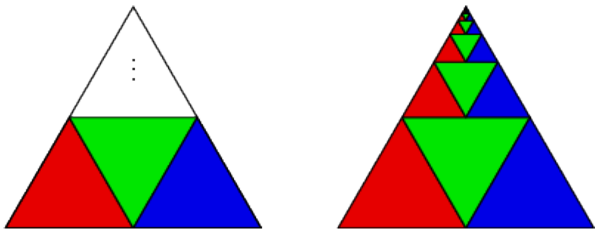
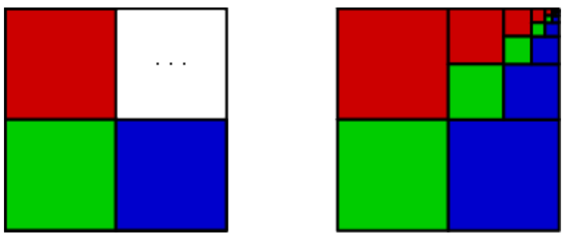
S2 : Séries numériques

On verra aussi des séries de fonctions, des séries de matrices...plus tard.



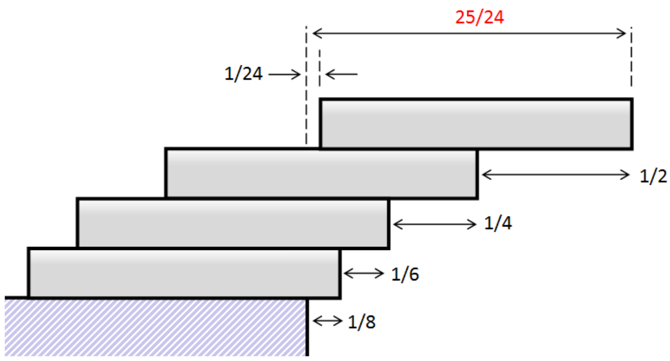
The infinite geometric series $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$.



Another proof of the identity $\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{1}{3}$.

Deux preuves « sans paroles » de l'identité

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1}{3}$$



La divergence de la série harmonique permet de construire avec des blocs parallélépipèdiques des surplombs aussi grands que l'on veut. A essayer avec des Kapla.

I Généralités sur les séries réelles ou complexes

I.1 Exemple d'une série géométrique

On veut donner un sens à la formule suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$$

Pour cela, on définit, pour tout entier naturel p,

$$S_p = \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n}$$

On sait calculer S_p (c'est une somme géométrique) :

$$S_p = \frac{1 - \dfrac{1}{2^{p+1}}}{1 - \dfrac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^p}$$

On voit donc que

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 2$$

On dit alors que « la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ converge », ou que « la série $\sum \frac{1}{2^n}$ converge », et que sa « somme » est 2, ce que l'on résume par l'écriture donnée au début du paragraphe. On appelle S_p « somme partielle d'ordre p de la série $\sum \frac{1}{2^n}$ ». L'étude de la série de terme général $\frac{1}{2^n}$ est donc l'étude de la suite (S_p).

Quel que soit l'intérêt de cet exemple (et il est grand!), il faut insister sur le fait qu'on ne se préoccupe que rarement des sommes partielles d'une série, du moins pour montrer sa convergence ou sa divergence : on travaille le plus souvent sur le terme général, que l'on compare à des termes généraux connus.

I.2 Sommes partielles ; convergence ; divergence ; somme

On désigne toujours par $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes.

a. Convergence, divergence

Etudier la convergence ou la divergence de la **série** de terme général u_n, c'est étudier la convergence ou la divergence de la **suite** de terme général S_n, où

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \ .$$

S_n est la **somme partielle d'ordre** n (ou de rang n) de la série.

Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ converge, on dit que

« la série de terme général u_n converge »

Les ennuis commencent ici : comme on n'a pas envie d'écrire à chaque ligne « la série de terme général u_n converge », on abrège, et on écrit en général que

« la série $\sum u_n$ converge »

ou que « la série $\sum_n u_n$ converge » (par exemple lorsque plusieurs lettres interviennent dans l'expression de u_n), ou que « la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge » (n_0 étant un entier naturel).

On remarquera que dans ces écritures, $\sum$ n'a aucun sens mathématique, ce n'est qu'une abréviation qui remplace la locution « la série de terme général ».

Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ diverge, on dit que la série de terme général u_n diverge...ou plus brièvement que la série $\sum u_n$ diverge.

« Etudier la nature » de la série $\sum u_n$, c'est déterminer si cette série converge ou diverge.

b. Somme d'une série

Dans le cas de convergence, la limite de la suite des sommes partielles est appelée **somme** de la série $\sum u_n$, et est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. On a donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{p\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{p} u_n\right)$$

lorque cette limite existe.

Une série divergente n'a pas de somme. Le symbole $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ n'a alors pas de sens. On ne devrait d'ailleurs se permettre d'écrire ce symbole qu'après avoir démontré la convergence de la série. Par exemple, « Montrons que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge » est très incorrect.

Remarque : La somme d'une série n'est pas une somme...mais la limite d'une suite de sommes! en ajoutant $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots$ on n'obtiendra jamais 2.

Remarque : Insistons encore : le symbole $\sum u_n$ ne désigne aucun objet mathématique : c'est une abréviation. On étudie donc $\sum u_n$ (i.e. on étudie « la série de terme général u_n »). Si on étudie cette série, et si on montre sa convergence, alors on a le droit de parler de sa somme, qu'on notera $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. Mais ce n'est en rien une somme, c'est la limite d'une suite de sommes...

Remarque : On ne définit pas ce qu'est une « série ». On peut en trouver une définition dans certains ouvrages, mais c'est assez artificiel et complètement inutile.
Attention au vocabulaire, si on accepte à la rigueur le raccourci « série positive » pour parler d'une série à termes réels positifs (mais c'est à éviter), parler de « série croissante » pour dire que la suite des sommes partielles est croissante ne sera pas accepté.
Etudier la série de terme général u_n c'est étudier la suite des sommes partielles (S_n) : il y a donc deux suites en jeu dans ce problème, mieux vaut ne pas les confondre.

I.3 Condition nécessaire de convergence ; divergence grossière

Proposition Pour que $\sum u_n$ converge, il est nécessaire que la suite (u_n) converge vers 0. Si ce n'est pas le cas, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
Autrement dit,

$$\left[\sum u_n \text{ converge}\right] \implies \left[u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0\right]$$

et surtout,

$$[u_n \not\to 0] \implies \left[\sum u_n \text{ diverge}\right]$$

Réciproque fausse

Exemple classique : la série harmonique
$\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge, bien que son terme général tende vers 0 (pour voir cette divergence, on peut donner deux méthodes :
Méthode astucieuse : minorer $S_{2p} - S_p$, où S_p désigne la somme partielle d'ordre p de la série.
Méthode classique : minorer les sommes partielles par des intégrales :

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1)$$

(voir plus loin).
Autre exemple :
On peut s'intéresser à la série « télescopique » $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \big(\ln(n+1) - \ln n\big)$.

