{k=0}^{+\infty} a_kX^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda a_kX^k$$

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) \quad = \quad \sum_{k=0}^{+\infty} c_k X^k$$

où pour tout $k \geq 0$, $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}$

font de $(\mathbf{K}[X], +, ., \times)$ une $\mathbf{K}$-algèbre commutative ($\times$ est commutative). Cette structure d'« algèbre commutative » résume les propriétés suivantes :

$(\mathbf{K}[X], +, .)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

$(\mathbf{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif.

$\forall \lambda \in \mathbf{K} \quad \forall (P, Q) \in \mathbf{K}[X]^2 \qquad \lambda(P \times Q) = (\lambda P) \times Q = P \times (\lambda Q)$

II.4 Degré, intégrité

a Définition

Le **degré** d'un polynôme non nul P est le plus grand n pour lequel p_n n'est pas nul :

$$\deg(P) = \max\big(\{n \geq 0 \ ; \ p_n \neq 0\}\big)$$

et l'on définit aussi $\deg(0) = -\infty$.

b Propriétés

Les propriétés

$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

$\deg(P + Q) \leq \max\big(\deg(P), \deg(Q)\big)$

restent vraies si l'un des deux polynômes est nul (ou les deux) grâce à la convention $\deg(0) = -\infty$ (et à des conventions bien compréhensibles du type $-\infty + a = -\infty \ldots$).

c Intégrité

En utilisant le degré, on voit que l'anneau $\mathbf{K}[X]$ est intègre : il est commutatif, et

$$[\ P \times Q \ = \ 0] \implies [P = 0 \text{ ou } Q = 0]$$

Cette propriété permet les simplifications : par exemple, si P et Q sont deux polynômes tels que

$$(X-1)^2 P = (X-1)^3 Q$$

on a $P = (X-1)Q$ (*si on n'a pas compris ce qui précède, on peut être tenté de rajouter « si $X \neq 1$ »...ce qui voudrait dire qu'on n'a pas compris qu'un polynôme n'est pas une fonction polynôme. En toute rigueur, on a le droit d'écrire « si $X \neq 1$ », c'est une précaution qui a la même valeur que* « si $1 \neq 0$ »).

d $\mathbf{K}[X]$ n'est pas de dimension finie

$\mathbf{K}[X]$ est l'espace vectoriel de dimension infinie le plus simple, il est donc souvent utilisé dans les exemples et contre-exemples. Les plus célèbres sont les deux questions suivantes :

Exercice : Donner, dans un espace vectoriel, un exemple d'endomorphisme injectif mais non surjectif
Exercice : Donner, dans un espace vectoriel, un exemple d'endomorphisme surjectif mais non injectif.

Comme on le verra plus loin, en dimension finie, pour un endomorphisme, être surjectif, injectif ou bijectif, c'est équivalent.

III Préliminaires graphiques

Les espaces vectoriels que l'on rencontre dans le cadre du programme contiennent souvent des fonctions, ou des polynômes, ou des matrices, ou des suites, etc...L'appellation « espace vectoriel » vient de ce que des ensembles de fonctions, de suites, de matrices, etc...munis d'une loi d'addition + et d'une loi « externe » de multiplication par un nombre (.) partagent des propriétés avec l'ensemble des vecteurs du plan ou des vecteurs de l'espace. Henri Poincaré a dit :

« La mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes »

Il se trouve que cette analogie avec les vecteurs du plan ou de l'espace n'est pas seulement intellectuellement satisfaisante, elle permet aussi de donner un support graphique à la réflexion lorsqu'on se pose des questions sur les projecteurs, les sommes et sommes directes, entre autres. Si on veut profiter de cette aide, il faut savoir faire des dessins lisibles, qui impressionneront favorablement un correcteur ou un examinateur et surtout nous permettront de « voir » des choses.

Dans le plan, il ne s'agit que de dessiner des droites, ça va. . .Mais hélas, c'est souvent un peu juste pour donner des idées intéressantes. On dessine donc en dimension 3, ce qui demande un peu plus d'habitude.

Quand on dessine, on sous-entend que le corps de base est **R**. Il est tout-à-fait remarquable que ces dessins nous permettent aussi bien de résoudre des problèmes avec un corps de base qui serait **C**, $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ (voir plus tard), etc. . .

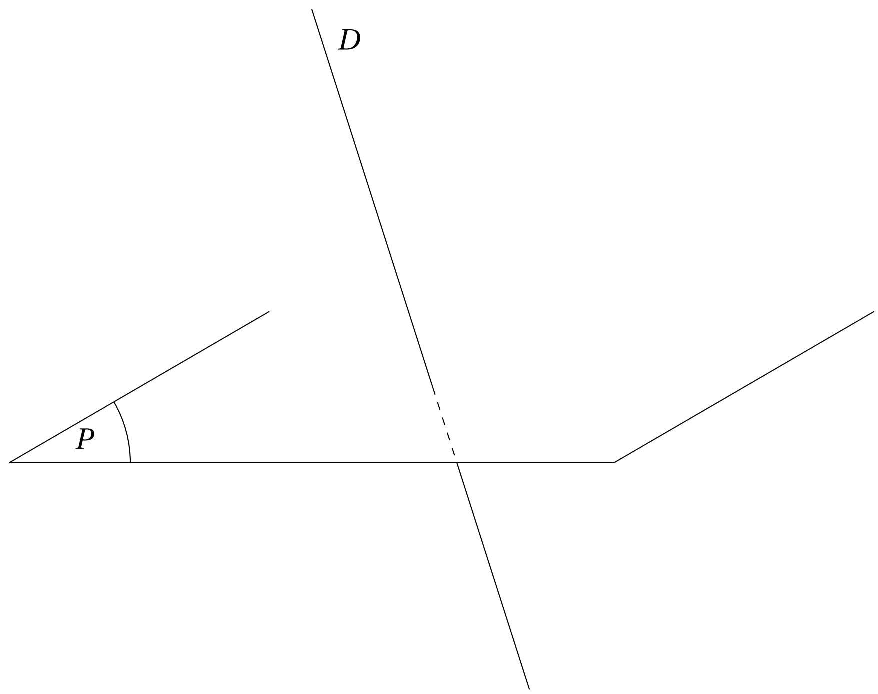
Rappelons que les objets dont on parle en algèbre linéaire sont des objets simples : vecteurs, plans, droites (pas de cercles, de sphères. . .qui demandent une structure plus élaborée d'espace vectoriel normé, ou plus particulièrement d'espace vectoriel euclidien). Mais il faut les dessiner en perspective.

Commençons par un plan : s'il n'y en a qu'un, on l'imaginera volontiers horizontal, dessiné suivant les règles de la perspective cavalière :

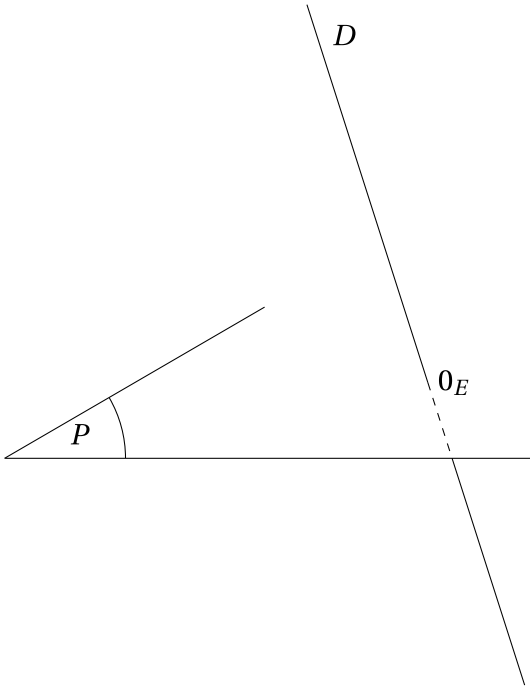
Avec un « angle de fuite » d'environ 30 degrés, c'est ce qui donne les meilleurs résultats visuellement :

Donc, déjà, on a un plan P.

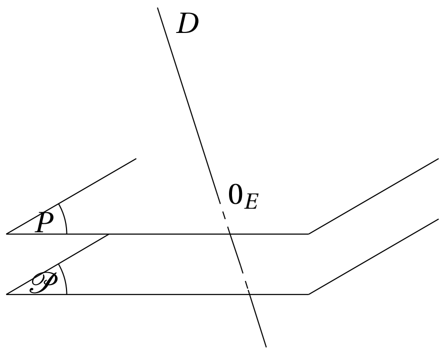
Une droite D maintenant, qui coupe le plan. On évite de la faire paraître orthogonale à P (il n'y a pas de structure euclidienne, et surtout il faut éviter de faire apparaître des propriétés liées à l'orthogonalité), et on trace en pointillés (ou on ne trace pas du tout) les parties cachées.



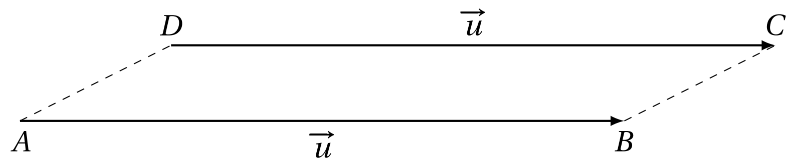
Une chose très importante : tous les sous-espaces d'un espace vectoriel contiennent un élément commun : le vecteur nul, noté en général 0_E. Ce que l'on écrit souvent :



Insistons : sur la figure suivante, $\mathscr{P}$ n'est pas un plan vectoriel. C'est un plan affine, on s'occupera de ça plus tard. Parmi les sous-espaces vectoriels, il n'y a pas de parallélisme. Dessiner en affine des espaces vectoriels, c'est ce qui nous demande quelques efforts et conventions. En effet, l'objet naturel pour le dessinateur, c'est le point, pas le vecteur.

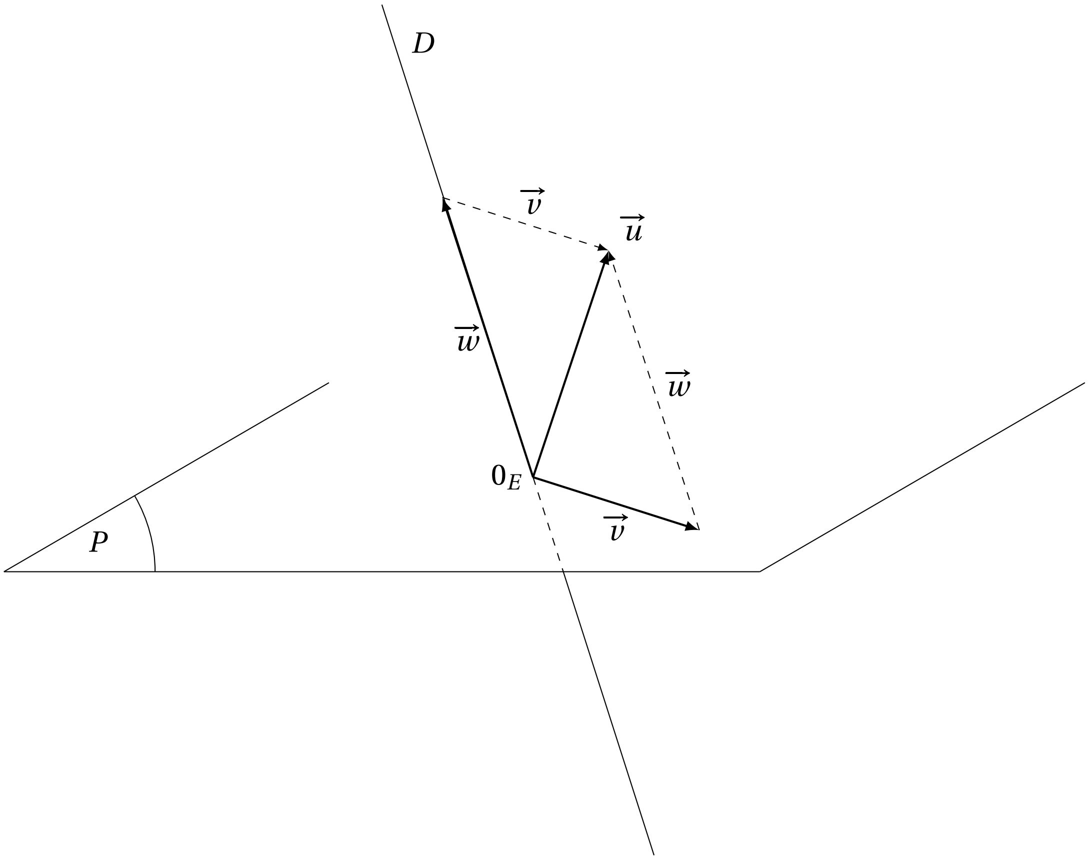


On n'a jusqu'à présent dessiné que des sous-espaces, dessinons quelques vecteurs. Rappelons d'abord que la définition mathématique des vecteurs géométriques n'est pas du tout simple. Un vecteur est en effet une classe d'équivalence pour une relation d'équivalence...En termes plus concrets, $ABCD$ est un parallélogramme lorsque les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.



