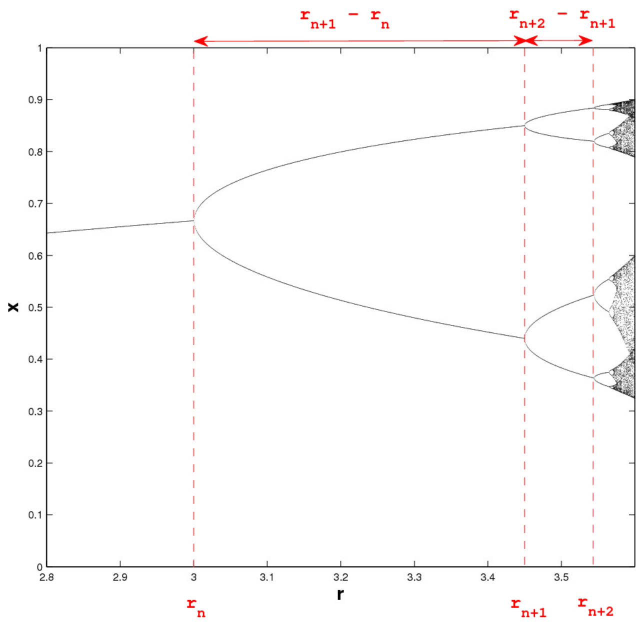
S1 : Suites numériques



L'étude du comportement des suites $u_{n+1} = f(u_n)$ pour une fonction aussi simple que $f : x \mapsto rx(1-x)$ est célèbre : elle met en évidence des phénomènes de « bifurcation », du « chaos », et a permis la définition de la constante de Feigenbaum(1975).

I Quelques préliminaires utiles en Analyse

I.1 Relation d'ordre

La notion de relation binaire, et sa définition, ne sont pas très utiles pour les concours. Il est quand même intéressant de noter que se donner une relation *binaire sur un ensemble E revient à se donner une partie de $E \times E$. En revanche, il faut parfaitement connaître la défintion d'une relation d'ordre ou d'une relation d'équivalence.*

a. Relation binaire

Si E est un ensemble et A une partie de $E \times E$, on peut définir une « relation binaire » $\mathscr{R}$ sur E par

$$x\mathscr{R}y \iff (x, y) \in A$$

Deux sortes de relations binaires nous intéressent dans le cadre du programme : les relations d'ordre (plutôt en Analyse) et les relations d'équivalence (plutôt en Algèbre).

b. Relation d'ordre

Soit E un ensemble non vide, $\mathscr{R}$ une relation binaire sur E. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur E lorsqu'elle est

— réflexive :
$\forall x \in E \qquad x\mathscr{R}x$

— antisymétrique :
$\forall (x, y) \in E^2 \qquad \left(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x\right) \Longrightarrow \left(x = y\right).$

— transitive :
$\forall (x, y, z) \in E^3 \quad \left(x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}z\right) \Longrightarrow \left(x\mathscr{R}z\right).$

c. Ordre total, ordre partiel

Définition On dit que la relation d'ordre $\mathscr{R}$ sur E est **totale** lorsque, pour tout couple (x, y) d'éléments de E, $x\mathscr{R}y$ ou $y\mathscr{R}x$ (*autrement dit, lorsque deux éléments quelconques de E sont « comparables » par $\mathscr{R}$*). Un ordre non total est appelé ordre **partiel**.

Deux exemples très simples, très classiques, très importants :

Exemple 1 $\leq$ sur R

La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur **R** (la relation $<$ ne l'est pas).

La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur **R**.

Comme chacun sait, la relation $\geq$, c'est la relation $\leq$ pour celles et ceux qui préfèrent écrire de droite à gauche.

Exemple 2 $\subset$ sur $\mathscr{P}(X)$

La relation $\subset$ sur $\mathscr{P}(X)$ (ensemble des parties de X, où X est un ensemble quelconque) est une relation d'ordre, cet ordre est partiel (en général, si $(A, B) \in \mathscr{P}(X)^2$, on n'a ni $A \subset B$ ni $B \subset A$).

Petites questions :

Q1 On utilise couramment, en arithmétique, une relation d'ordre partiel sur $\mathbf{N}_*$: laquelle ?
Q2 Les relations « est négligeable devant » (alias petit o) et « est dominée par » (alias grand O) sont-elles des relations d'ordre sur l'ensemble des suites de nombres réels strictement positifs ?
Q3 On suppose donnés des ensembles $E_1, \ldots, E_n$ ($n \geq 1$) et, pour chaque k, une relation d'ordre total $\mathscr{R}_k$ sur E_k. Utiliser ces relations pour définir une relation d'ordre total sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

d. majorant, maximum, plus grand élément

Le programme ne parle de maximum ou d'élément maximal que sur **R** *muni de $\leq$. Les notion de majorant, de plus grand élément sont simples. On prendra donc les lignes suivantes sans inquiétude, pour travailler un peu sur la compréhension des relations d'ordre.*

(i) Partie majorée, majorant d'une partie

On considère un ensemble E non vide, muni d'une relation d'ordre $\mathscr{R}$. Soit A une partie de E, x un élément de E. On dit que x majore A, ou que x est un majorant de A, lorsque

$$\forall a \in A \qquad a \mathscr{R} x$$

S'il existe un tel élément, x, la partie A est dite « majorée ».