Utilisation Ce « filtre » est comme son nom l'indique, grossier, mais on rencontre assez souvent des séries grossièrement divergentes : dans le cadre des séries entières, et aussi lorsqu'on discute de la nature d'une série dont le terme général dépend de paramètres.

Exemple Pour quelles valeurs des deux réels α et β la série $\dfrac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$ est-elle grossièrement divergente ?

I.4 Sommes géométriques, séries géométriques

Soit q un nombre complexe. On peut étudier la nature de la série $\sum q^n$ en calculant les sommes partielles.
D'une certaine manière, ces séries montrent le mauvais exemple : il est très rare qu'on puisse calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ pour étudier la convergence de (S_n).

a. Sommes géométriques

On les rencontre fréquemment, il faut donc être à l'aise avec les formules. Il faut connaître parfaitement

$$\text{Si } q \neq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \tag{1}$$

Si on a un doute, la formule se retrouve (et se « voit » bien) en développant le produit

$$(1-q)(1+q+\cdots+q^n)$$

et en remarquant que le développement donne une somme télescopique.
Ne pas oublier le cas particulier $q = 1$...pas très difficile, mais pour lequel la formule générale est fausse.
Il faut également être capable de calculer sans effort une somme géométrique qui se présente sous un forme plus confuse, disons

$$S = \sum_{k=n}^{p} aq^{k+m}$$

(n et p sont deux entiers, $n \leq p$). La méthode suivante est très fiable et fortement recommandée : on met en facteur le premier terme.

$$S =$$

On est alors ramené à une somme géométrique simple, qui permet de conclure

$$S =$$

En particulier, on retrouve une formule généralisant (1) : n et p désignant deux entiers naturels, $n \leq p$,

$$\text{Si } q \neq 1 \qquad \sum_{k=n}^{p} q^k \ =$$

Il est fortement déconseillé de calculer la somme précédente en utilisant

$$\sum_{k=n}^{p} q^k = \sum_{k=0}^{p} q^k - \sum_{k=0}^{n-1} q^k$$

(davantage de risques d'erreur, généralisation au cas où $n < 0$ pas naturelle, généralisation aux sommes de séries pas très naturelle non plus).

b. Somme vide, somme nulle

Si $n > p$, on convient que

$$\sum_{k=n}^{p} u_k = 0$$

(une somme vide vaut 0. De même un produit vide vaut 1.)

c. Sommes géométriques « cachées »

cosinus, sinus, exponentielle On rappelle la formule, si $\theta \in \mathbf{R}$:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

d'où découlent les formules d'Euler :

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) \qquad ; \qquad \sin\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$$

mais aussi

$$\cos\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) \qquad ; \qquad \sin\theta = \mathrm{Im}\left(e^{i\theta}\right)$$

La formule

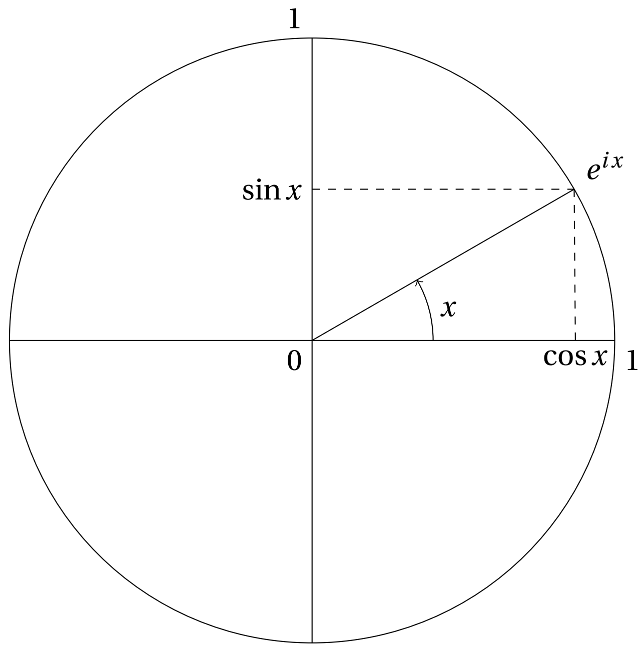
$$e^{i(\theta+\phi)} = e^{i\theta} \times e^{i\phi}$$

est équivalente aux formules d'addition :

$$\cos(\theta+\phi) = \cos\theta\ \cos\phi - \sin\theta\ \sin\phi \qquad ; \qquad \sin(\theta+\phi) = \sin\theta\ \cos\phi + \cos\theta\ \sin\phi$$

et elle implique, pour $n \in \mathbf{Z}$ et $\theta \in \mathbf{R}$,

$$e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$$



Calcul de sommes Il faut savoir calculer et simplifier l'expression de sommes du type

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$$

(somme de sinus ou de cosinus de réels en progression arithmétique) en se ramenant, par utilisation de l'exponentielle complexe, à des calculs de sommes géométriques :

$S_n = \mathrm{Re}\Big(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\Big)$ donc, si $\theta \notin 2\pi\mathbf{Z}$ (sinon la somme vaut n),

$$\begin{aligned}
S_n &= \mathrm{Re}\Big(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\Big) \\
&= \mathrm{Re}\Big(\frac{e^{i(n+1)\theta/2}}{e^{i\theta/2}} \quad \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin[\theta/2]}\Big) \\
&= \cos[n\theta/2] \quad \frac{\sin[(n+1)\theta/2]}{\sin[\theta/2]}
\end{aligned}$$

La deuxième étape est cruciale, il faut bien en assimiler le mécanisme : on rencontre un nombre complexe de la forme

$$1 \pm e^{ia}$$

dont on transforme l'expression en mettant en facteur $e^{ia/2}$:

$$1 \pm e^{ia} = e^{ia/2}\left(e^{-ia/2} \pm e^{ia/2}\right)$$

et on obtient (à un facteur 2 près) le produit d'une exponentielle par un cosinus ou un sinus.

Une vérification Il est bien clair que la fonction

$$\theta \longmapsto \sum_{k=0}^{n} \cos k\theta$$

est continue sur $\mathbf{R}$, et même de classe C^{∞}.

Un autre exemple Calculer

$$\sum_{k=0}^{p} \sin\left[(2k+1)\,t\right]$$

où $p \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$.

d. Séries géométriques

Proposition Soit $q \in \mathbf{C}$. La série $\sum q^n$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Et on a, si $|q| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

On est censé savoir écrire aussi, si $|q| < 1$,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} aq^k =$$

I.5 Espace vectoriel des séries convergentes

Proposition

Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, si $\lambda \in \mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$),
alors $\sum(\lambda u_n + v_n)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \tag{1}$$

Reformulation Soit E l'espace vectoriel des suites d'éléments de $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{K} = \mathbf{C}$), autrement dit $E = \mathbf{K}^{\mathbf{N}}$.

