S7 : Sommabilité, sommes

I Sommes finies

I.1 Quelques sommes classiques

Il faut connaître

$$\sum_{k=1}^{n} k =$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 =$$

Les savoir par cœur est prudent, car si elles sont faciles à vérifier par récurrence, la deuxième n'est pas forcément très simple à « découvrir ».
C'est bien de savoir continuer (on développe $(k+1)^4$ par la formule du binôme, on ajoute ces identités pour $k = 0, \dots, n$, on obtient $\sum_{k=1}^{n} k^3$, etc…)

On sait aussi calculer

$$\sum_{k=0}^{n} x^k$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

La formule
$$\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right)=\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right) \qquad ,$$
si I et J sont deux ensembles finis, est une conséquence de la commutativité de l'addition (l'associativité intervient plus tôt : dans la possibilité même d'écrire un $\sum$).

Dans le cas de sommes triangulaires, l'interversion peut aussi se faire (on peut imaginer qu'on ajoute des termes nuls) : par exemple, il faut être à l'aise avec
$$\sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j}\right)=\sum_{j=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j} a_{i,j}\right)$$

Signalons enfin la distributivité de la multiplication sur l'addition (si on est dans un anneau), qui permet d'écrire
$$\left(\sum_{i\in I} a_i\right)\left(\sum_{j\in J} b_j\right)=\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_i b_j\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j$$

II Ensembles dénombrables

II.1 Parties de N

Proposition Toute partie de $\mathbf{N}$ est finie ou en bijection avec $\mathbf{N}$.

Démonstration On veut montrer que toute partie infinie de $\mathbf{N}$ est en bijection avec $\mathbf{N}$. Si A est une telle partie, on définit $\phi(0) = \min(A)$ et, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\phi(n+1) = \min\big(A \cap [\![1+\phi(n), +\infty[\![\big)$. On définit ainsi par récurrence une application strictement croissante de $\mathbf{N}$ dans A. Elle est surjective (soit $a \in A$; comme $\phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, il existe $n \in \mathbf{N}$ unique tel que $\phi(n) \leq a < \phi(n+1)$, et alors nécessairement $a = \phi(n)$).

II.2 Dénombrabilité

Définition On dit qu'un ensemble A est dénombrable lorsqu'il existe une bijection entre A et $\mathbf{N}$.

Proposition Un ensemble est fini ou dénombrable si et seulement si il est en bijection avec une partie de $\mathbf{N}$.

Corollaire Une partie d'un ensemble dénombrable est finie ou dénombrable.

On dit parfois « au plus dénombrable » pour « fini ou dénombrable ».

II.3 Exemples et contre-exemples

Proposition $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable ; tout intervalle de $\mathbf{R}$ non réduit à un point est non dénombrable.

Démonstration A la fois non exigible et intéressante. Et surtout, multiple...

Il suffit de montrer que $[0,1]$ est dénombrable, ce qui peut se faire par théorème des segments emboîtés, mais le procédé diagonal de Cantor est plus amusant et probablement plus utile, rappelons-le rapidement :

Si $[0,1[$ est dénombrable, on peut « énumérer » ses éléments :

$r_1 = 0, a_{1,1}a_{1,2}a_{1,3}a_{1,4}\dots$

$r_2 = 0, a_{2,1}a_{2,2}a_{2,3}a_{2,4}\dots$

$r_3 = 0, a_{3,1}a_{3,2}a_{3,3}a_{3,4}\dots$

$\dots$

Et on considère $r = 0, d_1 d_2 d_3 \dots$ avec $d_k = 1$ si $a_{k,k} \neq 1$, $d_k = 2$ si $a_{k,k} = 1$ (plusieurs constructions possibles, évidemment). On construit ainsi un élément de $[0, 1[$ qui n'est égal à aucun des r_k.

Il est conseillé de comprendre ce procédé pour l'oral X-ens.

Remarque : La non dénombrabilité de **R** se rencontre parfois sous d'autres formes.

Exemple - exercice : Démontrer que $\mathscr{P}(\mathbf{N})$ n'est pas dénombrable.

Lemme $\mathbf{N}^2$ est dénombrable.

Donnons-en deux démonstrations intéressantes, à visualiser !

Démonstration « graphique » Sans être à proprement parler exigible, c'est de la culture mathématique. La démonstration classique de Cantor « numérote » les éléments de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ par diagonales (encore...), « on voit bien » qu'on peut construire ainsi une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$.

Démonstration « arithmétique » Un peu moins géométrique : l'application

$$(m, n) \longmapsto 2^m(2n + 1)$$

est bijective de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $\mathbf{N}$. L'idée est ici de repérer dans $\mathbf{N}$ une infinité dénombrable de « copies » de $\mathbf{N}$: les impairs, les multiples de 2 mais pas de 4, les multiples de 4 mais pas de 8...autrement dit, de classer les entiers naturels suivant leur valuation 2-adique !