Petits exemples :

Q1 : Dans $\mathbf{R}$, pour la relation $\leq$, quels sont les majorants de $[1,2[$?

Q2 : Soit X un ensemble non vide. Quelles sont les parties de $\mathscr{P}(X)$ majorées pour la relation $\subset$?

Q3 : Pour la relation de divisibilité, quels sont les majorants de la partie finie $\{n_1, \ldots, n_q\}$ de $\mathbf{N}_*$?

(ii) Elément maximal

Cette définition n'est au programme que pour $(\mathbf{R}, \leq)$

Un élément a de A est dit **maximal** dans A si le seul élément x de A qui vérifie $a\mathscr{R}x$ est a. On dit aussi que a est un maximum.

Petites questions :

Q1 : Dans $(\mathbf{R}, \leq)$, quels sont (s'il y en a) les éléments maximaux de $[1,2[$?

Q2 (h.p.) : Dans $(\mathscr{P}(X), \subset)$, soit $A = \{\{x\}\ ;\ x \in X\}$. Quels sont (s'il y en a) les éléments maximaux de A ?

Q3 (h.p.) : Dans $(\mathbf{N}_*, \mid)$, quels sont (s'il y en a) les éléments maximaux de $\{1, 2, 3, \ldots, 12\}$?

(iv) Unicité, non unicité, plus grand élément

Cas d'un ordre total

Si l'ordre est total, il y a au plus un maximum.
S'il y en a effectivement un, on parle alors du maximum de A, on le note $\max(A)$. On l'appelle alors parfois plus grand élément.
Mais même si A est majorée, elle n'admet pas nécessairement un maximum (exemple : $[3,6[$ dans $(\mathbf{R},\leq)$).

Cas d'un ordre partiel

Si l'ordre est partiel, il peut y avoir plusieurs maximums dans A. Mais comme on l'a dit, le programme suggère de ne pas s'intéresser à ce cas.

(v) Autres définitions

On définit de même minorant, partie minorée, élément minimal ou minimum.
Une partie bornée est une partie à la fois minorée et majorée.

I.2 Familles

Ce n'est pas un objet mathématique nouveau, c'est une notation parfois utilisée pour des applications.
Soit X, I deux ensembles. Une « famille » d'éléments de X indexée par I est une application de I dans X :

$$\begin{array}{cccc} x: & I & \longrightarrow & X \\ & i & \longmapsto & x(i) \end{array}$$

que l'on note $(x_i)_{i\in I}$.
Par exemple, une suite est une famille indexée par $\mathbf{N}$ (ou parfois $\mathbf{N}_*$, ou $[\![n_0, +\infty[\![$).
Lorsqu'on fait de l'analyse, on utilise presque toujours la notation « famille » pour désigner une suite : « soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite… ».
Lorsqu'on fait de l'algèbre (linéaire), on dira plutôt « soit $u \in \ldots^{\mathbf{N}}$ une suite ».

I.3 Entiers naturels

On n'aborde pas ici le problème très intéressant de la définition de $\mathbf{N}$*. On ne rappelle pas non plus la définition et les propriétés de l'addition et de la multiplication. On utilise beaucoup* $\mathbf{N}$ *: comme ensemble d'indexation des suites, bien sûr, mais aussi pour parler de dénombrabilité et de sommabilité.*

a. Récurrence

Axiome de récurrence

Si une partie A de $\mathbf{N}$ contient 0, et si

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \left(n \in A\right) \Rightarrow \left(n+1 \in A\right)$$

alors $A = \mathbf{N}$.

On l'utilise souvent de la manière suivante :
Supposons que $\mathscr{P}(n)$ désigne une propriété de l'entier naturel n. Alors, si $\mathscr{P}(0)$ est vraie (« initialisation ») et si, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1) \qquad \text{(« hérédité »)}$$

on peut conclure : $\quad \forall n \in \mathbf{N} \quad \mathscr{P}(n)$.

On est amené également parfois à utiliser :
si $\mathscr{P}(0)$ et si, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\Big(\forall p \leq n \quad \mathscr{P}(p)\Big) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$$

alors $\qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad \mathscr{P}(n)$.
L'appellation « récurrence forte » pour qualifier cette dernière forme ne correspond qu'à une (utile) habitude de rédaction.