Soit F la partie de E définie par

$$u \in F \iff \sum u_n \text{ converge}$$

Alors F est un sous-espace vectoriel de E.

L'application

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & F & \longrightarrow & \mathbf{K} \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{array}$$

est linéaire (c'est une forme linéaire, l'espace d'arrivée étant le corps de base).

Remarquons qu'il vaudrait mieux lire la formule (1) de droite à gauche : le membre de droite existe, donc celui de gauche aussi et il lui est égal. On ne peut par exemple pas écrire :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}$$

qui est une fausse application de la formule (1) (les hypothèses ne sont pas réalisées).

I.6 Caractérisation par les parties réelle et imaginaire

Proposition

Si (u_n) est une suite de nombres complexes, $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent, et si c'est le cas, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) \; + \; i \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n)$$

Cela ne veut pas dire que pour étudier la convergence d'une série de nombres complexes il soit judicieux de séparer partie réelle et partie imaginaire.

I.7 Restes d'une série convergente

On considère ici une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que la série $\sum u_n$ converge. On note $(S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la suite des sommes partielles, qui converge donc vers S, somme de la série.

Définition On définit le reste d'ordre n (ou : de rang n) de la série convergente $\sum u_n$:

$$R_n = S - S_n \tag{1}$$

La suite $(R_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est la suite des restes de la série convergente $\sum u_n$. Elle converge vers 0.

On peut écrire :

$$\begin{aligned} R_n &= S - S_n \\ &= \lim_{p\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{p} u_k\Big) - \sum_{k=0}^{n} u_k \\ &= \lim_{p\to+\infty} \Big(\sum_{k=0}^{p} u_k \; - \; \sum_{k=0}^{n} u_k\Big) \\ &= \lim_{p\to+\infty} \Big(\sum_{k=n+1}^{p} u_k\Big) \end{aligned}$$

R_n s'écrit donc comme somme d'une série (convergente, bien entendu) :

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \tag{2}$$

Pour une série divergente, on ne peut pas définir de restes.
Même si c'est sous la forme (2) qu'on écrit la plupart du temps un reste, (1) n'est pour autant pas à oublier. Insistons sur le fait que l'on ne peut pas utiliser les restes d'une série pour montrer sa convergence : on a besoin d'avoir établi préalablement la convergence pour définir les restes.

II Les « séries alternées »

En général, lorsqu'on cherche à montrer la convergence d'une série, on pense prioritairement à la convergence absolue (voir très bientôt). D'ailleurs, on rencontrera beaucoup (en particulier en probabilités) de séries à termes réels positifs. Il existe néanmoins un type très particulier de séries réelles pour lesquelles un critère simple et efficace est au programme ; la plus célèbre d'entre elles est la série harmonique alternée :

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

II.1 Le théorème

Théorème : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels ; on suppose

(i) La suite (u_n) est à signes alternés.

(ii) La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est décroissante.

(iii) $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $\sum u_n$ converge.

On a de plus, en définissant $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$,

$$\forall n \geq 0 \qquad |R_n| \leq |u_{n+1}|$$

Remarque : Une appellation relativement récente, « théorème spécial sur les séries alternées », a conduit à l'abréviation tssa, qu'il est préférable d'éviter comme la plupart des abréviations. On peut aussi parler de « critère des séries alternées », parfaitement conforme à la rédaction du programme.

Démonstration : L'idée peut se voir assez vite en calculant les sommes partielles $1, 1-\frac{1}{2}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}, 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots$de la série harmonique.
On montre que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.

Remarque : La condition **(i)** peut être écrite sous la forme : « la suite $\left((-1)^n u_n\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est à signes constants. » Elle peut aussi se lire : $u_n \geq 0$ si n pair et $u_n \leq 0$ si n impair, ou l'inverse.

On parle ici de signes « larges », mais si un des u_n est nul, les suivants le sont par **(ii)**, pas grand intérêt donc.
Remarque : La majoration du reste gagne, pour éviter les erreurs éventuelles de décalage d'indice, à être mémorisée sous la forme « la valeur absolue du reste est majorée par la valeur absolue du premier terme écrit dans ce reste ».

II.2 Un corollaire

Corollaire Si la suite $(u_n)_{n\geq p}$ vérifie les hypothèses du théorème des séries alternées, alors $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$ a même signe que u_p.

En particulier, la somme d'une série vérifiant les hypothèses du théorème a même signe que son premier terme.

II.3 Remarque

Dans les exercices d'Oral, on rencontre fréquemment des séries qui sont à signes alternés, mais à qui il manque l'hypothèse de décroissance. Bien souvent, un développement asymptotique permet de résoudre ces problèmes (voir exemples plus loin). Ne pas penser qu'un $(-1)^n$ dans l'expression de u_n permet automatiquement d'appliquer le théorème. Mais il peut donner l'idée d'en vérifier les hypothèses.

II.4 Quelques exemples (ou non...)

Etudier la convergence des séries suivantes :

$$\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n}}$$

Pour quelles valeurs de x les séries suivantes vérifient-elles les hypothèses du théorème ?

$$\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1-x^n)}$$

$$\sum_{n\geq 0} x^n$$

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$$

II.5 Légère extension

Une remarque : La propriété « la série de terme général u_n converge » est une propriété asymptotique de la suite (u_n). Cela signifie que si on considère deux suites (u_n) et (v_n) qui coïncident à partir d'un certain rang, alors

$$\left(\sum u_n \quad \text{converge}\right) \Longleftrightarrow \left(\sum v_n \quad \text{converge}\right)$$

Dans l'énoncé d'un critère de convergence, si on suppose que les hypothèses ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang, la conclusion persiste. Par exemple :

Critère des Séries Alternées (bis) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels; on suppose

(i) La suite (u_n) est, au moins à partir d'un certain rang, à signes alternés.

(ii) La suite $(|u_n|)_{n\in\mathbf{N}}$ est, au moins à partir d'un certain rang, décroissante.

(iii) $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors $\sum u_n$ converge.

On remarquera que **(iii)** énonce une propriété asymptotique, un « à partir d'un certain rang » serait donc parfaitement superflu. On ne dit pas qu'une suite converge à partir d'un certain rang, ni qu'elle est bornée à partir d'un certain rang.

Mais attention : si on considère $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_p$, on n'a $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ qu'à partir d'un rang où **(i)**, **(ii)** et **(iii)** sont vérifiées.

III Convergence absolue

Définition On dit que la série de terme général u_n converge absolument lorsque la série de terme général $|u_n|$ converge.

Proposition Toute série absolument convergente de nombres réels ou complexes est convergente.