On peut donc dessiner un vecteur « n'importe où »...en comprenant bien que la convention est que D (respectivement P) est l'ensemble des vecteurs dont l'« extrémité » est sur D lorsque leur « origine » est en 0_E (les mots « origine » et « extrémité » sont des termes non mathématiques). C'est qu'en fait nos dessins sont affines, et doivent représenter une situation vectorielle. Il est important de savoir dessiner une droite D, un plan P (ne contenant pas D), un vecteur $\overrightarrow{u}$ et sa décomposition comme somme d'un vecteur de D et d'un vecteur de P. Bien évidemment, l'utilisation de 2 ou 3 couleurs différentes rendra le dessin plus lisible.
La taille du dessin influe sur sa clarté...Sur un dessin trop petit, si on commence à étiqueter ($\overrightarrow{u}$, D...) on va rapidement être illisible.

Par exemple, sur le dessin suivant, on peut espérer qu'une relation simple entre les trois vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ soit lisible. Laquelle ?



Maintenant qu'on sait dessiner, on peut commencer.

IV Familles libres, familles génératrices

IV.1 Familles

Soit X un ensemble. Une famille d'éléments de X indexée par I est une application

$$\begin{array}{rccc} x: & I & \longrightarrow & X \\ & i & \longmapsto & x(i) \end{array}$$

On choisit d'écrire x_i à la place de $x(i)$ (notation indexée), et on note, plutôt que « la famille x », « la famille $(x_i)_{i\in I}$ ». Lorsque l'ensemble I est fini, la famille est dite finie. Une suite d'éléments de X est une famille d'éléments de X indexée par $\mathbf{N}$ ou par $[\![n_0, +\infty[\![= \{k \in \mathbf{N}\ ;\ k \geq n_0\}$.

On introduit donc ici un vocabulaire nouveau, pas un objet nouveau. Une matrice, par exemple, est en général vue comme un tableau, écrite comme une famille, et c'est une application. Mais se souvenir que c'est une application n'a presque aucune utilité.

IV.2 Combinaison linéaire

a Définition

1. **Combinaison linéaire de 2 vecteurs...**
   Si x, y, z sont trois éléments d'un **K**-espace vectoriel E, on dit que z est combinaison linéaire de x et y lorsqu'il existe α et β dans **K** tels que
   $$z = \alpha x + \beta y$$
   A partir de maintenant, on ne notera presque jamais le . de la loi externe.
2. **...de p vecteurs...**
   Si $x_1, \dots, x_p, z$ sont $p+1$ éléments d'un **K**-espace vectoriel E, on dit que z est combinaison linéaire des x_i $(1 \leq i \leq p)$ lorsqu'il existe $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ dans **K** tels que
   $$z = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_p x_p$$
3. **ou d'une famille quelconque de vecteurs**
   Plus généralement, si I un ensemble quelconque (fini, infini, dénombrable ou non, bref quelconque!), et si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de E, on appelle combinaison linéaire des $(x_i)_{i\in I}$ tout vecteur x de E qui peut s'écrire sous la forme
   $$x = \sum_{i\in I} \lambda_i . x_i$$
   où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de **K** (appelés les coefficients de la combinaison linéaire) telle que $\{i \in I / \lambda_i \neq 0\}$ est fini (éventuellement vide) ; on dit parfois que $(\lambda_i)_{i\in I}$ est « presque nulle », ou « à support fini ».

△ Très important : la somme écrite ci-dessus est une somme finie, même si pour des commodités d'écriture on l'indexe parfois par un ensemble infini. En résumé, même si une famille est composée d'un nombre infini de vecteurs, une combinaison linéaire des vecteurs de cette famille est une combinaison linéaire d'un nombre fini de vecteurs de cette famille. Insistons : une « somme infinie », dans un espace vectoriel, cela n'existe pas !

b Exemple 1

Reprenons ce qui a été vu plus haut : si $I = \{1, 2, \dots, p\}$, on appelle combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \dots, x_p$ tout vecteur x qui peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$, les λ_i étant des éléments de $\mathbf{K}$ (ce sont les coefficients de la combinaison linéaire). Bien sûr ici, inutile de préciser qu'il y a un nombre fini de coefficients non nuls.

c Exemple 2

Soit $E = \mathbf{K}[X]$, espace des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$, une combinaison linéaire des vecteurs de la famille $(X^i)_{i\in\mathbf{N}}$ est quelque chose qui peut s'écrire sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n X^n$ où au plus un nombre fini de λ_n sont non nuls, ce qui revient à dire qu'il existe m tel que $n > m \Rightarrow \lambda_n = 0$. Une combinaison linéaire des X^n ($n \in \mathbf{N}$) est par conséquent quelque chose qui peut s'écrire $\sum_{n=0}^{m} \lambda_n X^n$.
Les combinaisons linéaires des vecteurs de cette famille $(X^i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont donc les polynômes.
En revanche, l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} X^n$ n'a pas de sens dans ce cadre.
En fait, on peut lui donner un sens, mais ce n'est pas une combinaison linéaire des X^n ($n \in \mathbf{N}$), donc pas un polynôme : c'est une « série formelle », hors-programme.

d Une question importante

Soit $E = \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ l'ensemble des suites d'éléments de $\mathbf{K}$. Pour tout $p \in \mathbf{N}$, on note e_p la suite dont tous les termes sont nuls sauf le terme d'indice p, égal à 1. Autrement dit, en utilisant les symboles de Kronecker ($\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, $\delta_{i,i} = 1$) :

$$e_p = \left(\delta_{n,p}\right)_{n\in\mathbf{N}}$$

Quels éléments de E sont-il combinaisons linéaires des e_p ($p \in \mathbf{N}$) ?

e Réécriture

On peut faire apparaître explicitement la finitude des sommes en remarquant la chose suivante : z est combinaison linéaire des x_i $(i \in I)$ si et seulement s'il existe un entier naturel non nul p, p éléments de I : $i_1, \ldots, i_p$ et p éléments de $\mathbf{K}$: $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ tels que

$$z = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_{i_k}$$

On n'est donc jamais obligé d'écrire des sommes indexées par un ensemble infini. Mais vouloir systématiquement indexer par un ensemble fini a l'inconvénient de souvent compliquer les notations. Bien sûr, si I est fini, ce problème ne se pose pas, et cette réécriture n'a aucun intérêt.

IV.3 Famille libre, liée

Définition On dit que la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre lorsque la seule combinaison linéaire nulle des $(x_i)_{i\in I}$ est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls, soit lorsque, si $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$:

$$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i . x_i = 0_E\right) \Longrightarrow \left(\forall i \in I \quad \lambda_i = 0\right)$$

On dit aussi que les x_i $(i \in I)$ sont linéairement indépendants.

Cela équivaut à dire que toute combinaison linéaire des vecteurs de la famille s'écrit de manière unique comme telle : si $(\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$ et $(\mu_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}$,

$$\left(\sum_{i\in I} \lambda_i . x_i = \sum_{i\in I} \mu_i . x_i\right) \Longrightarrow \left(\forall i \in I \quad \lambda_i = \mu_i\right).$$

Remarque La famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre si et seulement si toute sous-famille finie de la famille $(x_i)_{i\in I}$ est libre.

Définition Une famille qui n'est pas libre est dite liée.

Caractérisation Une famille $(x_i)_{i\in I}$ est donc liée si et seulement si il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls des x_i :

$$\sum_{i\in I} \lambda_i . x_i = 0_E$$

avec des λ_i pas tous nuls (mais, bien entendu, seulement un nombre fini de λ_i non nuls).

Une telle relation est appelée **relation de dépendance linéaire** entre les $(x_i)_{i\in I}$.

Remarque La famille $(x_i)_{i\in I}$ est liée si et seulement s'il existe au moins un des vecteurs de la famille qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres.

Comment démontre-t-on qu'une famille est liée ? en trouvant une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs (facile à dire...on utilisera plus souvent des arguments de dimension : dans un espace de dimension n, une famille qui compte plus de n vecteurs est nécessairement liée).
Plus important, et qui mérite bien un paragraphe :

IV.4 Comment démontre-t-on qu'une famille est libre ?

On part d'une combinaison linéaire nulle, et on montre que tous les coefficients sont nuls, soit directement, soit par l'absurde (on suppose qu'ils ne sont pas tous nuls, on cherche à aboutir à une contradiction). C'est souvent un exercice intéressant.
On utilisera aussi quand on les connaîtra, les deux résultats suivants (voir plus tard) :
Dans un espace préhilbertien réel (i.e. muni d'un produit scalaire), une famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre (voir cours sur les espaces préhilbertiens).
Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre (voir cours sur la réduction).

Exemple 1
Proposition : Une famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre. Plus précisément : dans $\mathbf{K}[X]$, considérons une famille $(P_i)_{i\in I}$ telle que $(i \neq j) \Longrightarrow \deg(P_i) \neq \deg(P_j)$. Alors la famille $(P_i)_{i\in I}$ est libre.
Ce résultat peut être utilisé sans démonstration.

Dans les deux exemples suivants, on a le droit de se servir des fonctions polynômes, de l'évaluation d'un polynôme en un point...

Exemple 2 : Soit $a \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$. Montrer que la famille $\left(X^k(a-X)^{n-k}\right)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans $\mathbf{C}[X]$.

Exemple 3 : Soit, dans un corps $\mathbf{K}$, $n+1$ éléments distincts $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on définit

$$L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^{n} \frac{X - \alpha_k}{\alpha_i - \alpha_k}$$

Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est libre dans $\mathbf{K}[X]$.

Exemple 4 : Soit, pour tout $\alpha \in \mathbf{R}$, f_α la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f_\alpha(x) = x^\alpha$$

Montrer que la famille $\left(f_\alpha\right)_{\alpha \in \mathbf{R}}$ est libre.