Corollaire **Q** est dénombrable.

Démonstration Il y a une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, une surjection assez évidente de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $\mathbf{Q}^+$ (au couple (p, q) on associe p/q, ça ne marche pas pour le couple $(0, 0)$ auquel on associe ce qu'on veut). Par composition, on construit donc une surjection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{Q}^+$.

Mais, s'il existe une surjection de $\mathbf{N}$ sur un ensemble X, cet ensemble est « évidemment » fini ou dénombrable. Voir un peu plus loin...Et comme $\mathbf{Q}^+$ n'est pas fini, il est dénombrable. Comme $\mathbf{Q}^-_*$ est aussi dénombrable, et qu'une réunion de deux ensembles dénombrables est dénombrable là aussi, voir un peu plus loin), on conclut.

II.4 Stabilité de la dénombrabilité

Proposition 1 Si $A_1, \ldots, A_p$ sont dénombrables, $A_1 \times \cdots \times A_p$ l'est.

Démonstration non exigible
Récurrence sur p assez simple, à partir de la dénombrabilité de $\mathbf{N}^2$: s'il existe une bijection f de $\mathbf{N}$ sur A_1 et une bijection g de $\mathbf{N}$ sur A_2, l'application

$$(m,n) \longmapsto$$

est une bijection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $A_1 \times A_2$. Or il y a une bijection de $\mathbf{N}$ sur $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ (vue plus haut). Ce qui règle le cas $p = 2$, mais aussi la récurrence, car il y a une bijection très évidente entre $A_1 \times \ldots \times A_p$ et $(A_1 \times \ldots \times A_{p-1}) \times A_p$.

Proposition 2 Une réunion finie ou dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est finie ou dénombrable.

Proposition 3 S'il y a une surjection de $\mathbf{N}$ sur un ensemble X, alors X est fini ou dénombrable.

Remarque : La deuxième proposition est conséquence de la première : admettant la première proposition, supposons que ϕ soit une surjection de $\mathbf{N}$ sur X, alors

$$X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} \{\phi(n)\}$$

Démonstration non exigible
On a déjà vu que $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ était dénombrable.
Or $\mathbf{N} \times \mathbf{N} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\} \times \mathbf{N}$.
C'est alors simple : si chaque A_n est un ensemble fini ou dénombrable, « plaçons » les éléments de chaque A_n sur la « colonne » $\{n\} \times \mathbf{N}$, on obtiendra alors une surjection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.
Plus précisément, il existe pour tout $n \in \mathbf{N}$ une surjection ϕ_n de $\{n\} \times \mathbf{N}$ sur A_n (car il existe une surjection de $\mathbf{N}$ sur A_n). L'application $(m,n) \longmapsto \phi_m(n)$ est alors une surjection de $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ sur $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$.

Si on montre la deuxième proposition, on aura terminé. Soit donc ψ une surjection de $\mathbf{N}$ sur un ensemble X. Pour la « transformer » en bijection d'une partie de $\mathbf{N}$ sur X, une idée est de rassembler les entiers naturels qui ont même image par ϕ. On considère donc l'ensemble quotient Y de $\mathbf{N}$ par la relation d'équivalence :

$$m \mathscr{R} n \iff \phi(m) = \phi(n)$$

On note $\overline{n}$ la classe de n pour cette relation d'équivalence. Si $y \in Y$, soit n tel que $y = \overline{n}$. On définit $\psi(y) = \phi(n)$ (définition légitimée par le fait que $\overline{n} = \overline{m} \Longrightarrow \phi(n) = \phi(m)$). On vérifie sans problème que ψ est une bijection de Y sur X. Or l'application $y \mapsto \min(y)$ est une injection de Y dans $\mathbf{N}$, donc une bijection de $\mathbf{N}$ sur une partie de $\mathbf{N}$ (son image), donc Y est finie ou dénombrable, X aussi.

Il faut retenir de la dénombrabilité ces trois résultats, et les exemples suivants :

Exemples usuels $\mathbf{Z}$, $\mathbf{N}^2$, $\mathbf{Q}$ sont dénombrables.

Remarque : La dénombrabilité d'un ensemble ne l'empêche pas d'être assez différent de $\mathbf{N}$: $\mathbf{Z}$ n'a pas de plus petit élément, entre deux éléments de $\mathbf{Q}$ il y en a toujours un autre, etc...

Exercice : $\mathbf{N}^{(\mathbf{N})}$, $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ sont-ils dénombrables ?