Ou encore :

$$\left(\sum |u_n| \quad \text{converge}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad \left(\sum u_n \quad \text{converge}\right)$$

La convergence absolue est donc une condition suffisante de convergence. Ce n'est pas une condition nécessaire, comme le montre l'exemple de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} .$$

Mais c'est une condition suffisante très utilisée, et cela justifie le grand intérêt que l'on porte aux séries à termes réels positifs.

Démonstration de la proposition : La démonstration « classique » utilise les suites de Cauchy et la « complétude », qui sont maintenant complètement hors-programme. On utilise donc une autre méthode, assez intéressante.

Supposons d'abord que les u_n soient réels. On a alors le

Lemme Il existe deux suites de réels **positifs** $(u_n^+)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(u_n^-)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad |u_n| = u_n^+ + u_n^- \qquad \text{et} \qquad u_n = u_n^+ - u_n^-$$

Remarque On peut juger ces notations étranges, u_n^- désignant un réel positif. Rien n'empêche d'utiliser les notations v_n et w_n à la place de u_n^+ et u_n^-.

Démonstration du lemme En fait, il y a unicité, ce qui facilite la preuve « par analyse-synthèse ». En effet, on a nécessairement $u_n^+ = \frac{1}{2}(|u_n| + u_n)$ et $u_n^- = \frac{1}{2}(|u_n| - u_n)$... et réciproquement, « cela convient ».

On peut d'ailleurs remarquer aussi que l'on pouvait aborder les choses avec les relations

$$u_n^+ = \max(u_n, 0) \qquad , \qquad u_n^- = \max(-u_n, 0)$$

(exercice : écrire la définition de u_n^- en utilisant un min plutôt qu'un max) ou encore

$$u_n^+ = \left| \begin{array}{lll} u_n & \text{si} & u_n \geq 0 \\ 0 & \text{si} & u_n < 0 \end{array} \right. \qquad \text{et} \qquad u_n^- = \left| \begin{array}{lll} -u_n & \text{si} & u_n < 0 \\ 0 & \text{si} & u_n \geq 0 \end{array} \right.$$

Digression Il est d'ailleurs utile de savoir qu'existent des formules donnant $\max(a, b)$ et $\min(a, b)$ en utilisant la valeur absolue, une astuce consistant à remarquer que, si a et b sont deux réels,

$\max(a, b) + \min(a, b) = a + b$

et

$\max(a, b) - \min(a, b) =$

d'où l'on tire les formules classiques

$\max(a, b) =$

et

$\min(a, b) =$

Aspect fonctionnel Si on a compris ce qui précède, on peut montrer que pour toute fonction f à valeurs réelles il existe f^+ et f^- à valeurs positives telles que

$$|f| = f^+ + f^- \qquad \text{et} \qquad f = f^+ - f^-$$

L'aspect fonctionnel a l'avantage de s'illustrer graphiquement de manière agréable. On retrouvera ces f^+ et f^- pour la définition de l'intégrale.

Fin de la démonstration de la proposition Une fois le lemme établi, ce n'est pas très difficile, quitte à utiliser déjà des résultats du **IV**.

IV Séries à termes réels positifs : un lemme

IV.1 Le lemme

Proposition Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de réels positifs, (S_n) la suite de ses sommes partielles ; alors

$$\left[\ \sum u_n \text{ converge}\ \right] \iff \left[\ (S_n) \text{ majorée}\ \right]$$

Démonstration Pas difficile : il suffit de dire que (S_n) est

Utilisation Ce résultat, fondamental, est parfois utilisé tel quel, mais il sert surtout à établir les critères de convergence par comparaison, voir par la suite.

Remarque Pour une série $\sum u_n$ à termes réels positifs, deux cas peuvent donc se présenter :

- $\sum u_n$ converge : elle a une somme, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$. La suite des sommes partielles converge en croissant vers cette somme. La suite des restes converge en vers .

- $\sum u_n$ diverge : la suite des sommes partielles diverge vers $+\infty$. Il arrivera (espérance d'une variable aléatoire discrète positive) que l'on note

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$$

mais c'est une notation un peu nouvelle au programme, il vaut donc mieux l'utiliser avec prudence.

Dans le cas de séries à termes quelconques, ce n'est évidemment pas si simple : une suite de sommes partielles qui diverge peut ne pas avoir de limite infinie. Les notations $\sum u_n = +\infty$ pour dire que la série diverge, ou $\sum u_n < +\infty$ pour dire qu'elle converge, sont alors insensées.

IV.2 Deux exercices

Exercice : On appelle A l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls :

$$A = \{m^2\ ;\ m \geq 1\}$$

On note $u_n = \dfrac{1}{n}$ si $n \in A$, $u_n = 0$ sinon. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$? (on rappelle le résultat classique, voir paragraphe suivant :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\beta} \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \beta > 1 \qquad)$$

Exercice (posé à X, Ulm, Lyon...) Soit (z_n) une suite de nombres complexes non nuls telle que, si $n \neq m$, $|z_n - z_m| \geq 1$. Soit $\alpha > 2$. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{|z_n|^\alpha}$ converge.

Exercice difficile. Indication : on note, pour $p \in \mathbf{N}$, $n(p)$ le nombre d'indices m tels que $p \leq |z_m| \leq p+1$. Trouver un majorant simple de $n(p)$.

V Comparaison de sommes et d'intégrales

Il n'est pas indispensable de parler d'intégrabilité pour présenter les comparaisons séries-intégrales. Mais cela simplifie l'énoncé de certains résultats. La définition donnée ci-dessous n'est valable que pour les fonctions positives, on reviendra abondamment sur l'intégrabilité dans un futur chapitre.

V.1 Intégrabilité d'une fonction positive sur $[a,+\infty[$

a. Définition

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,+\infty[$ (a nombre réel), à valeurs dans $\mathbf{R}^+$; on dira que f est intégrable sur $[a,+\infty[$ lorsque la fonction

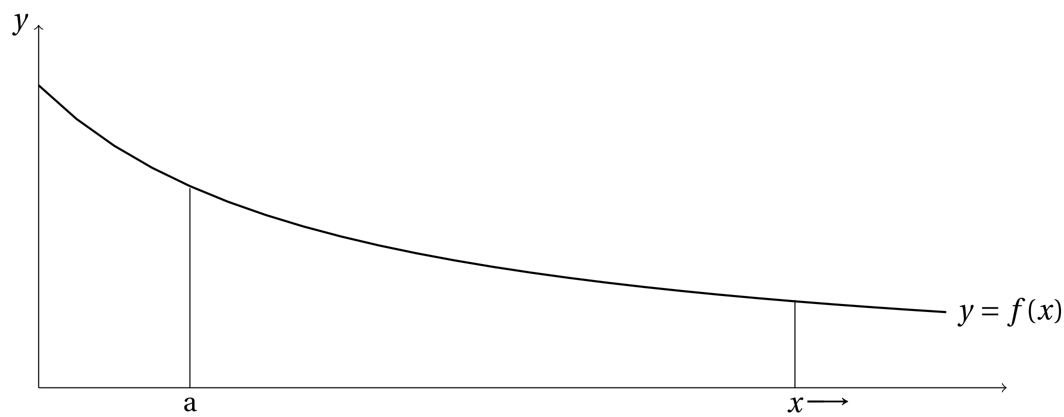
$$F\,:\,x\mapsto\int_a^x f(t)\,dt$$

a une limite (finie) quand $x\to+\infty$. On définira alors

$$\int_{[a,+\infty[} f=\int_a^{+\infty} f\ =\ \int_a^{+\infty} f(t)\,dt\ =\lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)$$

Remarquons que f est intégrable sur $[a,+\infty[$ si et seulement si F est majorée sur $[a,+\infty[$ (en effet, F est croissante).