Beaucoup de méthodes sont envisageables.

Exemple 5 : Dans l'espace $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on définit, pour tout nombre réel λ,

$$e_\lambda \, : \, x \mapsto e^{\lambda x}$$

Montrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}}$ est libre.

Remarque sur l'exemple précédent : le « dans l'espace $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ » ne sert pas à grand chose : le fait que la famille soit libre ou liée dépend du corps de base, mais pas de l'espace dans lequel on se situe, par exemple ici on pourrait dire « dans l'espace $C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ » sans rien changer.

Exemple 6 : Dans l'espace $C(\mathbf{R}, \mathbf{C})$, on définit, pour tout nombre complexe λ,

$$e_\lambda \, : \, x \mapsto e^{\lambda x}$$

Montrer que la famille $(e_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{C}}$ est libre (on pourra par exemple utiliser la dérivation).

Exemple 7 : Dans l'espace $C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, on définit, pour tout nombre réel c,

$$f_c \, : \, x \mapsto |x - c|$$

Montrer que la famille $(f_c)_{c \in \mathbf{R}}$ est libre.

IV.5 Famille génératrice

Définition On dit qu'une famille est génératrice lorsque tout vecteur de E s'écrit comme combinaison linéaire de vecteurs de cette famille.

Cela signifie que le plus petit sev de E qui contient les vecteurs de la famille (le sev engendré par les vecteurs de la famille) est E lui-même.
Il est en général plus difficile d'étudier le caractère générateur d'une famille que son caractère libre ou lié.

IV.6 Base, composantes

Définition Une famille $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E lorsqu'elle est à la fois libre et génératrice, ce qui équivaut à dire que tout vecteur x de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(e_i)_{i\in I}$:

$$\forall x \in E \quad \exists!(x_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)} \quad x = \sum_{i\in I} x_i.e_i$$

où $\mathbf{K}^{(I)}$ désigne l'ensemble des familles d'éléments de $\mathbf{K}$ dont au plus un nombre fini de termes sont non nuls (c'est-à-dire les familles à support fini, ou presque nulles). La famille $(x_i)_{i\in I}$ est appelée famille des coordonnées ou des composantes de x dans la base des $(e_i)_{i\in I}$.

Par exemple, la famille $(X^n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$, appelée base canonique de $\mathbf{K}[X]$. Cela revient bien à dire que tout polynôme P s'écrit de manière unique

$$P = \sum_{n\in\mathbf{N}} a_n X^n$$

où la suite (a_n) est à support fini, c'est-à-dire nulle à partir d'un certain rang.

Dans les « gros » espaces que l'on utilise dans le cadre du programme ($C^1([a,b],\mathbf{R})$, $C^0(\mathbf{R},\mathbf{C})$, etc...), l'existence de bases n'est pas à notre portée, puisqu'elle utilise des outils de théorie des ensembles comme le célèbre lemme de Zorn. Qui plus est, avoir l'existence d'une base n'est pas aussi intéressant qu'avoir une base, et pour ces espaces on n'arrive pas à exhiber des bases.

Base « canonique » En mathématiques, « canonique » est utilisé comme synonyme de « naturel ». Certains espaces ont une base naturelle : c'est le cas par exemple de $\mathbf{K}^n$, de $\mathbf{K}[X]$. Un élément x de $\mathbf{K}^n$ est un n-uplet (une n-liste) d'éléments de $\mathbf{K}$, il s'écrit donc $x = (x_1, \dots, x_n)$. Mais ceci s'écrit

$$x = x_1.(1,0,\dots,0) + x_2.(0,1,\dots,0) + \cdots + x_n.(0,0,\dots,1)$$

Un élément de $\mathbf{K}^n$ est donc donné naturellement comme décomposé dans une base particulière : la base « canonique » de $\mathbf{K}^n$:

$$((1,0,\dots,0),(0,1,\dots,0),(0,0,\dots,1))$$

Il y a beaucoup de bases dans $\mathbf{K}^n$, mais il n'y a qu'une base canonique.

Quand on travaille dans un espace vectoriel quelconque, il n'y a pas en général de base plus naturelle que les autres, on ne doit pas parler alors de base canonique. On a le droit de dire « soit $\mathscr{B}$ une base de E » si E est un espace quelconque de dimension finie, mais on ne dit pas « soit $\mathscr{B}$ la base canonique de E ».

V Sous-espaces vectoriels

V.1 Définition, caractérisation

Un sous-espace vectoriel de E est une partie non vide F de E stable par combinaison linéaire.
Autrement dit, une partie F d'un espace vectoriel $(E,+,.)$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :
(i) $F \neq \emptyset$
et **(ii)** $\forall (x,y) \in F^2 \quad \forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2 \qquad \lambda.x+\mu.y \in F$
La propriété **(ii)** peut être écrite sous la forme équivalente suivante :

$$\forall (x,y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbf{K} \qquad \lambda.x+y \in F$$

On peut alors restreindre les lois + et . à F, elles lui conférent ainsi une structure d'espace vectoriel.

Proposition Si F est un sous-espace vectoriel de $(E,+,.)$, toute combinaison linéaire d'éléments de F (pas seulement de deux éléments de F) est dans F.

Remarque Pour démontrer qu'un ensemble donné, muni de lois données, est un espace vectoriel, on le fait en général (en fait, toujours !) apparaître comme sous-espace d'un « gros » espace vectoriel connu.

V.2 Intersection, sous-espace engendré

On rencontre ici un schéma bien habituel : une intersection de sous-jenesaisquoi est un sous-jenesaisquoi, ce qui permet de définit le sous-jenesaisquoi engendré par une partie comme l'intersection des jenesaisquoi contenant cette partie. Mais ici, on a quelque chose de plus, c'est la caractérisation à l'aide des combinaisons linéaires.

Proposition Si, pour tout $i \in I$, F_i est un sous-espace vectoriel de E, $\bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E (I désigne un ensemble quelconque). Autrement dit, une intersection de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.

Définition Soit A une partie de E. Notons F l'intersection de tous les s.e.v. qui contiennent A ; F est le plus petit (pour l'inclusion) s.e.v. contenant A : c'est un sous-espace vectoriel, il contient A, et si G est un sous-espace vectoriel qui contient A, alors $F \subset G$.

Notation On le note Vect(A).

Donc... Vect(A) est un espace vectoriel contenant A ; si F est un s.e.v contenant A, Vect$(A) \subset F$.

Proposition - Description Vect(A) est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A : autrement dit, un élément x de E est dans Vect(A) si et seulement si il existe une famille $(\lambda_a)_{a\in A} \in \mathbf{K}^{(A)}$ telle que

$$x = \sum_{a\in A} \lambda_a.a$$

ou encore si et seulement si il existe une famille finie $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ de $\mathbf{K}^n$ et une famille $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ d'éléments de A telles que

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \ .$$

Démonstration La démarche est bien naturelle : on considère l'ensemble X des combinaisons linéaires d'éléments de A. On montre que c'est un sous-espace vectoriel de E. Il contient évidemment A. Et tout sous-espace vectoriel qui contient A contient X. Ce qui conclut.

Définition On reprend la même définition pour le s.e.v. engendré par une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$: il s'agit du plus petit s.e.v. qui contient tous les x_i, c'est-à-dire le s.e.v. engendré par la partie $\{x_i\}_{i\in I}$.

On a donc :

$$\text{Vect}(x_i)_{i\in I} = \left\{\sum_{i\in I} \lambda_i.x_i \ ; \ (\lambda_i)_{i\in I} \in \mathbf{K}^{(I)}\right\}$$

Autrement dit, le sev engendré par une famille de vecteurs est l'ensemble des combinaisons linéaires de ces vecteurs.

V.3 Somme de 2 sous-espaces vectoriels

a Un exercice d'oral

Si F et G sont deux s.e.v. de $(E,+,.)$, à quelle condition nécessaire et suffisante $F \cup G$ est-il un s.e.v. de E ?

b Définition

Prenons deux s.e.v. F et G de E, et cherchons le plus petit s.e.v. qui contient F et G, c'est-à-dire le s.e.v. engendré par $F \cup G$. On voit assez facilement qu'il s'agit de

$$\{f+g\ ;\ (f,g) \in F \times G\}$$

c'est-à-dire $F+G$.

V.4 Somme de p sous-espaces vectoriels

Nouveau par rapport au programme mpsi !

On peut étendre simplement ce qui précède à une famille finie de s.e.v. de E, $(F_i)_{1 \le i \le p}$.

Définition On définit :

$$F_1 + \cdots + F_p = \left\{ f_1 + \cdots + f_p\ ;\ (f_1, \ldots, f_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \right\}$$

et on vérifie sans difficulté qu'il s'agit d'un sous-espacve vectoriel de E. On peut remarquer que c'est le plus petit s.e.v. de E qui contient tous les F_i, autrement dit le sev engendré par $F_1 \cup \cdots \cup F_p$.

V.5 Somme directe

a Définition dans le cas de deux s.e.v.

On dit que la somme de deux sous-espaces F et G est directe lorsque tout élément de $F+G$ s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G, c'est-à-dire :

$$\forall (f, f_1, g, g_1) \in F \times F \times G \times G \qquad \left(f + g = f_1 + g_1\right) \Longrightarrow \left(f = f_1\ ,\ g = g_1\right)$$

b Caractérisation dans le cas de deux s.e.v.

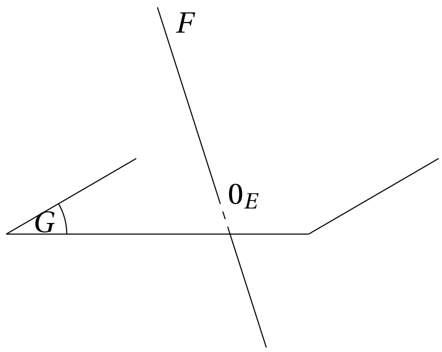
La somme $F+G$ est directe si et seulement si

$$F \cap G = \{0_E\}$$

(il est donc assez facile en général de démontrer que deux s.e.v. sont en somme directe. Rappelons que deux sous-espaces vectoriels peuvent être d'intersection « nulle », pas d'intersection vide.)

c Notation

La somme est alors notée $F \oplus G$.



d Définition dans le cas de p s.e.v.

Dans le cas d'un nombre fini quelconque de s.e.v., on dit que la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe lorsque tout élément de $\sum_{i=1}^{p} F_i$ s'écrit de manière unique comme somme d'éléments des F_i ; autrement dit,

Définition : la somme $F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ est directe lorsque

$$\forall \Big((f_1,\dots,f_p),(f_1',\dots,f_p')\Big) \in (F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_p)^2$$
$$\Big(f_1 + f_2 + \cdots + f_p = f_1' + f_2' + \cdots + f_p'\Big) \implies \Big(f_1 = f_1', \dots, f_p = f_p'\Big)$$

Notation : On note alors la somme directe $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$, on a aussi le droit à $\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

e Caractérisation

△ Attention, c'est plus compliqué, il ne suffit plus que l'intersection des F_i deux à deux soit réduite à 0_E pour que la somme soit directe.