Il faut surtout éviter les récurrences mal posées, qui fâchent (légitimement) les correcteurs et examinateurs. Pour l'hérédité, on pourra donc dire à peu près :
« soit $n \in \mathbf{N}$; montrons que $\mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$ »
et on évitera ainsi l'utilisation dangereuse des quantificateurs. Il faut en effet à tout prix s'interdire de transformer

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad \mathscr{P}(n) \Rightarrow \mathscr{P}(n+1)$$

(l'hérédité, correctement écrite) en

$$\Big(\forall n \in \mathbf{N} \quad \mathscr{P}(n)\Big) \;\Rightarrow\; \mathscr{P}(n+1)$$

qui n'a pas de sens.

Un bon principe de rédaction semble être de ne pas utiliser de $\forall$ pour rédiger une récurrence. On évitera alors assez facilement une rédaction « sanctionnable ».

b. Un exemple classique de rédaction de récurrence

On rappelle la formule

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Qui se retrouve par exemple en opérant des transformations classiques :

$$\begin{aligned} \cos p + \cos q &= \mathrm{Re}\left(e^{ip} + e^{iq}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(e^{i(p+q)/2}\left(e^{i(p-q)/2} + e^{i(q-p)/2}\right)\right) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(T_n)_{n\geq 0}$ dans $\mathbf{R}[X]$ telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad \forall \theta \in \mathbf{R} \qquad \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

c. Propriétés liées à l'ordre

Toute partie non vide de $\mathbf{N}$ a un minimum pour la relation $\leq$ (on l'appelle parfois plus petit élément, abrégé en ppe), toute partie non vide majorée de $\mathbf{N}$ a un plus grand élément (pge).

d. Plus petit élément

La propriété de récurrence est équivalente à la propriété suivante : toute partie non vide de $\mathbf{N}$ a un plus petit élément.

I.4 Nombres réels

Toute construction de $\mathbf{R}$ *est hors-programme. On peut considérer que l'on a une idée intuitive de ce que sont les nombres réels lorsqu'on dessine la « droite réelle »...si ces nombres s'appellent réels, c'est qu'on peut considérer qu'ils le sont!*

a. Propriétés algébriques

$(\mathbf{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.
Pour détailler, l'ensemble $\mathbf{R}$ est donc muni de deux lois internes,
associatives ($a + (b + c) = (a + b) + c$, idem pour $\times$),
commutatives ($a \times b = b \times a$, idem pour $+$),
admettant des éléments neutres (0 et 1),
et telles que
Tout réel a un symétrique pour $+$ (appelé opposé)
Tout réel non nul a un symétrique pour $\times$ (appelé inverse)
La loi $\times$ est distributive sur la loi $+$:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

(La commutativité de $\times$ *autorise à se contenter de la distributivité « à gauche) »*

b. Compatibilités de l'ordre, manipulation des inégalités

La relation $\leq$ est une relation d'ordre total sur $\mathbf{R}$, compatible avec les lois $+$ et $\times$:

$$\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \qquad a \leq b \implies a+c \leq b+c$$

$$\forall (a,b,c) \in \mathbf{R}^3 \qquad (a \leq b \quad \text{et} \quad 0 \leq c) \implies ac \leq bc$$

On ajoute couramment des inégalités « de même sens »,

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 \qquad \begin{cases} a \leq b \\ c \leq d \end{cases} \implies a+c \leq b+d$$

et on multiplie des inégalités de même sens entre nombres réels positifs

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 \qquad \begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 \leq c \leq d \end{cases} \implies ac \leq bd$$

La fonction $x \longmapsto 1/x$ est décroissante sur $\mathbf{R}_*^+$ et sur $\mathbf{R}_*^-$, mais pas sur $\mathbf{R}$. Donc on doit fait attention :

$$0 < a \leq b \implies 0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$$

et donc, également,

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4 \qquad \begin{cases} 0 \leq a \leq b \\ 0 < c \leq d \end{cases} \implies \frac{a}{d} \leq \frac{b}{c}$$

que l'on retient en général en disant que « majorer un quotient, c'est majorer le numérateur et/ou minorer le dénominateur ».
Signalons enfin que, si on veut majorer ou minorer une expression, c'est souvent pour montrer que quelque chose est borné. Or « borné » équivaut à « majoré en valeur absolue ». On doit donc souvent majorer :

$$|f(x)| \leq \ldots$$

et une erreur à ne pas commettre est de majorer à l'intérieur de la valeur absolue. En effet, on n'a surtout pas

$$a \leq b \Rightarrow |a| \leq |b|$$

On évitera par exemple ce genre d'erreur :

$$|f(t)\sin t + 1| \leq |1 + f(t)|$$

la majoration de la valeur absolue d'une somme commence à peu près systématiquement par une utilisation de l'inégalité triangulaire :

$$|f(t)\sin t + 1| \leq |f(t)\sin t| + 1 \leq |f(t)| + 1$$

Exercice : Soit $a \in]0,1[$, $n \in \mathbf{N}_*$. Alors, si $|x| \leq a$,

$$\left|\frac{x^n}{1-x^n}\right| \leq ?$$

(le majorant cherché doit dépendre de a et de n seulement, pas de x).

c. Archimédisme

R est **archimédien** : pour tous réels strictement positifs a et ϵ, il existe un entier naturel n tel que $n\epsilon \geq a$.
On utilise en général cette propriété sans trop y penser, par exemple lorsqu'on dit que la suite de terme général $1/n$ *converge vers* 0.

d. Propriété de la borne supérieure

Théorème (propriété de la borne supérieure) :

Toute partie non vide et majorée de **R** a un plus petit majorant

Autrement dit, l'ensemble des majorants d'une partie, s'il est non vide, a un minimum (ou un plus petit élément). Ce plus petit majorant est appelé « borne supérieure » ; de même, toute partie non vide minorée a une « borne inférieure ».