F est évidemment la primitive de f qui s'annule en a, mais la notion de primitive n'est au programme que lorsque f est continue (pas lorsqu'elle n'est que continue par moprceaux). Ce qui est à peu près toujours le cas en pratique.



b. Exemples

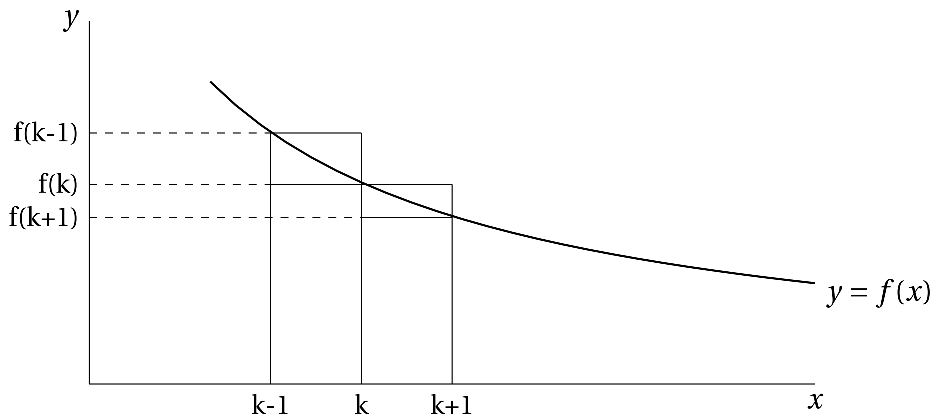
Dire si les fonctions $t \mapsto e^{-t}$, $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t}$, $t \mapsto \dfrac{\ln t}{t^2}$ sont intégrables sur $[1, +\infty[$. Ces exemples sont trompeurs : de même qu'on ne sait en général pas calculer des sommes partielles, on ne sait en général pas calculer des primitives, et on montre l'intégrabilité le plus souvent par comparaison.

c. Exemple de Riemann

Proposition : Soit $a > 0$. Soit β réel. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\beta}$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ si et seulement si $\beta > 1$.

C'est l'exemple fondamental, à connaître parfaitement, auquel on se réfèrera presque systématiquement pour montrer une intégrabilité.

V.2 Comparaison



Lemme 1 : Soit f continue (ou seulement continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$, à valeurs réelles, décroissante. Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}_*$,

$$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt \leq f(k-1)$$

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\, dt \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\, dt$$

Lemme 2 : Soit f continue (ou seulement continue par morceaux) sur $[0, +\infty[$, décroissante et à valeurs réelles. Alors, pour tout $k \in \mathbf{N}_*$,

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leq \int_{0}^{n} f(t)\, dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(k)$$

$$\int_0^{n+1} f(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} f(k) \leq f(0) + \int_0^n f(t)\,dt$$

Proposition : Soit f continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, décroissante et à valeurs réelles positives. Alors

$$\left(\sum f(n) \text{ converge}\right) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left(f \text{ intégrable sur } [0,+\infty[\right)$$

Démonstration : L'idée est assez simple : majorer F, c'est majorer (S_n), et réciproquement.

Remarque 1 : Les inégalités sommes-intégrales qui figurent dans les deux lemmes ne s'apprennent pas bêtement par cœur : on les retrouve avec un dessin. On peut d'ailleurs (rarement) avoir à les écrire pour des fonctions croissantes, ce qui bien sûr change un peu les choses.

Remarque 2 : Bien souvent, f n'est définie que sur $[1,+\infty[$ ou sur $[2,+\infty[$ ou...Cela n'a aucune importance. La convergence de la série $\sum u_n$ est une propriété « asymptotique » de la suite (u_n), ce qui signifie que, s'il existe n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0 \qquad u_n = v_n$$

alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

V.3 Application aux séries de Riemann

Proposition : Soit α, β deux réels ;

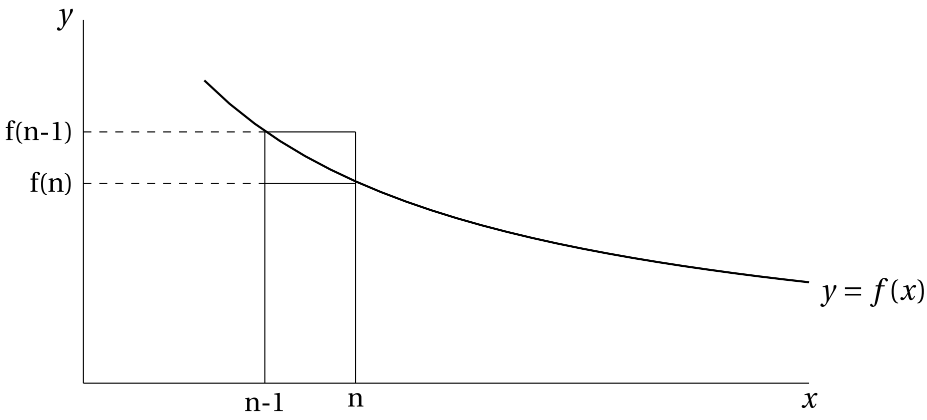
$$\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\beta} \text{ converge}\right) \qquad \Longleftrightarrow$$

$$\left(\sum_{n\geq 1} n^\alpha \text{ converge}\right) \qquad \Longleftrightarrow$$

Mémorisation : La convergence de $\sum \frac{1}{n^2}$ *et la divergence de* $\sum \frac{1}{n}$ *et* $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ *sont en général des points de repère suffisants. Autre moyen mnémotechnique : la divergence grossière de certaines de ces séries.*

Le programme suggère que l'on est autorisé à écrire $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}} < +\infty$...

V.4 Approfondissement (h.p.)



Proposition : Soit f continue par morceaux sur $[0,+\infty[$, à valeurs dans $\mathbf{R}^+$, décroissante (mais pas nécessairement intégrable). On définit, si $n \geq 1$,

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$$

Alors $\sum w_n$ converge.

Démonstration 1 : Graphiquement, en interprétant w_n comme une aire.