Proposition La somme $F_1 + F_2 + \cdots F_p$ est directe si et seulement si

$$\forall (x_1, \ldots, x_p) \in F_1 \times \cdots \times F_p \quad \left(\underbrace{x_1}_{\in F_1} + \underbrace{x_2}_{\in F_2} + \cdots + \underbrace{x_p}_{\in F_p} = 0_E \right) \Longrightarrow \left(x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0_E\right)$$

On pourra souvent appliquer, lorsqu'on les connaîtra, deux importants résultats de cours :
• Des sous-espaces deux à deux orthogonaux dans un espace préhilbertien sont en somme directe (voir espaces préhilbertiens réels, Ab1).
• Des sous-espaces propres d'un endomorphisme associés à des valeurs propres deux à deux distinctes sont en somme directe.
Lorsque l'on n'est pas dans ces cas bien particuliers, c'est systématiquement la proposition ci-dessus que l'on utilisera pour montrer qu'une somme de plus de 2 sous-espaces est directe.

f Exemples

Exemple 1 : Dans $\mathbf{K}^5$ muni de sa base canonique $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$, on considère les sous-espaces $F = \text{Vect}(e_1, e_5)$, $G = \text{Vect}(e_2, e_4)$, $H = \text{Vect}(e_3)$. Montrer que ces trois s.e.v. sont en somme directe.

Exemple 2 : On considère l'espace vectoriel E des applications de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$, et, pour $k = 0, 1, 2$,

$$F_k = \{f \in E \;/\; \forall x \in \mathbf{C} \quad f(jx) = j^k f(x)\}$$

Montrer que la somme $F_0 \;+\; F_1 \;+\; F_2$ est directe.

On rencontrera d'autres exemples dans l'étude des sous-espaces supplémentaires.

Exercice Donner un exemple de sous-espaces F_1, F_2, F_3 d'un espace vectoriel E tels que, si $i \neq j$, la somme $F_i + F_j$ soit directe, mais tels que la somme $F_1 + F_2 + F_3$ ne soit pas directe.

V.6 Sous-espaces supplémentaires

a Définition

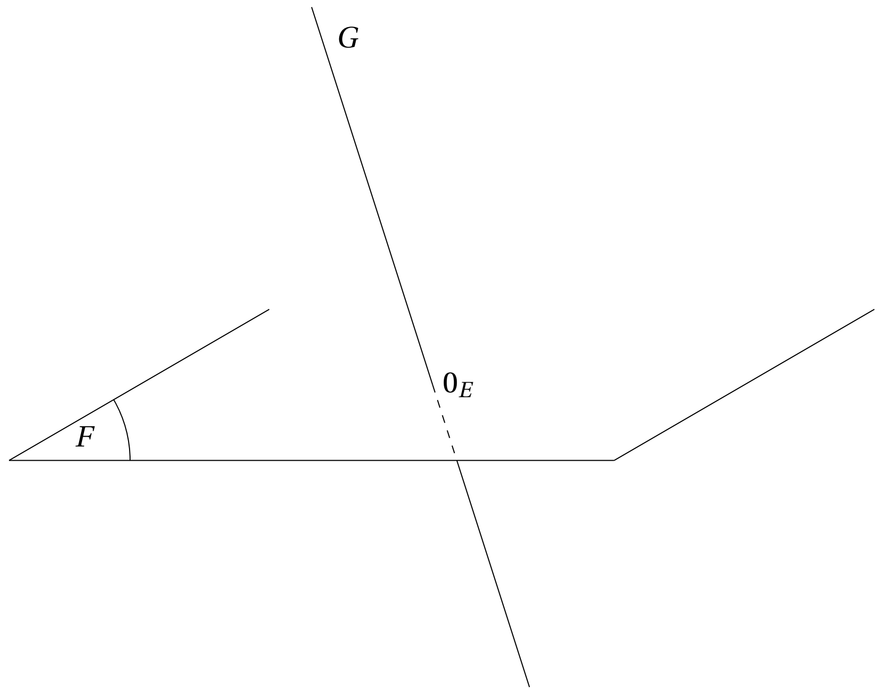
Définition On dit que F et G sont supplémentaires lorsque F et G sont en somme directe et lorsque leur somme est l'espace entier, soit :

$$F \oplus G = E$$

Cela signifie que tout élément de E s'écrit de manière unique comme somme d'un élément de F et d'un élément de G :

$$E = F \oplus G \iff \forall x \in E \;\; \exists\,!\,(y,z) \in F \times G \quad x = y + z$$

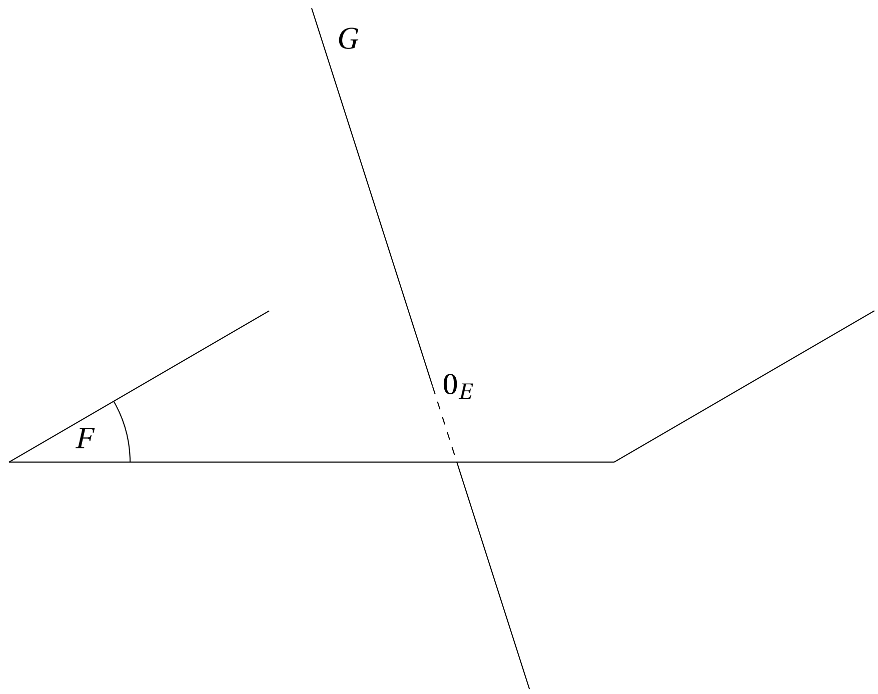
Dessin obligatoire...



On fait toujours ce genre de dessin pour illustrer le fait que deux sev sont supplémentaires. Implicitement, ici, E serait $\mathbf{R}^3$.

V.7 Erreurs classiques et considérables

On ne doit pas parler **du** supplémentaire d'un s.e.v. (mais d'un supplémentaire) ; seuls deux sev ont un seul supplémentaire, les autres en ont beaucoup.
Si l'on connaît une base $(e_i)_{i\in I}$ de E, si $F = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in J}$ où J est une partie de I, alors le s.e.v. $G = \mathrm{Vect}(e_i)_{i\in I\setminus J}$ est un s.e.v. supplémentaire de F dans E. Mais ce n'est pas le seul ; c'est seulement le plus naturel dans cette situation.
Ne pas confondre supplémentaire et complémentaire, c'est une erreur classique que les correcteurs et les interrogateurs sanctionnent avec sévérité : **le** complémentaire d'un sev ne peut pas être un supplémentaire de ce sev, car déjà ce n'est pas un sev.
Insistons : si $E = F \oplus G$, la plupart des vecteurs de E n'appartiennent ni à F ni à G. Il y en a un qui appartient à F et à G.



V.8 Méthode pour démontrer que deux s.e.v. sont supplémentaires

a Sans utilisation de dimension

On veut montrer
$$E = F \bigoplus G$$
On vérifiera en général d'abord qu'ils ont pour intersection $\{0_E\}$ (c'est-à-dire qu'ils sont en somme directe). Bien que ceci s'avère souvent superflu, car on va retrouver cette propriété plus tard. Conclusion partielle : la somme est directe, on peut donc l'écrire $F \oplus G$.
Ensuite, on montrera que tout élément de E peut s'écrire comme somme d'un élément de F et d'un élément de G. On procède généralement par analyse-synthèse : on suppose que le vecteur x de E s'écrive $x = f + g$ où f et g sont éléments de F et G respectivement. On met en évidence le fait que f est dans F et g dans G, on obtient des conditions nécessaires, on fait une réciproque. . .(ou on procède directement par équivalences). Le fait d'obtenir des conditions nécessaires montre en passant que si la décomposition $x = f + g$ existe, alors elle est unique, ce qui rend a posteriori superflue la preuve a priori du fait que la somme était directe.

b Avec utilisation de la dimension

Si E est de dimension finie et si on connaît les dimensions de F et de G, on vérifie souvent, d'abord, $\dim(F)+\dim(G) = \dim(E)$.
il n'y a plus alors qu'à vérifier que la somme est directe.
Mais cette règle n'est pas absolue. Par exemple, pour montrer que
$$\mathscr{M}_n(\mathbf{K}) = \mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \bigoplus \mathscr{A}_n(\mathbf{K})$$
on n'a pas spécialement intérêt à utiliser les dimensions de $\mathscr{S}_n(\mathbf{K})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbf{K})$.
On préfère la rédaction suivante :
On a clairement $\mathscr{S}_n(\mathbf{K}) \cap \mathscr{A}_n(\mathbf{K}) = \{(0)\}$. De plus,
$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbf{K}) \qquad M = \frac{1}{2}(M+M^T) + \frac{1}{2}(M-M^T)$$
or $\frac{1}{2}(M+M^T) \in S_n(\mathbf{K})$ et $\frac{1}{2}(M-M^T) \in S_n(\mathbf{K})$, ce qui conclut.

Certes la décomposition est « parachutée », mais on la considère suffisamment classique pour que ce soit acceptable.
On remarquera plus tard, d'ailleurs, que $\mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbf{R})$ sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$. Mais si $\mathbf{K}$ n'est pas le corps $\mathbf{R}$, cette remarque n'a pas d'intérêt.

c Exemple 1

Les sous-espaces de $\mathcal{A}(\mathbf{R},\mathbf{R})$ ($\mathbf{R}$-espace vectoriel des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$) formés respectivement des fonctions paires et des fonctions impaires sont supplémentaires dans $\mathcal{A}(\mathbf{R},\mathbf{R})$.

d Exemple 2

On se place encore dans $\mathcal{A}(\mathbf{R},\mathbf{R})$. Montrer que le sous-espace des applications constantes et le sous-espace des applications nulles en 0 sont supplémentaires.

e Exemple 3

On définit, dans $E = C([0,1],\mathbf{R})$,

$$F = \left\{ f \in E \, ; \, \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \;=\; 0 \right\}$$

et G l'ensemble des applications constantes sur $[0,1]$. Montrer que $F \oplus G = E$ (on considèrera comme évident que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E).

f Exemple 3

(important car utile pour l' interpolation de Lagrange)
Soit P est un polynôme de degré $d+1$ dans $\mathbf{K}[X]$ (d est un entier naturel). Un supplémentaire dans $\mathbf{K}[X]$ du s.e.v. $F = P\mathbf{K}[X]$ constitué des polynômes multiples de P est le s.e.v. $G = \mathbf{K}_d[X]$.

g Base adaptée

Remarque Une base n'est pas un ensemble. On ne peut donc pas, en toute rigueur, définir la réunion de deux bases. Mais on aimerait bien, parfois...

Pour deux familles finies, il est facile de voir ce qu'il s'agit de faire : « réunir » le triplet (e_1, e_2, e_3) et le couple (f_1, f_2), c'est considérer

$$(e_1, e_2, e_3, f_1, f_2)$$

(on remarque qu'il ne s'agit vraiment pas d'une réunion ensembliste, l'ordre dans lequel on met les vecteurs n'est pas indifférent).