Cette propriété de **R** *est fondamentale en analyse. Par exemple, elle implique qu'une suite croissante majorée de réels converge. L'ensemble* **Q** *des nombres rationnels n'a pas cette propriété. D'où la nécessité, pour faire de l'Analyse, de « compléter »* **Q** *en rajoutant les nombres réels irrationnels.*

Problèmes de rédaction Un raisonnement mettant en jeu des bornes supérieures doit être rédigé proprement, en évitant le vague « par passage à la borne supérieure » qui n'a pas de signification précise. Par exemple, soit X est un ensemble, f et g deux fonctions définies sur X et à valeurs réelles telles que

$$\forall x \in X \qquad f(x) \leq g(x)$$

On définit $A = \{f(x)\ ;\ x \in X\}$ et $B = \{g(x)\ ;\ x \in X\}$. Montrons que si B est majorée, alors A l'est, et $\sup(A) \leq \sup(B)$.
Mauvaise rédaction : On a

$$\forall x \in X \qquad f(x) \leq g(x)$$

donc, par passage à la borne supérieure,

$$\sup(A) \leq \sup(B)$$

Bonne rédaction : On a

$$\forall x \in X \qquad f(x) \leq g(x) \leq \sup(B)$$

Donc A est majorée (par $\sup(B)$) et, sa borne supérieure étant son plus petit majorant,

$$\sup(A) \leq \sup(B)$$

A retenir
Montrer que $\sup(A) \leq a$, c'est montrer que

$$\forall x \in A \qquad x \leq a$$

Cette remarque (remplacement de la borne supérieure par un quantificateur universel) est élémentaire, mais importante pour les rédactions.

Exemple : On note L l'ensemble des applications réelles lipschitziennes sur $[0,1]$: si f est une application définie sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbf{R}$, $f \in L$ si et seulement si il existe $k \geq 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2 \qquad |f(y) - f(x)| \leq k|y-x|$$

et on note alors

$$\nu(f) = \sup_{x \neq y} \left(\frac{|f(y) - f(x)|}{|y-x|} \right)$$

[On devrait noter

$$v(f) = \sup\left(\left\{\frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}\ ;\ (x, y) \in [0, 1] \setminus D\right\}\right)$$

où $D = \{(x, x)\ ; x \in [0, 1]\}$ mais l'abus de notation commis ci-dessus est tout-à-fait usuel et admis]

Montrer que si f et g sont dans L, $f + g \in L$, et

$$v(f + g) \leq v(f) + v(g)$$

e. Intervalles

On appelle **intervalle** de $\mathbf{R}$ un ensemble de l'un des types suivants :

$]-\infty, +\infty[(= \mathbf{R}),\ ]-\infty, a],\ ]-\infty, a[,\ [a, b],\ [a, b[,\ ]a, b],\ ]a, b[,\ [a, +\infty[,\ ]a, +\infty[$

où l'on définit par exemple

$$]-\infty, a] = \left\{x \in \mathbf{R} / x \leq a\right\}.$$

Proposition :

Les intervalles de $\mathbf{R}$ sont les **parties convexes** de $\mathbf{R}$: autrement dit, I est un intervalle si et seulement si

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall t \in [0, 1] \qquad tx + (1 - t)y \in I$$

(point de vue barycentrique) ou

$$\forall (x, y) \in I \quad \forall t \in [0, 1] \qquad x + t(y - x) \in I$$

(point de vue cinématique),

c'est-à-dire si et seulement si tout segment à extrémités dans I est tout entier inclus dans I.

Bref, un intervalle est une partie de $\mathbf{R}$ *« sans trou ». Très utile si on veut parler d'intervalle sans devoir examiner 9 cas.*

f. Valeur absolue

On définit $|x| = \max(x, -x)$. La distance entre deux réels x et y est par définition $|x - y|$. On a alors **l'inégalité triangulaire** :

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

d'où l'on tire, bien utile aussi

$$|x-y| \geq \big||x|-|y|\big|$$

et $|x+y| \geq \big||x|-|y|\big|$.

g. Congruence modulo un réel non nul

On dit que x et y sont congrus modulo a, et on note $x \equiv y\ [a]$ lorsqu'il existe un entier $n \in \mathbf{Z}$ tel que $x - y = na$. La relation de congruence modulo a est une relation d'équivalence sur $\mathbf{R}$.
On l'utilise principalement avec $a = \pi$ ou $a = 2\pi$, quand on travaille avec cosinus, sinus, tangentes...

h. Partie entière

Définition

La **partie entière** d'un réel est le plus grand entier inférieur ou égal à ce réel ; $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier vérifiant $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Les anciennes notations $[x]$ et $\mathrm{E}(x)$ sont susceptibles d'être rencontrées dans un problème (surtout la première), mais elles seront introduites par l'énoncé.