Démonstration 2 : Plus classsiquement, par un encadrement simple de w_n.

V.5 Constante d'Euler, série harmonique alternée (h.p. classique)

Un grand classique, hors-programme

On note, si $n \geq 1$,

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

(les H_n sont les sommes partielles de la série harmonique).

1. Montrer que la suite $(\ln n - H_{n-1})_{n\geq 2}$ converge. En déduire qu'il existe un réel γ tel que
$$H_n = \ln n \, + \, \gamma \, + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1)$$
Le nombre γ est la « constante d'Euler ».
2. Encadrer H_n en utilisant deux intégrales, en déduire un encadrement de γ de la forme $\gamma \in [a, a+1]$, où a est à déterminer.
3. On note $A_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$; exprimer A_{2n} en fonction de H_n et de H_{2n}.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

La somme de la série harmonique alternée est à savoir retrouver...mais la meilleure méthode est l'utilisation du développement en série entière de $\ln(1+x)$*, voir chapitre sur les séries entières. On ne sait toujours pas, actuellement, si la constante d'Euler est ou n'est pas un nombre rationnel.*

VI Détermination de la nature d'une série par comparaison directe à une série à termes réels positifs

VI.1 Les résultats

Rappel Les relations o, O sont insensibles au signe. Plus précisément,

$$u_n = O(v_n) \iff |u_n| = O(|v_n|)$$

...et donc ces deux énoncés sont aussi équivalents à $|u_n| = O(v_n)$ et $u_n = O(|v_n|)$.

De même, $u_n = o(v_n)$, $|u_n| = o(|v_n|)$, $|u_n| = o(v_n)$ et $u_n = o(|v_n|)$ ont la même signification.

En effet, les relations o et O sont définies à partir de suites qui convergent vers 0 et de suites bornées. Or (u_n) converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ converge vers 0. Et (u_n) est bornée si et seulement si $(|u_n|)$ l'est.

En revanche, $u_n \sim v_n$ ou $|u_n| \sim |v_n|$, ce n'est pas la même chose (il y a une implication entre ces deux énoncés, laquelle ?).

Proposition 1 On suppose les hypothèses suivantes réalisées :

(i) (u_n) est une suite de nombres réels ou complexes.

(ii) (v_n) est une suite de nombres **réels positifs**.

(iii) $\sum v_n$ converge.

(iv) $u_n = O(v_n)$.

Alors $\sum u_n$ converge.

On peut remplacer **(iv)** par

(iv) bis Il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0 \quad |u_n| \leq v_n$

ou par

(iv) ter $u_n = \mathrm{o}(v_n)$

et la conclusion subsiste.

Insistons : la série de référence ($\sum v_n$) est à termes réels **positifs**. Celle que l'on compare n'a pas besoin d'être à termes réels positifs.

Proposition 2 Soit (u_n), (v_n) deux suites de réels. On suppose

$$u_n \sim v_n$$

et on suppose que (v_n) est à termes réels **positifs**. Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature (elles convergent toutes les deux ou divergent toutes les deux).

Insistons encore une fois : on compare toujours à une série à termes réels **positifs**. On rédigera donc en disant « par comparaison à une série à termes réels positifs ». La série que l'on compare, en revanche, peut ne pas être à termes réels positifs.

VI.2 Quelques remarques

Remarque sur la proposition 1
On a $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^{3/4}} = O\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ (grand O) et pourtant…

Remarque sur la proposition 2
On a $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n^{3/4}} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et pourtant…

Remarque bis sur la proposition 2
Si (v_n) est une suite à termes réels positifs, et si (u_n) est une suite réelle telle que $u_n \sim v_n$, alors au moins à partir d'un certain rang on aura $u_n \geq 0$.
Si (u_n) est une suite à termes complexes non nécessairement réels, ce qui se rencontre nettement plus rarement, on pourra noter que si $u_n \sim v_n$ alors $|u_n| \sim |v_n|$, et donc, ici, $|u_n| \sim v_n$. Il y a donc convergence absolue, donc convergence, de $\sum u_n$.

VI.3 Utilisation

Lorsqu'on doit déterminer la nature de $\sum u_n$, on cherche fréquemment à déterminer un « ordre de grandeur » du terme général. Le plus fréquent est de chercher un équivalent, mais ce peut être aussi un O ou un o. A quoi compare-t-on ? au terme général d'une série de Riemann la plupart du temps, au terme général d'une série géométrique moins souvent.
Il faut donc savoir quoi conclure de :

$|u_n| \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha > 1$:

$u_n \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$, où $\alpha \leq 1$:

$n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$:

$\forall n \geq n_0 \qquad u_n \geq \dfrac{1}{n}$:

Quelques exemples posés lors d'oraux de concours :
Ex 1 Nature de la série de terme général

$$\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+\alpha n^2+\beta n+\gamma}$$

Ex 2

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$

   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas** $\alpha > 0$

   Étudier la nature de la série.
   Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Ex 3

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs. Montrer que :
$$u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature.}$$
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)\ln n}$.
   (i désignant comme d'habitude le nombre complexe $\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)$).

Ex 4 Nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

VI.4 Quelques remarques (suite)

L'exemple fondamental des séries de Riemann, auquel on se réfère le plus souvent, peut donner de fausses idées. Il est vrai que $(1/n^2)$ converge plus vite vers 0 que $(1/n)$, et que cela « explique » que $\sum 1/n^2$ converge alors que $\sum 1/n$ diverge. Mais une suite (u_n) quelconque n'a pas de raison a priori d'être comparable à une suite $(1/n^\alpha)$. Et il n'est pas nécessaire d'avoir $u_n = \mathrm{o}(1/n)$ pour que $\sum u_n$ converge. Déjà, $\displaystyle\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge et on n'a pas $\displaystyle\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$, on a même $\displaystyle\frac{1}{n} = \mathrm{o}\left(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$. Mais même si (u_n) est à termes réels positifs :
Exercice : Trouver une suite (u_n) de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge et telle que l'on n'ait pas $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Et même…
Exercice : Trouver une suite (u_n) de réels positifs telle que $\sum u_n$ converge et telle que l'on n'ait pas $u_n = \mathrm{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

VII Critère de d'Alembert

VII.1 Le critère de d'Alembert

Proposition : Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Si $0 \leq \ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

On ne peut rien conclure de l'hypothèse $\ell = 1$.

(on peut avoir $\ell = +\infty$, dans ce cas on se reporte bien au cas $\ell > 1$).

Démonstration

VII.2 Série exponentielle

Proposition : Soit z un nombre complexe. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge. On définit

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Démonstration Le critère de d'Alembert montre, si $z \neq 0$, la convergence absolue. La seule difficulté est de produire une rédaction parfaite.