Si maintenant on a deux familles $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, supposons-les indexées par deux ensembles disjoints I et J :

$$\mathscr{B} = (e_i)_{i\in I} \qquad , \qquad \mathscr{B}' = (f_j)_{j\in J}$$

(si ce n'est pas le cas, on en réindexe par exemple la deuxième, en utilisant un ensemble J' en bijection avec J). On définit alors $K = I \cup J$, et

$$g_k = e_k \quad \text{si} \quad k \in I \quad , \; g_k = f_k \quad \text{si} \quad k \in J$$

On peut alors considérer que la famille $\mathscr{B}'' = (g_k)_{k\in K}$ est obtenue par « réunion » des familles $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$.

On ne rentrera jamais dans ces complications, et on parlera de « réunir » des bases, alors qu'il serait déjà préférable de parler de « concaténation ».

Définition-Proposition Si $E = F \oplus G$, si $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont des bases de F et G respectivement, en « réunissant » ou en « concaténant » une base $\mathscr{B}'$ de F et une base $\mathscr{B}''$ de G on obtient une base de E, dite adaptée à la décomposition en somme directe $E = F \oplus G$.

Plus généralement, si $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$, on obtient en "réunissant" des bases des F_i une base de E dite adaptée à la décomposition en somme directe $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

h Question

Soit $\mathscr{B}$ une base de $E = F \oplus G$. Peut-on extraire de $\mathscr{B}$ une base de F ?

VI Espaces de dimension finie

VI.1 Définition

Un espace vectoriel est dit de dimension finie lorsqu'il admet une famille génératrice finie.

VI.2 Base incomplète, base extraite

On n'insistera pas trop sur l'enchaînement des résultats, un peu technique et pas forcément indispensable. L'exercice posé à l'oral d'Ulm en 2017 « montrer qu'un sous-espace d'un espace de dimension finie est de dimension finie » est l'exception qui confirme la règle.
Les deux résultats utiles sont le théorème de la base incomplète et le théorème de la dimension.

Théorème Si $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel E, si I est une partie de $\{1,\ldots,n\}$ telle que $(x_i)_{i\in I}$ est libre, il existe une partie J de $\{1,\ldots,n\}$ contenant I telle que $(x_i)_{i\in J}$ est une base de E...Autrement dit, si on part d'une famille génératrice finie, et d'une « sous-famille » libre, on peut prolonger cette sous-famille en lui rajoutant des vecteurs de la famille initiale pour qu'elle soit une base.

Théorème de la base extraite De toute famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie on peut extraire une base.

Théorème de la base incomplète Toute famille libre d'un espace vectoriel de dimension finie peut être complétée en une base.

Théorème de la base incomplète (plus précis) Soit $\mathscr{L}$ une partie libre d'un espace vectoriel de dimension finie E. Soit $\mathscr{G}$ une partie génératrice de E. On peut compléter $\mathscr{L}$ en une base de E en lui adjoignant des vecteurs pris dans $\mathscr{G}$.

On remarquera donc que tout espace vectoriel de dimension finie admet des bases. Pour un espace vectoriel qui n'est pas de dimension finie, c'est beaucoup moins simple! on y arrive avec le lemme de Zorn, qui dit que « tout ensemble ordonné inductif admet un élément maximal », lemme étroitement lié au très *célèbre Axiome du Choix. Toutes ces choses sont aussi intéressantes qu'éloignées de notre programme.*

VI.3 Théorème de la dimension

Proposition-Définition Toutes les bases d'un espace vectoriel de dimension finie ont le même nombre d'éléments. Ce nombre commun d'éléments est appelé la dimension de l'espace E. On convient que, si $E = \{0_E\}$, $\dim E = 0$.

La dimension d'un espace vectoriel est, intuitivement, le nombre de scalaires (i.e. éléments de **K***) qu'il est nécessaire et suffisant de connaître pour repérer un vecteur dans cet espace.*

VI.4 Nombre d'éléments des familles libres ou génératrices

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n.

Proposition Une famille libre de vecteurs de E contient au plus n vecteurs; elle en contient exactement n si et seulement si elle est une base de E.

Une famille génératrice de vecteurs de E contient au moins n vecteurs; elle en contient exactement n si et seulement si elle est une base de E.

♢ Ainsi, pour montrer qu'une famille est une base d'un espace dont on connaît la dimension, on commencera par vérifier qu'elle a le bon nombre de vecteurs, puis, le plus souvent, qu'elle est libre.

Exemple 1 : Montrer que la famille $\left((X+1)^k(X-1)^{n-k}\right)_{0\leq k\leq n}$ est une base de $\mathbf{K}_n[X]$.

Exemple 2 : Soit $(P_i)_{i\in I}$ une famille de polynômes telle que

$$i \mapsto \deg(P_i)$$

soit une bijection de I sur $\mathbf{N}$. Montrer que $(P_i)_{i\in I}$ est une base de $\mathbf{K}[X]$.
On peut utiliser ce résultat sans le redémontrer.

VI.5 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition Soit E un espace de dimension finie n. Tout s.e.v. de E est de dimension finie inférieure ou égale à n. Si un s.e.v. F de E est de dimension n, alors $F = E$.

On utilise souvent ce résultat (intuitivement assez évident!) dans des récurrences sur la dimension de l'espace, voir par exemple le chapitre sur la réduction des endomorphismes et des matrices.
Il est important aussi de penser que, si un sous-espace F est inclus dans un sous-espace G, pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer qu'ils ont même dimension.

VI.6 Existence et dimension d'un supplémentaire

Proposition Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, et soit F un s.e.v. de E, de dimension p. Alors F admet des supplémentaires, et tout supplémentaire de F est de dimension $n - p$.

Dans un espace de dimension quelconque, l'existence d'un supplémentaire pose des problèmes analogues à l'existence de bases…et donc demande des outils de théorie des ensembles trop sophistiqués. On n'a jamais ce genre de problème. Parfois, on voit écrit dans un énoncé, si F est un sous-espace d'un espace de dimension finie E, « soit G un supplémentaire de F ». Cela signifie seulement que l'énoncé admet l'existence d'un tel supplémentaire. C'est son droit!

VI.7 Dimension d'une somme (Grassmann)

Proposition On considère deux s.e.v. F et G de dimension finie d'un espace vectoriel (qui, lui, peut ne pas être de dimension finie, cela n'a pas d'importance). Alors $F+G$ est de dimension finie, et sa dimension est donnée par la formule suivante, dite relation de Grassmann :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

C'est l'une des rares questions de cours de mpsi qui peut se poser, parfois, à l'oral. Et la démonstration n'est pas inintéressante. L'idée : tout ramener à des sommes directes.

Proposition Si les F_i $(1 \leq i \leq p)$ sont une famille finie de sous-espaces en somme directe,

$$\dim\left(\bigoplus_{i=1}^{p} F_i\right) = \sum_{i=1}^{p} (\dim F_i)$$

Proposition D'une manière générale, si les F_i $(1 \leq i \leq p)$ sont une famille finie quelconque de sous-espaces, on a

$$\dim\left(\sum_{i=1}^{p} F_i\right) \leq \sum_{i=1}^{p} \dim F_i$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Méthode pour démontrer que deux s.e.v. d'un espace de dimension finie sont supplémentaires

Proposition

Soit F, G deux sev d'un **K**-espace vectoriel de dimension finie $(E,+,.)$. Alors

$$F \oplus G = E \iff [F \cap G = \{0_E\} \quad \text{et} \quad \dim(F) + \dim(G) = \dim(E)]$$

Démonstration Il suffit d'appliquer la relation de Grassmann

On peut bien entendu remarquer l'analogie entre la relation de Grassmann et la formule donnant le cardinal d'une réunion d'ensembles finis, mais il vaut mieux ne pas confondre les deux.

VII Espace vectoriel produit

VII.1 Définition

On considère deux espaces vectoriels E et F. On définit une loi interne sur $E\times F$, et une loi externe à opérateurs dans $\mathbf{K}$ sur ce même espace :

$$(x,y)+(x',y')=(x+x',y+y') \quad \text{et} \quad \lambda.(x,y)=(\lambda.x,\lambda.y)$$

On vérifie qu'elle munissent $E\times F$ d'une structure d'espace vectoriel, appelé produit des espaces vectoriels E et F. On définit de même une structure d'espace vectoriel sur le produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.

VII.2 Base, dimension

Sous les hypothèses précédentes, on suppose que $(e_i)_{i\in I}$ et $(f_j)_{j\in J}$ sont des bases de E et F respectivement. Alors, en réunissant les deux familles $\big((e_i,0_F)\big)_{i\in I}$ et $\big((0_E,f_j)\big)_{j\in J}$, on obtient une base de $E\times F$. Donc, si E et F sont de dimension finie, $E\times F$ l'est aussi, et

$$\dim(E\times F)=\dim E+\dim F$$

Ce résultat se généralise au produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels de dimension finie et permet de déduire

$$\dim(E^n)=n\dim E$$

(le cas $E=\mathbf{K}$ ou $E=\mathbf{K}^p$ permet de s'en souvenir sans erreur).

Exercice (posé à l'oral de Centrale en 2018)
Ecrire la base canonique de $\mathbf{R}_2[X]\times\mathbf{R}_3[X]$.

VIII Applications linéaires

VIII.1 Définitions

On considère deux espaces vectoriels E et F sur un même corps $\mathbf{K}$.
Une application $u : E \longrightarrow F$ est dite linéaire lorsque

$$\forall (x,y) \in E^2 \qquad \forall \lambda \in \mathbf{K} \qquad u(\lambda.x+y) = \lambda.u(x)+u(y) \; .$$

ou de manière équivalente, lorsque

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2 \quad \forall (x,y) \in E^2 \qquad u(\lambda.x+\mu.y) = \lambda.u(x)+\mu.u(y)$$

Si $F = \mathbf{K}$, on dit que u est une forme linéaire.
Si $E = F$, on dit que u est un endomorphisme.
Si u est bijective, alors son application réciproque u^{-1} est linéaire. On dit que u est un isomorphisme.
Un endomorphisme bijectif est un automorphisme.
On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, $\mathscr{L}(E)$ (non pas $\mathscr{L}(E,E)$) l'ensemble des endomorphismes de E.

Bonne nouvelle : montrer qu'une application est linéaire est presque toujours très facile. Mais…
Ne pas oublier $u(\lambda x) = \lambda u(x)$, la propriété $u(x+y) = u(x)+u(y)$ ne suffit pas.
Et faire attention à la question « montrer que u est une application linéaire de E dans F », où parfois il faut faire plus attention à dire que u est bien définie sur E et à valeurs dans F qu'à montrer que u est linéaire.

VIII.2 Bilinéarité de la composition

Proposition : Une composée d'applications linéaires est linéaire. Autrement dit, si u et v sont linéaires, $v \circ u$ l'est.

Notation : On note parfois $vu = v \circ u$.

Considérons maintenant trois espaces vectoriels E, F et G.

Si u_1 et u_2 sont des éléments de $\mathscr{L}(E,F)$, si $v \in \mathscr{L}(F,G)$, si $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, alors

$$v \circ (\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda(v \circ u_1) + \mu(v \circ u_2)$$

[En effet, si $x \in E$ est quelconque,

$$\begin{aligned}\left[v \circ (\lambda u_1 + \mu u_2)\right](x) &= v\left[(\lambda u_1 + \mu u_2)(x)\right]\\ &= v\left[\lambda u_1(x) + \mu u_2(x)\right]\\ &= \lambda v\left[u_1(x)\right] + \mu v\left[u_2(x)\right]\\ &= \left[\lambda(v \circ u_1) + \mu(v \circ u_2)\right](x)\end{aligned}$$

vérification quasi « mécanique », donc...]