On remarquera que l'on peut écrire $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$.

Exercice

Si x est réel, définir en utilisant la partie entière une suite de nombres décimaux qui converge vers x (on dit que y est un nombre est décimal lorsqu'il existe p tel que $10^p y \in \mathbf{Z}$).

II Convergence des suites de nombres réels ou complexes

Une suite u de nombres réels ou complexes est généralement notée $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ (notation « famille »). On peut sans inconvénient la noter $(u_n)_{n\geq 0}$. Bien des suites ne sont indexées qu'à partir du rang 1, ou n_0, on note donc $(u_n)_{n\geq 1}$ (plus agréable que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}_*}$), $(u_n)_{n\geq n_0}\dots$
Lorsqu'on parle d'une suite quelconque, on se permet souvent d'écrire « la suite (u_n) » sans indexer. Attention à bien mettre les parenthèses : on ne doit pas confondre la suite (u_n) et u_n, terme d'indice n de la suite.

II.1 Limites de suites

a. Ecritures avec quantificateurs

On dit que la suite de nombres réels ou complexes $(u_n)_n$ a pour limite a lorsque

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \qquad |u_n - a| \leq \epsilon$$

On dit que la suite de réels $(u_n)_n$ a pour limite $+\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_n \geq A$$

On dit que la suite de réels (u_n) a pour limite $-\infty$ lorsque

$$\forall A \in \mathbf{R} \quad \exists N \in \mathbf{N} \quad \forall n \geq N \qquad u_n \leq A$$

S'il y a une limite, elle est unique.
On dit qu'une suite converge lorsqu'elle a une limite finie. Sinon, elle diverge (une suite réelle qui a une limite infinie est donc divergente).

b. Deux lemmes utiles

Proposition Toute suite convergente est bornée.

Proposition Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite réelle ; si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$, alors il existe $\delta > 0$ tel qu'à partir d'un certain rang, $u_n \geq \delta$.
En particulier, à partir d'un certain rang, $u_n > 0$.

c. Suites de complexes

Si $(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{C}^{\mathbf{N}}$, alors la suite (u_n) converge si et seulement si les suites réelles $\big(\mathrm{Re}(u_n)\big)$ et $\big(\mathrm{Im}(u_n)\big)$ convergent, et, le cas échéant,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\big(\mathrm{Re}(u_n)\big) + i \lim_{n\to+\infty}\big(\mathrm{Im}(u_n)\big)$$

Autrement dit, la partie réelle (resp. imaginaire) de la limite est la limite de la suite des parties réelles (resp. imaginaires).

II.2 Opérations sur les limites de suites

a. Suites convergentes

On considère ici des suites de nombres réels ou complexes ;

Combinaison linéaire

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ', si a et b sont deux nombres réels ou complexes fixés, alors $(au_n + bv_n)$ converge vers $a\ell + b\ell'$,

Produit

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ' $(u_n v_n)$ converge vers $\ell\ell'$.

Quotient

Si (u_n) et (v_n) convergent vers ℓ et ℓ', si de plus $\ell' \neq 0$, alors (u_n/v_n), bien définie au moins à partir d'un certain rang, converge vers ℓ/ℓ'.

Produit encore

Si (u_n) converge vers 0 et si (v_n) est bornée, alors $(u_n v_n)$ converge vers 0.

b. LImites infinies

Dans les résultats suivants, on considère des suites de nombres **réels** :

Proposition 1

Si (u_n) diverge vers $+\infty$ et si (v_n) est minorée, alors $(u_n + v_n)$ diverge vers $+\infty$.

Proposition 2

Si (u_n) diverge vers $+\infty$ et si (v_n) est minorée à partir d'un certain rang par un réel strictement positif, alors $(u_n v_n)$ diverge vers $+\infty$.

II.3 Majorations, minorations

Ici, on ne considère que des suites **réelles** :

a. Conservation des inégalités larges

Proposition :

Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq a$, si (u_n) a pour limite ℓ, alors $\ell \leq a$ (ℓ et a sont des réels).

On dit que les inégalités larges « passent à la limite ». Les inégalités strictes, lorsque l'on passe à la limite, deviennent larges.

b. Théorème des gendarmes

Théorème d'encadrement, parfois dit « des gendarmes » :

Si (u_n) et (v_n) ont une même limite ℓ, et si, au moins à partir d'un certain rang,

$$u_n \leq w_n \leq v_n$$

alors (w_n) a pour limite ℓ.

Théorème :

Si (v_n) converge vers 0, si ℓ est un réel, et si

$$\forall n \geq n_0 \qquad |u_n - \ell| \leq v_n$$

alors (u_n) converge vers ℓ.