Croissances comparées Avec les outils du programme, si on veut retrouver le fait que

$$a^n = \mathrm{o}(n!)$$

le plus simple est d'appliquer le critère de d'Alembert pour dire que la série $\sum \frac{a^n}{n!}$ converge. Donc ne diverge pas grossièrement.

Remarque On pourrait se passer de d'Alembert, et montrer que

$$\frac{z^n}{n!} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

mais c'est pénible. Pour traiter la nature d'une série, il peut y avoir plusieurs méthodes, il y en a souvent une qui est plus simple.

VII.3 Un critère un peu grossier...

Remarquons d'abord que quand le critère de d'Alembert conclut à la divergence, cette divergence est grossière.
Testons le critère de d'Alembert sur la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ (α réel) :

VII.4 ...Mais utile

a. Contexte et rédaction

On a envie d'appliquer le critère de d'Alembert lorsqu'on étudie la convergence d'une série $\sum u_n$ avec, dans l'expression de u_n, des factorielles, des puissances, des choses qui se simplifient bien dans le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.
Le critère de d'Alembert s'applique à des séries à termes strictement positifs. Il est en général appliqué pour montrer des convergences absolues. La rédaction est donc souvent la suivante :
On veut étudier la convergence de $\sum u_n$.
Posons $v_n = |u_n|$.
On a $\forall n \geq n_0 \qquad v_n > 0$.
(si cette condition n'est pas remplie, inutile d'espérer former le quotient $\frac{v_{n+1}}{v_n}$, donc n'espérons rien du critère de D'Alembert).
Calculons :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \ldots\ldots\ldots \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

S'ensuit la conclusion suivant la valeur de ℓ.

b. Quelques exemples (ou pas)

Ex 1 Nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$?

Ex 2 Discuter, suivant les valeurs des nombres réels x et α, la nature de la série $\sum \frac{x^n}{n^\alpha}$. Pour les « cas douteux », on a bien sûr le droit d'appliquer d'autres règles que d'Alembert.

Ex 3 Discuter, suivant les valeurs du réel x, la nature de la série $\sum \binom{2n}{n} x^n$. On ne cherchera pas à résoudre les cas douteux.

Ex 4 Pour quelles valeurs du réel x la série $\sum \sin n \ x^n$ converge-t-elle ?

VIII Lien suites-séries

VIII.1 Préliminaires

Etudier la convergence d'une série, c'est étudier la convergence d'une suite : la suite de ses sommes partielles.
La « réciproque » est-elle vraie ? toute suite peut-elle être écrite comme suite des sommes partielles d'une certaine série ?
Considérons une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et cherchons une suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que les u_n soient les sommes partielles de la série de terme général v_n. Autrement dit, cherchons $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que, pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} v_p \qquad (1)$$

Mais (1) équivaut à

$$v_0 = u_0 \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 1 \quad v_n =$$

(On pose parfois $u_{-1} = 0$ pour que la formule $v_n = \ldots$ soit vraie aussi pour $n = 0$.)

VIII.2 LE théorème

Proposition La nature (convergente, divergente) de la suite (u_n) est la même que celle de la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$.

Proposition (reformulation) La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge.

On parle souvent de « série télescopique » pour ce type de série.
On remarquera que les hypothèses ne sont pas très explicitées...tout simplement parce que ce résultat est vrai pour des suites réelles, complexes, à valeurs dans un espace vectoriel normé...

Un théorème très utile et qui n'a pas vraiment de nom...ce qui est évidemment embarrassant pour la rédaction. Le plus sûr : écrire, quand on veut l'appliquer, « par théorème (lien suites-séries) », mais un simple « par théorème » suffit.

Utilisation On a beaucoup de techniques d'étude pour les séries. Pour étudier une suite, la série télescopique associée sera parfois une bonne idée.

Remarque On peut aussi bien s'intéresser à la convergence de $\sum(u_n - u_{n+1})$ de $\sum(u_n - u_{n-1})\dots$

Prenons trois exemples pour montrer les performances de ce théorème.

VIII.3 Exemple : la constante d'Euler (bis)

On définit, si $n \geq 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. On veut montrer qu'il existe une constante γ telle que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \underset{n\to+\infty}{\mathrm{o}}(1) \tag{1}$$

Pour cela, on définit, si $n \geq 1$,

$$u_n = H_n - \ln n$$

Montrer que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, puis conclure.

Cette méthode est moins naturelle que la comparaison sommes / intégrales, mais elle est rapide…

VIII.4 Exemple : les séries de Riemann (bis)

1. En utilisant un équivalent simple de

$$u_n = \ln(n+1) \ - \ \ln n$$

   et la correspondance suites-séries, retrouver la divergence de la série harmonique.

2. Si $\beta > 0$, trouver un équivalent simple de

$$\frac{1}{n^\beta} - \frac{1}{(n+1)^\beta}$$

   En utilisant encore une comparaison suites-séries, retrouver le critère de convergence des séries de Riemann.

De nouveau, cette méthode est moins naturelle que la comparaison à une intégrale vue précédemment.

VIII.5 Exemple : théorème du point fixe (applications contractantes)

Un classique, hors-programme.
Soit A une partie de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$, et soit $f : A \longrightarrow A$ une application k-lipschitzienne, avec $0 < k < 1$. On considère $c \in A$ et on définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

$$u_0 = c \qquad \text{et} \qquad \forall n \geq 0 \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Montrer que la suite (u_n) converge.
2. On pose $\ell = \lim(u_n)$. On suppose que $\ell \in A$. Montrer que ℓ est l'unique point fixe de f sur A.

Dans l'énoncé classique du théorème, on suppose que A est fermé (voir chapitres de topologie), c'est-à-dire que si une suite d'éléments de A converge, sa limite est nécessairement dans A.

IX Comment rédiger correctement une convergence de série

1. On ne parle pas de la somme d'une série avant d'avoir montré la convergence de cette série. Le symbole $\sum u_n$ (« sigma des u_n ») est un raccourci pour éviter d'écrire « la série de terme général u_n », et ne doit pas être confondu avec le symbole désignant la somme. Il est par exemple incorrect d'écrire « montrons que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge ».
2. Une exception à la règle précédente : lorsqu'une série $\sum u_n$ est à termes **réels positifs**, on accepte parfois l'écriture $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$ pour exprimer la divergence de la série $\sum u_n$. Mais évidemment, écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = \infty$ pour exprimer que cette série diverge serait. . .inadapté.
3. Pour montrer la convergence d'une série, on travaille **presque toujours** sur le terme général, **très rarement** sur les sommes partielles (mais il y a quelques exceptions, voir en particulier les séries géométriques), **jamais** sur la somme de la série (voir ci-dessus) ; par exemple,
   Incorrect : « $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, or $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann), donc $\sum 1/(1+n^2)$ converge »
   Insuffisant : « $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2}$ or $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann), donc $\sum 1/(1+n^2)$ converge »
   Correct : « $\forall n \geq 1 \quad \dfrac{1}{1+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$, or $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann), donc par comparaison à une série à termes réels **positifs** $\sum 1/(1+n^2)$ converge »

   est très bien, même si, en pratique, un réflexe plus courant serait d'écrire
   Correct : « $\dfrac{1}{1+n^2} \sim \dfrac{1}{n^2}$, or $\sum 1/n^2$ est une série convergente , donc par comparaison à une série à termes réels **positifs** $\sum \dfrac{1}{1+n^2}$ converge. »
4. L'utilisation des sommes partielles, maladroite ci-dessus pour des séries à termes réels positifs, est incorrecte pour des démonstrations de convergence absolue :