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, si $(v_1, v_2) \in (\mathscr{L}(F,G))^2$, si $(\lambda,\mu) \in \mathbf{K}^2$, alors

$$(\lambda v_1 + \mu v_2) \circ u = \lambda\ v_1 \circ u\ +\ \mu\ v_2 \circ u$$

[Même genre de preuve]

VIII.3 Structures sur des ensembles d'applications linéaires

a L'espace vectoriel $(\mathscr{L}(E,F), +, .)$

Si u et v sont deux applications linéaires de E dans F, si λ est un scalaire, on définit

$$u + v\ :\ x \longmapsto u(x) + v(x) \qquad \lambda.u\ :\ x \longmapsto \lambda.u(x)$$

Proposition On munit ainsi l'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ d'une structure d'espace vectoriel.

Dans le cas où $F = \mathbf{K}$, $\mathscr{L}(E,\mathbf{K})$ est noté E^* : c'est l'espace dual (terminologie h.p.) de E.

b L'algèbre non commutative $(\mathscr{L}(E), +, \circ, .)$

Proposition On remarque que la composée de deux applications linéaires est linéaire. Ceci permet de munir l'ensemble $\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E d'une structure d'algèbre unitaire avec les lois $+, ., \circ$ (l'élément neutre pour $\circ$ est Id_E).

...ce qui signifie que $(\mathscr{L}(E),+,.)$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, que $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$ est un anneau (non commutatif), et que, pour tous $\lambda \in \mathbf{K}$, pour tous u, v dans $\mathscr{L}(E)$,

$$(\lambda v) \circ u = v \circ (\lambda u) = \lambda (v \circ u)$$

Les trois « grandes » algèbres au programme sont $\mathbf{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$. Seule la première est commutative.

c Le groupe $(GL(E),\circ)$

Enfin,

Proposition l'ensemble $GL(E)$ des automorphismes de E, muni de la loi $\circ$, est un groupe (non commutatif) appelé groupe linéaire de E.

d En résumé,

Si E et F sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, $(\mathscr{L}(E,F),+,.)$ est un espace vectoriel.
Si E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, $(\mathscr{L}(E),+,.,\circ)$ est une algèbre, et $(GL(E),\circ)$ est un groupe (non commutatif).

VIII.4 Image, noyau, équation linéaire

a Image d'un sev par une application linéaire

Proposition Si $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, si G est un sev de E alors $u(G)$ est un sev de F. En résumé : l'image d'un sev par une application linéaire est un sev.

b Image réciproque d'un sev par une application linéaire

Proposition Si $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, si H est un sev de F alors $u^{-1}(H)$ est un sev de E. En résumé : l'image réciproque d'un sev par une application linéaire est un sev.

c Image et noyau, injectivité et surjectivité

Si $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ sont des **K**-espaces vectoriels, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, a fortiori u est un morphisme du groupe $(E,+)$ dans le groupe $(F,+)$. On peut donc reprendre quelques définitions et propriétés vues pour les morphismes de groupes :

Définition L'image de u, notée $\operatorname{Im} u$, est par définition $u(E)$, c'est-à-dire $\{u(x)\ ;\ x \in E\}$. C'est un s.e.v. de F. Clairement, u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

Définition Le noyau de u, noté $\operatorname{Ker} u$, est l'ensemble des éléments de E qui ont pour image 0_F par u. C'est donc $u^{-1}(\{0_F\})$. Et c'est par conséquent un sev de E.

Proposition u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.

d Equations linéaires

Il est facile, b étant un élément donné de F, d'étudier l'ensemble des solutions de l'équation, dite équation linéaire :

$$u(x) = b$$

d'inconnue x dans E.
Si b n'est pas dans $\operatorname{Im} u$, l'ensemble des solutions est vide ($\emptyset$).
Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel.
Si b est dans $\operatorname{Im} u$, soit x_0 tel que $u(x_0) = b$ (x_0 est une « solution particulière » de l'équation). Alors :

$$\begin{aligned} u(x) = b &\Longleftrightarrow u(x) = u(x_0) \\ &\Longleftrightarrow u(x - x_0) = 0_F \\ &\Longleftrightarrow x - x_0 \in \operatorname{Ker} u \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $x_0 + \operatorname{Ker} u$ (on dit souvent qu'on ajoute à une solution particulière les solutions de l'équation homogène, appelée parfois équation sans second membre) . Ce n'est pas en général un s.e.v., mais un translaté de s.e.v., appelé sous-espace affine de E.
Les remarques qui précèdent constituent le fondement de l'étude théorique des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires, deux problèmes qui traitent d'objets très différents mais qui sont structurellement semblables.

Un exemple : Il faut savoir, étant donnés a et b dans le corps $\mathbf{K}$, déterminer les suites $u \in \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ qui vérifient

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad u_{n+1} = a u_n + b \tag{1}$$

Ce qui compte, c'est de savoir le faire ; mais examinons ce problème en relation avec ce qui précède.
On peut définir sur l'espace vectoriel $\mathbf{K}^{\mathbf{N}}$ un endomorphisme de décalage :

$$\phi \,:\, (u_n)_{n\in\mathbf{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbf{N}}$$

Autrement dit, $\forall n \in \mathbf{N} \qquad \big(\phi(u)\big)_n = u_{n+1}$. Notons $\widetilde{b}$ la suite constante égale à b. Alors les suites qui vérifient (1) sont les suites telles que

$$\phi(u) = au + \widetilde{b}$$

ou encore telles que $(\phi - a\mathrm{Id})(u) = \widetilde{b}$. On arrive donc à une équation linéaire !
Or la détermination de $\mathrm{Ker}(\phi - a\mathrm{Id})$ est simple. Il ne reste donc plus, pour finir, qu'à trouver une suite particulière qui vérifie (1).

VIII.5 Définition par l'image des vecteurs d'une base

a Résultats

Proposition Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base d'un espace vectoriel E, si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteurs d'un espace vectoriel F indexée par le même ensemble I, il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout i, $u(e_i) = f_i$.

Démonstration - Description Analyse-synthèse...C'est l'application qui à tout élément $x = \sum_{i\in I} x_i e_i$ de E associe l'élément $u(x) = \sum_{i\in I} x_i f_i$ (insistons : toutes les sommes sont finies).

Corollaire Pour que deux applications linéaires soient égales, il suffit qu'elles coïncident sur une base de l'espace de départ.

Autrement dit, une application linéaire est définie d'une manière unique (on dit aussi caractérisée) par les images des vecteurs d'une base. Ce résultat est à l'origine de la représentation des applications linéaires en dimension finie par les matrices. Il permet aussi de dire « soit ϕ l'application linéaire telle que, pour tout i, $\phi(e_i) = \ldots$ » (les e_i formant une base de l'espace de départ)

Propriétés Avec les notations précédentes :

L'application u est surjective si et seulement si la famille $(f_i)_{i\in I}$ est génératrice.

L'application u est injective si et seulement si la famille $(f_i)_{i\in I}$ est libre.

En combinant ces résultats, on peut donc dire

Proposition Une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle transforme (une) (toute) base de l'espace de départ en base de l'espace d'arrivée.

Corollaire deux espaces de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

b Utilisation

Exemple 1 On demande de démontrer (posé dans un problème d'écrit TPE il y a longtemps, dans un exercice d'oral Centrale récent...) que, si $P \in \mathbf{C}[X]$,

$$\int_0^{\pi} P(e^{it})ie^{it}\mathrm{d}t \ = \ -\int_{-1}^{1} P(u)\mathrm{d}u$$

Par souci de cohérence entre les deux membres, il serait d'ailleurs préférable d'écrire le second membre $\int_{-1}^{1} P(u)du$*. En revanche, confondre polynôme et fonction polynôme associée dans un énoncé d'analyse sur les polynômes réels ou complexes est plus qu'habituel.*

1. Que ne doit-on pas faire et pourquoi ? *Cette question n'a rien à voir avec l'algèbre linéaire, mais un minimum de souvenirs sur l'intégration doit permettre d'y réfléchir constructivement.*
2. Que dire des applications $\phi \ : \ P \longmapsto \int_{-\pi}^{\pi} P(e^{it})ie^{it}\mathrm{d}t$ et $\psi \ : \ P \longmapsto \int_{-1}^{1} P$? Démontrer alors, par un calcul simp le, l'égalité demandée.

Exemple 2 On considère $n+1$ réels deux à deux distincts, $\alpha_0,\dots,\alpha_n$. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0,\dots,\lambda_n$ tels que

$$\forall P \in \mathbf{R}_n[X] \qquad \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(\alpha_i)$$

Exemple 3 Montrer la formule de Taylor pour les polynômes : si $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$,

$$\forall P \in \mathbf{K}[X] \qquad P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\widetilde{P^{(n)}}(a)(X-a)^n$$

VIII.6 Définition par les restrictions à des sous-espaces en somme directe

On étend ici un résultat vu en mpsi pour deux sous-espaces.

Proposition Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie de sous-espaces en somme directe, telle que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$. Soit, pour tout i dans $[\![1,p]\!]$, $u_i \in L(F_i, F)$. Alors il existe une unique application linéaire u de E dans F telle que, pour tout i, $u|_{F_i} = u_i$

Proposition (bis) Soit $(F_i)_{1\leq i\leq p}$ une famille finie de sous-espaces en somme directe, telle que $\displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} F_i = E$. On suppose que u et v sont deux applications linéaires de E dans F (où F est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel). Si u et v coïncident sur chaque F_i, alors elles sont égales. Autrement dit, si

$$\forall i \in [\![1,p]\!] \qquad \forall x \in F_i \qquad u(x) = v(x)$$

alors

$$\forall x \in E \qquad u(x) = v(x)$$

Autrement dit, deux applications linéaires qui coïncident sur tous les F_i sont égales. Et on peut définir une application linéaire en se contentant de la définir sur chaque F_i.

Notons que ce genre de résultat encouragerait plutôt la confusion entre somme et réunion, à éviter absolument : la plupart des éléments de E ne sont dans aucun des F_i !

Exercice : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On suppose qu'il existe p éléments de $\mathbf{K}$, $\lambda_1,\dots,\lambda_p$, tels que

$$E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$$

(on dira que u est diagonalisable, voir chapitre sur la réduction). On note, pour $i \in [\![1,p]\!]$, $F_i = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E)$. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$. Démontrer que u et v commutent si et seulement si v laisse stable chaque F_i.

(On dit que u et v commutent lorsque $u \circ v = v \circ u$. On dit que v laisse stable chaque F_i lorsque, pour tout i, $v(F_i) \subset F_i$).

Exercice : Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. On dit que le sous-espace H de E est un hyperplan lorsqu'il existe une droite D de E telle que

$$H \oplus D = E$$

ou encore lorsqu'il existe $e \in E \setminus \{0_E\}$ tel que

$$H \oplus \mathrm{Vect}(e) = E$$

Soit F un $\mathbf{K}$-espace vectoriel, et soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $\mathrm{Ker}(u) = H$. Soit $v \in \mathscr{L}(E,F)$. Montrer l'équivalence :

$$H \subset \mathrm{Ker}(v) \iff \exists \lambda \in \mathbf{K} \qquad v = \lambda u$$

Dans le cas de la dimension finie, si on choisit une base adaptée à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{p} E_i = E$, on peut facilement se remettre dans le contexte de la définition d'une application linéaire par les images des vecteurs d'une base, paragraphe précédent.