Théorème :

Si (u_n) diverge vers $+\infty$, et si

$$\forall n \geq n_0 \qquad v_n \geq u_n$$

alors (v_n) diverge vers $+\infty$.

On n'aura pas trop de peine à écrire un résultat analogue pour $-\infty$.

II.4 Suites monotones

a. Grands théorèmes

On a peu de résultats permettant de montrer qu'une suite converge sans connaître à l'avance sa limite (autrement dit, il est plus facile de montrer qu'une suite (u_n) converge vers une limite ℓ donnée que de montrer qu'une suite (u_n) converge sans savoir vers quoi). Le principal résultat dont on dispose est :

Théorème (suites monotones bornées) :

Toute suite croissante majorée de nombres réels converge . Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.

Démonstration *ne sera pas demandée aux concours.*
On utilise la propriété de la borne supérieure : si (u_n) est croissante et majorée, on peut définir

$$\alpha = \sup_n(u_n) = \sup\left(\{u_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\}\right)$$

et on démontre que la suite (u_n) converge vers α. Rédigeons :
Soit $\epsilon > 0$. Il existe n_0 tel que

$$u_{n_0} \geq \alpha - \epsilon$$

(sinon $\alpha-\epsilon$ majorerait (u_n), or α est le plus petit majorant). Mais le fait que (u_n) soit croissante et majorée par α donne alors

$$\forall n \geq n_0 \qquad \alpha - \epsilon \leq u_n \leq \alpha$$

et on conclut.

Résultat analogue pour les suites décroissantes minorées et non minorées.

Théorème (suites adjacentes) :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que $(u_n - v_n)$ converge vers 0. Elles convergent alors vers une limite commune.
Bien connaître les hypothèses de ce théorème.

Un exemple célèbre : On définit, si $n \in \mathbf{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

et

$$v_n = u_n + \frac{1}{n\, n!}$$

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. Montrer que leur limite commune (on admet que c'est le célèbre nombre e) est irrationnelle.

En fait, e est beaucoup plus qu'irrationnel, il est transcendant, mais c'est plus difficile à montrer.

Théorème (segments emboîtés) :

Soit $(I_n)_{n\geq 0}$ une suite de segments décroissante pour l'inclusion (ce qui signifie : pour tout n, $I_{n+1} \subset I_n$). Alors $\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$ est un segment. Si de plus la suite des longueurs des segments converge vers 0, $\bigcap_{n=0}^{+\infty} I_n$ est un singleton

Un corollaire : $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration (h.p.) : En fait, on va montrer « mieux » : si $a < b$, le segment $[a, b]$ n'est pas dénombrable.

Supposons, par l'absurde,

$$[a, b] = \{x_n\ ;\ n \in \mathbf{N}\}$$

Des trois segments $\left[a, a + \frac{b-a}{3}\right]$, $\left[a + \frac{b-a}{3}, a + 2\frac{b-a}{3}\right]$, $\left[a + \frac{b-a}{3}, a + 2\frac{b-a}{3}\right]$, au moins un ne contient pas x_0. Soit I_0 un tel segment.

...

b. Remarques

Il vaut mieux savoir que la condition

$$u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

n'est pas du tout suffisante pour assurer la convergence de la suite (u_n).
Exemple :

Si on est plus exigeant, et si on impose :
Pour tout $p \in \mathbf{N}$, $u_{n+p} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$,
cela suffit-il à assurer la convergence de (u_n) ?

II.5 Etude des suites récurrentes

Au programme, seul le b) (question Q1) est exigible. Il y a donc ici très peu à apprendre, mais des choses qu'il est utile de comprendre, de « voir » doit-on dire car le sujet se prête bien aux représentations graphiques. Cette vision graphique des choses peut aussi bien servir lors d'un problème d'écrit CCP qu'à un oral X-ens. Les suites récurrentes sont plus présentes aux oraux qu'aux écrits de concours.