« $\left|\sum_{n=1}^{p} \frac{(-1)^n}{1+n^2}\right| \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{1+n^2} \leq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n^2}$ or $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann), donc $\sum(-1)^n/(1+n^2)$ converge »

n'est pas correct (en toute rigueur, on a montré qu'une suite de sommes partielles était bornée, cela ne prouve pas qu'elle converge). Il faut écrire « $\left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \frac{1}{1+n^2} \sim \frac{1}{n^2}$, or $\sum 1/n^2$ converge (série de Riemann), donc par comparaison $\sum(-1)^n/(1+n^2)$ converge absolument, donc converge.

X Un classique : les séries de Bertrand

Les séries « de Bertrand » ne sont pas au programme. Elles interviennent dans d'assez nombreux énoncés. Leur étude est très instructive, car elle fait travailler sur les « croissances comparées » les plus classiques. On évitera de parler de séries de Bertrand aux Concours, pour ne pas avoir l'air d'afficher une érudition non souhaitée, mais il faut savoit se débrouiller avec ces séries.

X.1 Une question de croissances comparées

On considère trois réels α, β, γ. On suppose $\alpha < \beta$. Trouver δ tel que

$$\frac{(\ln n)^\gamma}{n^\beta} \ll \frac{1}{n^\delta} \ll \frac{1}{n^\alpha}$$

X.2 Etude directe

Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ suivant la valeur du réel α.

X.3 Comparaison simple

Etudier la nature des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{\sqrt{\ln n}}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{3/2}(\ln n)^{1/2}}$.

X.4 Comparaison moins simple

Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(\ln n)^3}{n^2}$

X.5 Etude générale

Etudier, suivant les valeurs du couple de réels (α, β), la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha\,(\ln n)^\beta}$.

X.6 Ce qu'il faut comprendre

C'est la puissance de n qui est prépondérante. C'est seulement lorsqu'elle est « à la limite » qu'on a besoin de la puissance de $\ln n$ pour déterminer la nature de la série.

X.7 Extension

Ecrire sans démonstration la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^{\alpha}\ (\ln n)^{\beta}\ (\ln(\ln n))^{\gamma}}$, suivant les valeurs du triplet de réels (α, β, γ).

XI A l'oral : les séries alternées sans l'hypothèse de décroissance

On rencontre à l'oral des séries $\sum u_n$ telles que les u_n sont à signes visiblement alternés, convergeant vers 0, mais ne décroissent pas. Ces exercices, un peu artificiels, sont néanmoins de très bons énoncés d'entraînement aux développements asymptotiques et à l'utilisation des critères de convergence.

XI.1 La méthode

On fait un développement asymptotique du terme général u_n de la forme

$$u_n = v_n + w_n$$

où $\sum v_n$ vérifie les hypothèses du théorème sur les séries alternées, et $\sum w_n$ converge absolument.

XI.2 Un premier énoncé

Exercice Etudier la nature de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ suivant la valeur du réel α.
Un énoncé d'oral laisse plus d'initiative au candidat qu'un problème d'écrit. Il faut donc se poser soi-même les questions suivantes.

1. Y-a-t-il des cas dans lesquels la série n'est pas définie ?
2. Y-a-t-il des cas de divergence grossière ?
3. Y-a-t-il des cas de convergence absolue ?
4. On suppose $\alpha > 0$. Trouver un développement asymptotique
$$\frac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{b}{n^{2\alpha}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)$$
5. Conclure.

XI.3 Un deuxième énoncé

On a vu que la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n + \sin n}$$

pouvait se traiter à l'aide du theorème sur les séries alternées. Pourtant, vérifier que l'hypothèse de décroissance de la valeur absolue est bien vérifiée n'est pas immédiat. Et quand on a l'habitude, on préfère faire un développement asymptotique. On pose

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+\sin n}$$

1. Ecrire un développement asymptotique de u_n à la précision $1/n^2$.
2. En déduire que $\sum u_n$ converge.

XI.4 Un peu plus technique

Exercice (oral Mines) Etudier, suivant les valeurs du réel x, la convergence de la série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1-x^n)}$$

XI.5 Un peu plus énigmatique

Exercice (oral Mines) Pour $n \in \mathbf{N}_*$, déterminer la nature de la série $\sum u_n$, où

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

XII Un exercice d'oral X

Montrer que, si $x > 0$, la suite de terme général

$$\frac{n^x\ n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$$

converge. *La limite est* $\Gamma(x)$*. La fonction* Γ *est la plus célèbre des fonctions dites spéciales, on l'étudiera plus tard, pas sous cette forme d'ailleurs.*

XIII Plan d'étude d'une série

Il s'agit surtout ici de faire un petit bilan, parfois utile lorsqu'à l'oral on demande d'étudier, éventuellement suivant les valeurs de certains paramètres, une série $\sum u_n$. Devant la question « Etudier la nature de $\sum u_n$ » on se posera en général les questions suivantes :

Les u_n sont-ils bien définis ?

La suite (u_n) converge-t-elle vers 0 ? Sinon, divergence grossière, c'est terminé...

La suite (u_n) est-elle à termes réels positifs ?

Si la réponse à la question précédente est non, est-on dans le cadre du théorème sur les séries alternées, éventuellement après un développement asymptotique de u_n ?

Si le théorème des séries alternées paraît non pertinent, on se dirige en général vers la convergence absolue...sauf si on pense qu'il faut faire une transformation d'Abel, mais là, cela demande un peu d'expertise...On suppose donc à partir de maintenant qu'on a une **série à termes réels positifs**.

Peut-on écrire $u_n \sim v_n$ où v_n est plus simple que u_n ? Si c'est le cas, on s'intéresse désormais à $\sum v_n$.

Peut-on comparer u_n à un terme général de série de Riemann, $1/n^\alpha$?
Y-a-t-il des chances pour que le critère de d'Alembert s'applique ?

(Pas de hiérarchie entre les deux questions précédentes : si le terme général contient des $\binom{n}{k}$, des factorielles, des puissances, on essayera peut-être d'abord D'Alembert. Mais Riemann est beaucoup plus fréquent.)

A-t-on $u_n = f(n)$ avec f positive décroissante (auquel cas...) ?

Table des matières