VIII.7 Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Résultat à connaître. Mais ici, il n'est pas à sa « bonne place ».
On suppose E et F de dimensions finies n et p respectivement. Soit $\mathscr{B} = (e_j)_{1\leq j\leq n}$ une base de E. Définissons

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & F^n \\ & u & \longmapsto & \big(u(e_1),\dots,u(e_n)\big) \end{array}$$

On vérifie sans peine que u est un isomorphisme, et on en déduit :

Proposition $\dim \mathscr{L}(E,F) = (\dim E) \times (\dim F)$

Avec les matrices, c'est plus facile et, surtout, beaucoup plus naturel.

VIII.8 Rang

a Définition, premières propriétés

Définition Soit f une application linéaire. Lorsque son image est de dimension finie, on dit que f est de rang fini et on définit :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\, f)$$

Proposition Composer une application linéaire à droite ou à gauche par un isomorphisme ne change pas son rang; autrement dit, si v et w sont des isomorphismes, les applications linéaires u, $v \circ u$, $u \circ w$, $v \circ u \circ w$ ont le même rang.

b Théorème d'isomorphisme, théorème du rang

Très important! s'utilise souvent.

Théorème d'isomorphisme Soit u une application linéaire définie sur un espace vectoriel E à valeurs dans un espace vectoriel F. Si G est un supplémentaire quelconque de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E, alors u « induit » un isomorphisme de G sur $\mathrm{Im}\, u$.

Autrement dit, si

$$G \oplus \mathrm{Ker}(u) = E$$

alors

$$\begin{array}{rccc} v : & G & \longrightarrow & \mathrm{Im}(u) \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

est un isomorphisme.

Théorème du rang En particulier, si E est de dimension finie, $\mathrm{Im}\, u$ l'est aussi (u est de rang fini), et

$$\dim E = \dim(\mathrm{Ker}\, u) + \dim(\mathrm{Im}\, u) \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{rg}(u) = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}\, u)$$

Remarque : Surtout ne pas dire que $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$ sont supplémentaires, c'est faux en général! (mais c'est, par exemple, vrai pour les projecteurs, et plus généralement pour tous les endomorphismes diagonalisables). Le meilleur contre-exemple est l'endomorphisme de dérivation, sur $\mathbf{K}_n[X]$ ou $\mathbf{K}[X]$.

Remarque : Ces deux théorèmes, très utiles, ne sont pas trop compliqués. Mais il faut bien les connaître. Pour le premier, aucune hypothèse de dimension n'est nécessaire. Pour le deuxième, c'est seulement l'espace de départ qui doit être de dimension finie.

Remarque : Dans le premier énoncé, v, ce n'est surtout pas u...Lorsqu'on restreint l'ensemble de départ d'une application, on obtient une « restriction » : si f est une application de X dans A, si Y est une partie de X, on peut définir la restriction de f à Y :

$$\begin{array}{rccc} f|_Y : & Y & \longrightarrow & A \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Un application « induite », c'est plus que cela : on restreint l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Il faut bien sûr que ce soit cohérent, c'est-à-dire que les images des éléments du nouvel ensemble de départ soient dans le nouvel ensemble d'arrivée. Il faut éviter de noter u, ou $u|_F$ une application « induite » par u : il y aurait des risques de confusion. On peut donner un autre nom. Lorsqu'un sev F d'un espace E est stable par un endomorphisme $u \in L(E)$, alors u « induit » un endomorphisme de F, que l'on note souvent u_F. Il ne faut alors pas confondre

$$\begin{array}{rccc} u|_F : & F & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} u_F : & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Du théorème du rang on déduit le résultat utile suivant :

Proposition Si $\dim E = \dim F = n$ et si $u \in L(E,F)$, les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est bijective (i.e. u est un isomorphisme).

(ii) u est injective.

(iii) u est surjective.

En particulier ($E = F$), un endomorphisme d'un espace de dimension finie est bijectif si et seulement si il est injectif, si et seulement si il est surjectif. (en fait, c'est ce cas particulier qu'on considère presque tout le temps).

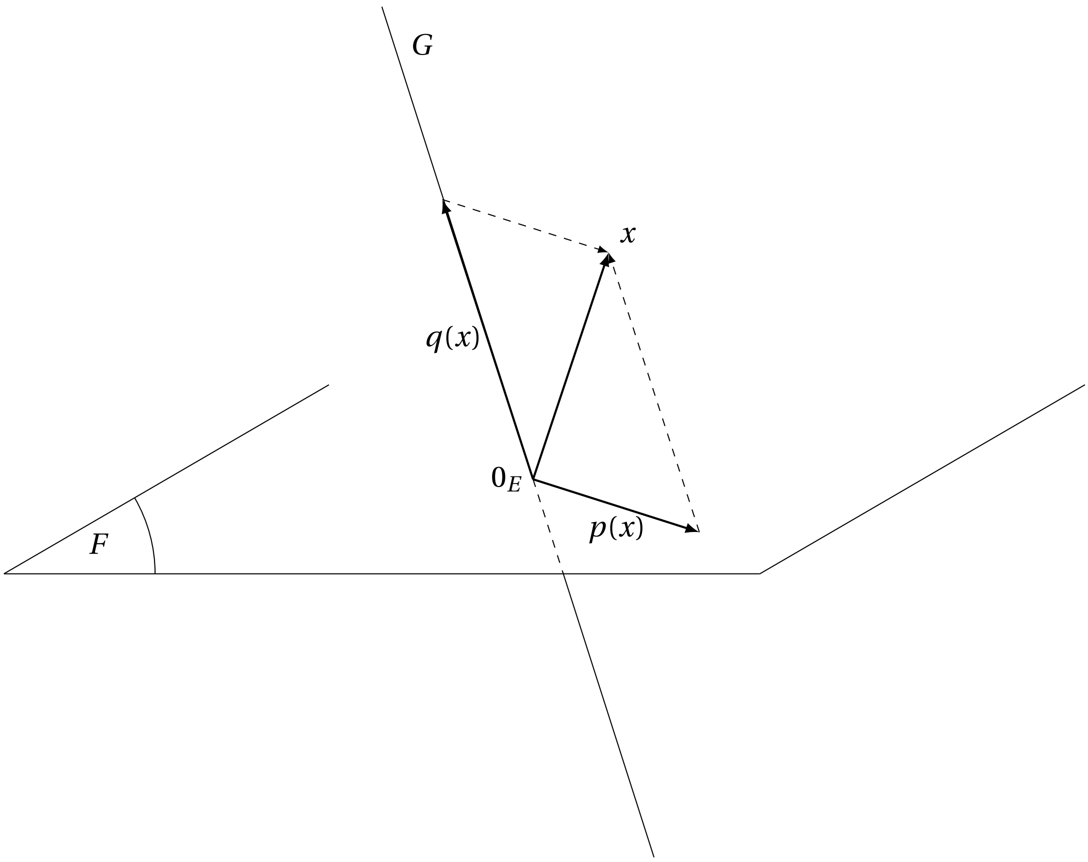
Résultat analogue à : « si h est une application d'un ensemble fini A dans un ensemble fini B de même cardinal, alors f est bijective si et seulement si elle est injective ou surjective. »

Corollaire Pour les matrices carrées, l'inversibilité équivaut à l'inversibilité à gauche ou à droite

Donc. . .nous venons de voir qu'une application linéaire définie sur un espace de dimension finie à valeurs dans un espace de **même** dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. De même, une application d'un ensemble **fini** dans un ensemble fini de même cardinal. . .En revanche, il est intéressant de savoir donner un exemple d'endomorphisme surjectif mais non injectif, et d'un endomorphisme injectif mais non surjectif, d'un espace vectoriel. Pour cela, il est intelligent de se placer sur l'espace « de dimension infinie » le plus simple que l'on connaît.

VIII.9 Projecteurs, symétries

Les projecteurs sont des endomorphismes très utilisés en algèbre linéaire. Beaucoup de propriétés se lisent sur un dessin. Eviter de dessiner ici des projections orthogonales.



a Définition géométrique

Soit E un espace vectoriel quelconque, et F et G deux s.e.v. supplémentaires dans E :

$$E = F \bigoplus G$$

Tout élément x de E s'écrit alors de manière unique sous la forme

$$x = y + z$$

où y est un élément de F, z un élément de G. L'application qui à x associe y est linéaire, c'est la **projection sur F parallèlement à** G. Notons-la p. L'application qui à x associe z est la projection sur G parallèlement à F. Si on la note q, on a : $q = \mathrm{Id} - p$. Alors

$$\ker p = G \quad , \quad \mathrm{Im}\, p = F \quad , \quad p \circ p = p$$

$$\ker q = \qquad , \quad \mathrm{Im}\, q = \qquad , \quad q \circ q =$$

$$p + q =$$

b Définition algébrique

On appelle projecteur de E tout endomorphisme p de E qui vérifie

$$p \circ p = p$$

(on écrira en général $p^2 = p$).
Si p est un projecteur, alors

$$\ker p \oplus \mathrm{Im}\, p = E$$

et p est la projection sur $\mathrm{Im}\, p$ parallèlement à $\ker p$, $\mathrm{Id} - p$ étant la projection sur $\ker p$ parallèlement à $\mathrm{Im}\, p$ (on vérifie d'ailleurs que $(\mathrm{Id}-p)\circ(\mathrm{Id}-p) = \mathrm{Id}-p$).

Remarque : Pour résoudre une question sur les projecteurs, il est en général recommandé de faire un dessin (on dessine une projection sur un plan parallèlement à une droite). Mais certains énoncés sont très algébriques et n'utilisent que peu ou pas la géométrie. On aura parfois intérêt à remarquer la propriété utile :