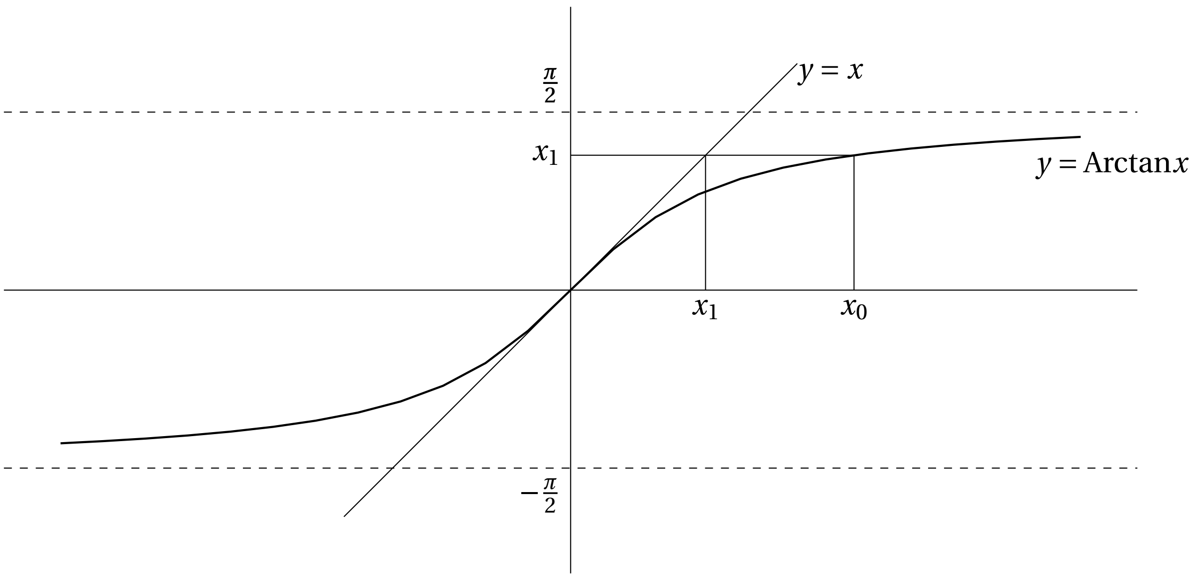
a. Principes

Soit A une partie de $\mathbf{R}$ ou de $\mathbf{C}$, f une application de A dans A. Si $c \in A$, on peut définir une unique suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ par

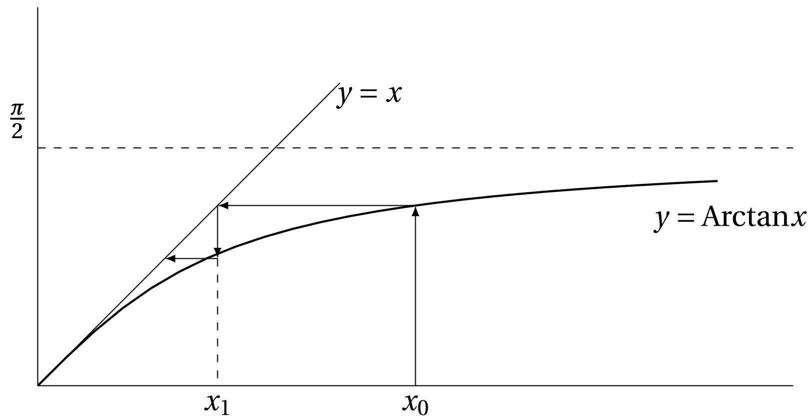
$$u_0 = c \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

La condition $f(A) \subset A$ est nécessaire pour que la suite soit bien définie.
En général, on étudie des suites réelles, la fonction f est donc définie sur une partie de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, et si f n'est pas trop compliquée le tracé de son graphe peut être instructif. Il faut donc comprendre comment fonctionne le dessin suivant, et savoir le refaire (on considère ici une suite vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad x_{n+1} = \text{Arctan}(x_n) \quad)$$



Quand on a compris comment cela fonctionnait, on supprime quelques traits inutiles, pour mieux visualiser la « dynamique » de la suite :



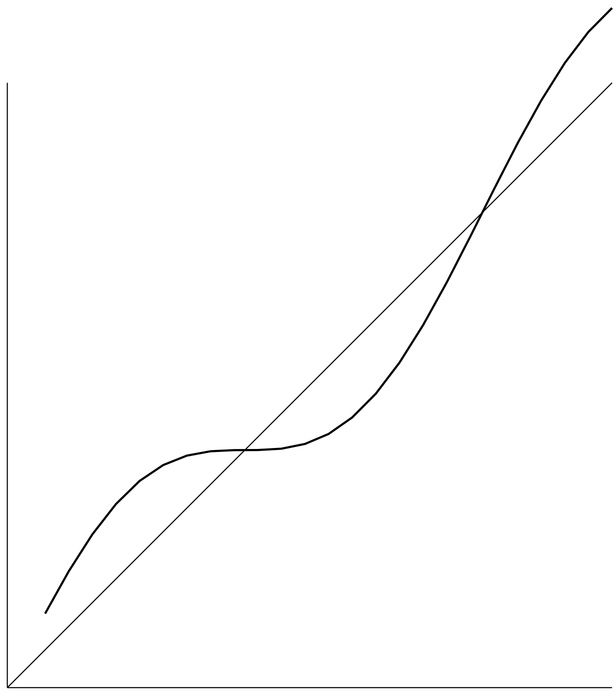
b. Une remarque fondamentale

Q1 Soit A une partie de $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, f une fonction définie sur A et prenant ses valeurs dans A (autrement dit, $f(A) \subset A$). Soit $c \in A$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par

$$x_0 = c \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N} \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

On suppose que (x_n) converge, on note ℓ sa limite. Si f est continue en ℓ, quelle équation vérifie ℓ ? *Résultat à connaître.*

c. Cas des fonctions croissantes



Q2 Soit I un intervalle. Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction croissante. Démontrer que tout suite (x_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n)$$

est monotone.

d. Cas des fonctions décroissantes

Pourquoi ne feriez-vous pas le dessin vous-même, pour une fois ? dessiner pour guider son intuition est une compétence utile...