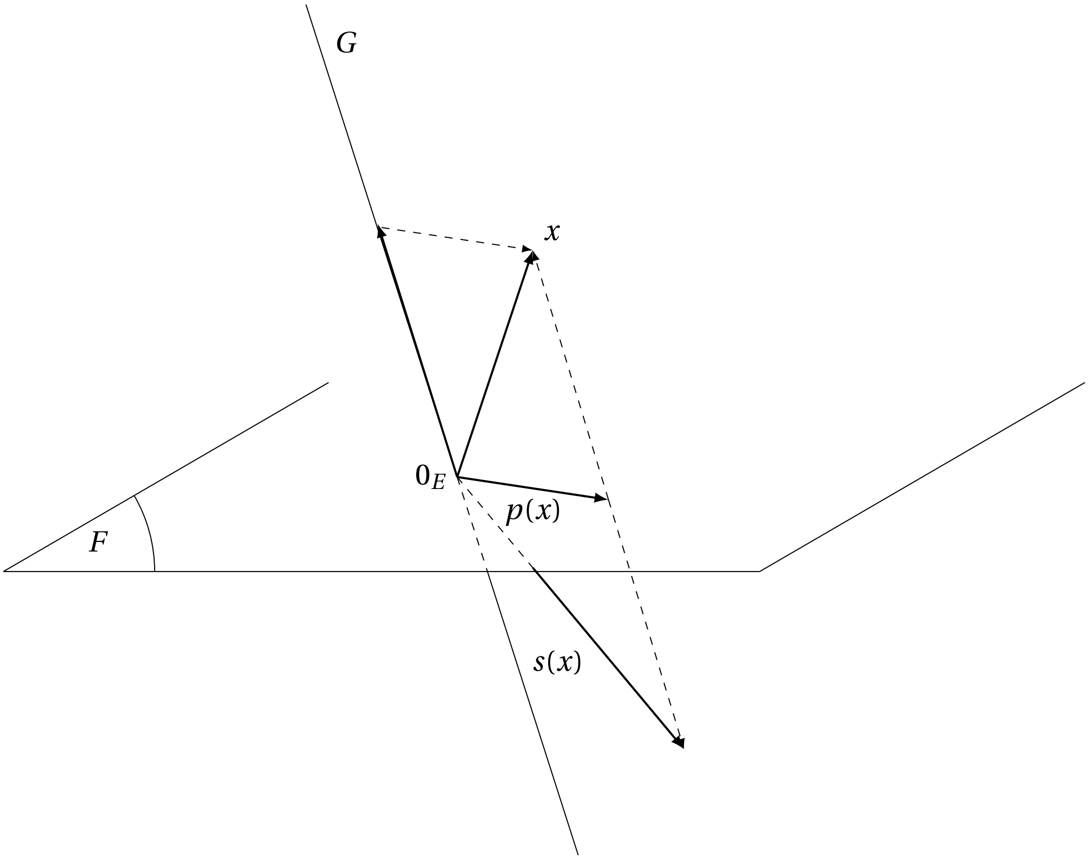
Proposition Un endomorphisme ϕ est un projecteur si et seulement si

$$\forall x \in \mathrm{Im}(\phi) \qquad \phi(x) =$$

Remarque : Le programme suggère d'utiliser indifféremment les termes « projecteur » et « projection ».

c Symétries (involutions) vectorielles

Ici encore, on dessinera. En essayant d'éviter les symétries orthogonales…Les formules liant projecteurs et symétries devraient être évidentes, si le dessin est bien fait. Un petit peu moins importantes que les projections, les symétries sont quand même des endomorphismes très intéressants.



Définition géométrique On suppose encore

$$E = F \oplus G$$

et on note p la projection sur F parallèlement à G. L'application

$$s = 2p - Id = p - (Id - p)$$

est la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Elle vérifie

$$s \circ s = Id$$

(on dit que c'est une involution, ou qu'elle est involutive), c'est donc un isomorphisme.

Proposition Soit x, y dans E.

$$y = s(x) \iff \left(\frac{1}{2}\left(x+y\right) \in F \quad \text{et} \quad y - x \in G\right)$$

Définition algébrique Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Soit $s \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$s^2 = Id$$

(ou encore : $s \circ s = Id$). Alors

$$E = \text{Ker}(s - Id) \oplus \text{Ker}(s + Id)$$

(remarquons que ensemble $\text{Ker}(s - Id)$ est l'ensemble des vecteurs invariants par la symétrie et $\text{Ker}(s + Id)$ est ensemble des vecteurs changés en leur opposé par la symétrie).

Et on vérifie que s est la symétrie par rapport à $E_1 = \text{Ker}(s - Id)$ parallèlement à $E_{-1} = \text{Ker}(s + Id)$. La projection associée (sur E_1 parallèlement à E_{-1}) étant

$$p =$$

Insistons : pour un endomorphisme, les termes « symétrie » et « involution » sont synonymes. L'un insiste sur l'aspect géométrique, l'autre sur l'aspect algébrique.

Application : une preuve élégante d'un résultat classique
Montrer que la transposition, considérée comme endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbf{K})$, est une symétrie. Déterminer E_1 et E_{-1}. Qu'en déduit-on? Trouver un artifice semblable pour retrouver le fait que $\mathscr{A}(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ est la somme directe des sous-espaces constitués des applications paires et impaires respectivement.

d Homothéties

On appelle **homothétie** toute application $h_\lambda = \lambda Id$.

e Projecteurs asociés à une décomposition en somme directe

On suppose $E = \bigoplus_{i=1}^{m} F_i$. On peut écrire par exemple

$$E = F_1 \bigoplus \underbrace{\left(F_2 \bigoplus \cdots \bigoplus F_m\right)}_{G_1}$$

Pour tout k, soit p_k la projection sur F_k parallèlement à $G_k = \bigoplus_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{m} F_j$. Alors, pour tout x de E, la décomposition de x sur $\bigoplus_{i=1}^{m} F_i$ est

$$x = p_1(x) + p_2(x) + \cdots + p_m(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i(x)$$

On a donc

$$Id_E = \sum_{i=1}^{m} p_i$$

et

$$i \neq j \Rightarrow p_i \circ p_j = \Theta$$

(bien sûr, $p_i \circ p_i = p_i$, les p_i sont des projecteurs).

Si u est une application linéaire définie sur E, et si, pour tout i, on note u_i la restriction de u à F_i, alors

$$u = \sum_{i=1}^{m} (u_i \circ p_i)$$

On retrouve ainsi le fait que u est connue si on connaît les u_i.

VIII.10 Une utilisation des projecteurs

Proposition Soit F un s.e.v. d'un espace vectoriel E, G et H deux supplémentaires dans E de F :

$$F \bigoplus G = F \bigoplus H = E$$

Alors

induit un isomorphisme de H sur G.

Tous les supplémentaires d'un même sous-espace sont donc isomorphes. Si, donc, on définit :

Définition Un sous-espace H de E est un hyperplan lorsqu'il existe une droite D telle que

$$H \bigoplus D = E$$

on sait alors que tout supplémentaire d'un hyperplan est une droite.

La définition du programme, équivalente est : un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. En dimension finie, c'est plus simple : les hyperplans d'un espace vectoriel de dimension n sont les sous-espaces de dimension

IX Interpolation de Lagrange

IX.1 Le théorème

On désigne comme d'habitude par $\mathbf{K}$ un corps commutatif quelconque.

Théorème Soit $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$, supposés **deux à deux** distincts ($i \neq j \Rightarrow \alpha_i \neq \alpha_j$). Soit $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbf{K}^{n+1}$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbf{K}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0, n]\!] \qquad \widetilde{P}(\alpha_i) = y_i$$

IX.2 Expression : polynômes interpolateurs de Lagrange

Avec les notations précédentes, on définit, pout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - \alpha_j}{\alpha_i - \alpha_j}$$

Alors le polynôme P du paragraphe précédent est

$$P = \sum_{i=0}^{n} y_i L_i$$

X Noyaux itérés

Assez curieusement, rien sur les « noyaux itérés » (en fait noyaux des itérées d'un endomorphisme) n'est au programme. Pourtant, ce n'est pas qu'un exercice classique, c'est aussi quelque chose qu'on utilise en réduction. Très important, donc, et c'est un excellent entraînement.

X.1 Résultats principaux

Question préliminaire Si E, F, G sont trois $\mathbf{K}$-espaces vectoriels, si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, écrire et démontrer une inclusion entre $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(v \circ u)$ d'une part, entre $\operatorname{Im} v$ et $\operatorname{Im}(v \circ u)$ d'autre part.

Exercice On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. On définit, pour tout entier naturel p :

$$F_p = \operatorname{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad G_p = \operatorname{Im}(f^p)$$

(f^p désigne l'itérée d'ordre p de f : $f^0 = \operatorname{Id}$ et, $f^{p+1} = f \circ f^p$).

1. Démontrer que, des deux suites de s.e.v. (F_p) et (G_p), l'une est croissante et l'autre décroissante (pour l'inclusion).
2. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel r tel que $F_r = F_{r+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à r, $F_p = F_{p+1}$.
3. Démontrer qu'il existe un plus petit entier naturel s tel que $G_s = G_{s+1}$, et démontrer qu'alors, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à s, $G_p = G_{p+1}$. Y-a-t-il un lien entre r et s?
4. Démontrer que G_s et F_r sont supplémentaires dans E.
5. Donner un exemple d'endomorphisme f d'un espace E (qui n'est pas de dimension finie) tel que la suite $\left(\operatorname{Ker}(f^p)\right)_{p\geq 0}$ soit strictement croissante pour l'inclusion.

NB : quand f désigne un endomorphisme d'un espace vectoriel quelconque,

f^p ne peut désigner que $\underbrace{f \circ f \cdots \circ f}_{p \text{ fois}}$, il ne peut être question de « multiplier » des endomorphismes (pas plus qu'on ne multiplie des vecteurs). On les compose.

Il faut savoir faire les deux premières questions de cet exercice. On résume en général le résultat de la deuxième question en écrivant :

$$\{0_E\} = \mathrm{Ker}(f^0) \subsetneq \mathrm{Ker}(f^1) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(f^m) = \mathrm{Ker}(f^{m+1}) = \mathrm{Ker}(f^{m+2}) = \cdots$$

Evidemment, si $f \in GL(E)$, cette suite d'inclusions est moins mouvementée car elle se résume à

$$\{0_E\} = \mathrm{Ker}(f^0) = \mathrm{Ker}(f^1) = \mathrm{Ker}(f^2) = \cdots$$

X.2 Approfondissement

On reprend les définitions et notations de l'énoncé précédent.
Soit H_{k+1} tel que

$$F_{k+1} \oplus H_{k+1} = F_{k+2}$$

1. Démontrer que la restriction de f à H_{k+1} est injective.
2. Démontrer que $f(H_{k+1})$ est un sous-espace vectoriel de F_{k+1} et qu'il est en somme directe avec F_k.
3. En déduire que la suite (α_k), où $\alpha_k = \dim F_{k+1} - \dim F_k$, est décroissante.

(Autrement dit, les marches de l'escalier sont de moins en moins hautes).

X.3 Application à la nilpotence

Soit E un **K**-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On dit que $f \in \mathscr{L}(E)$ est nilpotent lorsqu'il existe $k \geq 1$ tel que $f^k = \widetilde{0_E} = \Theta$. L'unique entier naturel non nul p tel que $f^{p-1} \neq \Theta$ et $f^p = \Theta$ est alors appelé indice de nilpotence de f.
Dans cet énoncé, on considère $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Montrer que $p \leq n$ (on pourra appliquer les deux premières questions de l'exercice sur les noyaux itérés).
2. On suppose $p = n$, déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

3. Donner un exemple d'espace vectoriel E de dimension n et d'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ nilpotent d'indice n.
4. On suppose encore ici f nilpotent d'indice $n = \dim(E)$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\mathscr{B} = \big(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\big)$ soit une base de E. Ecrire alors $M_{\mathscr{B}}(f)$.

Remarque 1 : On aura dans le chapitre sur la réduction un moyen très rapide d'arriver au résultat de la première question : le théorème de Cayley-Hamilton.
Remarque 2 : L'endomorphisme nul peut être noté $\widetilde{0_E}$, $0_{\mathscr{L}(E)}$, Θ...ou tout simplement 0. On suit les notations de l'énoncé.

X.4 Un exercice classique

Cet exercice se pose à l'oral depuis des décennies, il est dans tous les livres, et fait partie de la liste CCP 8pts, formulé différemment. Il est vivement conseillé de le traiter sans utiliser les résultats de l'exercice sur les noyaux itérés, on vérifiera alors si on a assimilé les techniques de résolution de cet exercice.

Exercice : Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, où E est un $\mathbf{K}$-espace de dimension finie. Démontrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(f^2)$
(ii) $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im}(f^2)$
(iii) $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$
Donner un exemple montrant que si E n'est pas de dimension finie, ces trois propriétés ne sont pas équivalentes.

Table des matières