Q3 Soit I un intervalle. Soit $f : I \longrightarrow I$ une fonction décroissante. Soit (x_n) une suite telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n) .$$

La suite (x_n) est-elle nécessairement monotone ?

Q4 Soit I un intervalle. Soit $f\ :\ I \longrightarrow I$ une fonction décroissante. Soit (x_n) une suite telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n)\ .$$

Quelle propriété des suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) va-t-on chercher à montrer pour établir la convergence de la suite (x_n) ?

Attention donc à ne pas mémoriser un résultat qui « sonne bien » mais qui est complètement faux : si f croît (resp. décroît), alors (x_n) croît (resp. décroît).

e. Cas des fonctions contractantes

Remarquons que le fait d'être lipschizienne n'a rien à voir avec le fait d'être monotone : il y a des fonctions lipschitziennes non monotones, des fonctions monotones non lipschitziennes, des fonctions monotones lipschitziennes, des fonctions non monotones non lipschitziennes.

Soit I un intervalle de $\mathbf{R}$, et soit $f\ :\ I \longrightarrow I$ une fonction k-lipschitzienne, avec $0 \leq k < 1$. Rappelons que cela signifie :

$$\forall (x,y) \in I^2 \qquad \left|f(x) - f(y)\right| \leq k|x-y|$$

On suppose de plus que f admet un point fixe a :

$$f(a) = a$$

Q5 Montrer que a est le seul point fixe de f dans I.

Q6 Soit (x_n) une suite d'éléments de I telle que

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad x_{n+1} = f(x_n)\ .$$

Montrer que (x_n) converge vers a.

Remarque : Le principal résultat du programme qui permet de montrer qu'une fonction est lipschitzienne est l'inégalité des accroissements finis :

Si f est de classe C^1 sur un intervalle I, et si $|f'| \leq M$ sur I, alors f est M-lipschitzienne sur I.

f. Des exemples

Exercice 1 (Oral Mines) : Etudier la convergence de la suite définie par $u_0 > 0$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \ln(3 + u_n)$$

Exercice 2 (première question de certains exercices à l'oral) Etudier la convergence de la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$u_{n+1} = \sin u_n$$

Exercice 3 : Etudier la convergence de la suite définie par $u_0 \in \mathbf{R}$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

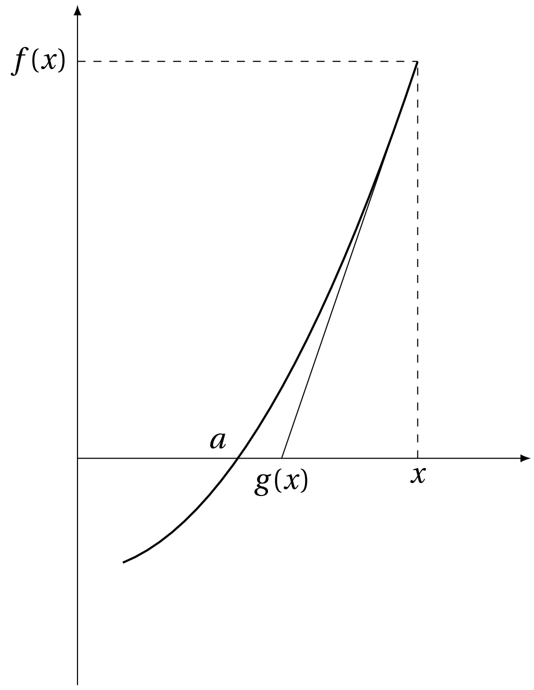
$$u_{n+1} = \cos u_n$$

g. Méthode de Newton

Plus rien n'est au programme à ce sujet. Néanmoins, savoir ce qu'est la méthode de Newton pour la recherche d'une solution d'une équation

$$f(x) = 0$$

fait partie de la culture générale. Et il vaut donc mieux savoir faire les calculs qui suivent.



Q7 Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, de classe C^1. Soit $x \in I$ tel que $f'(x) \neq 0$. Ecrire l'équation de la tangente au graphe de f en $(x, f(x))$. Déterminer l'abscisse $g(x)$ de l'intersection de cette tangente avec l'axe (Ox).
Q8 Soit a tel que $f(a) = 0$. Vérifier que a est un point fixe de g. Si on suppose f de classe C^2 sur I et $f'(a) \neq 0$, calculer $g'(a)$.

Commentaire : La méthode de Newton part de x_0 et itère la relation

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

(on l'appelle aussi méthode des tangentes). Il peut se passer un peu n'importe quoi (si une tangente est horizontale, elle ne coupe pas l'axe des abscisses, et l'algorithme ne peut plus être poursuivi). Mais si on part près d'un zéro a de f, la convergence est très rapide (elle est « quadratique »).

Table des matières