III Sommabilité : une introduction

On a vu que la série $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ était convergente, et que sa somme valait $\ln 2$ (on l'a vu à partir du développement asymptotique

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=\ln n\;+\;\gamma\;+\mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)$$

obtenu par exemple grâce à une comparaison série-intégrale, mais la méthode la plus efficace dans le cadre du programme est de « pousser » le développement en série entière

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \ln(1+x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

jusqu'à $x=1$ en utilisant le théorème sur les séries alternées).
Mais cette « somme » (qui rappelons-le n'en est pas une : ce n'est que la limite d'une suite de sommes) suppose que l'on fasse bien attention à l'ordre des termes induit par l'indexation : on se persuadera astucieusement, par exemple, que

$$1-1/2-1/4+1/3-1/6-1/8+1/5-1/10-1/12+1/7-\cdots=\frac{\ln 2}{2}$$

(indication : se ramener à

$$1-1/2+1/3-1/4+1/5-1/6+\cdots=\ln 2 \quad)$$

Plus spectaculaire encore : fixons un nombre réel, 20, par exemple. Il existe un rang n_0 tel que

$$1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n_0+1}<20\leq 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n_0+3}$$

On aura alors

$$\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n_0+3}\right)-1/2<20$$

et il existera n_1 tel que

$$\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n_0+3}\right)-1/2+\left(\frac{1}{2n_0+5}+\cdots+\frac{1}{2n_1+1}\right)<20$$

mais

$$\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n_0+3}\right)-1/2+\left(\frac{1}{2n_0+5}+\cdots+\frac{1}{2n_1+3}\right)\geq 20$$

on ajoute alors $-1/4$, on se retrouve au-dessous de 20, etc...On voit que l'on tient ainsi une manière de prendre tous les $\dfrac{(-1)^n}{n}$, une fois chacun, et de définir une série qui converge vers 20. Et on pourrait très bien remplacer 20 par $\ell \in \overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La convergence n'est « pas commutative », on ne peut pas réordonner les termes de la série.
Autre problème : si on fait des « paquets » de termes de la série, ils ne définissent pas nécessairement des séries convergentes : par exemple, le paquet des termes de rang pair pose problème, mais il n'est pas le seul...La convergence, comme on dit, n'est pas « associative », ou encore on ne peut pas sommer par paquets.
Bref, pour arriver à $-\ln 2$, il faut bien sommer les termes dans l'ordre dans lequel ils sont indexés, successivement...

Toutes les séries ne demandent pas tant de précaution. Prenons la série convergente $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2}$. On peut prendre ses termes dans n'importe quel ordre, en faire des paquets (finis ou infinis) qui définissent toujours des séries convergentes, sommer ces paquets, on obtiendra toujours $\dfrac{\pi^2}{6}$. Bref, on manipule cette somme de série à peu près comme une somme finie : ce sont les valeurs prises qui comptent, pas l'ordre dans lequel on les prend...bref, le point de vue de Lebesgue dans la construction de son intégrale...D'ailleurs, la sommabilité, c'est une intégrabilité...
Cette « sommabilité » n'est pas dûe au fait que la série est à termes réels positifs : on peut se livrer, avec $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$, aux mêmes manipulations qu'avec $\sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$, on tendra toujours vers la même limite : $\dfrac{\pi^2}{8}$.

Ajoutons que si l'ordre des termes n'intervient plus, il n'est pas utile de se limiter à sommer des familles indexées par $\mathbf{N}$: on peut s'intéresser aux familles indexées par n'importe quel ensemble dénombrable, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ donnant par exemple des résultats très utiles.

IV Sommabilité des familles dénombrables de réels positifs

L'hypothèse « réels positifs » est très importante dans les considérations qui suivent.

IV.1 Définition, premiers exemples

a. Définition

Définition

Soit I un ensemble dénombrable, on note $P_f(I)$ l'ensemble des parties finies de I (*Notation non officielle*).

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels **positifs** indexée par I. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque l'ensemble

$$A = \left\{ \sum_{i\in J} u_i \ ; \ J \in P_f(I) \right\}$$

est majoré. La somme de la famille, notée $\sum\limits_{i\in I} u_i$, est alors la borne supérieure de A :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sup_{J\in P_f(I)} \left(\sum_{i\in J} u_i \right)$$

b. familles indexées par N

Proposition

La famille $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ **de réels positifs** indexée par $\mathbf{N}$ est sommable si et seulement si la série $\sum u_n$ converge. Quand c'est le cas, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ définie dans le chapitre S2 et $\sum\limits_{n\in\mathbf{N}} u_n$ définie ci-dessus sont égaux, et sont deux manières différentes de noter la somme de la famille.

Remarque On dira donc que la suite de **réels positifs** $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable lorsque la série $\sum u_n$ converge.

Démonstration Pas difficile, pas inintéressante.

c. familles indexées par Z

Proposition

La famille $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ **de réels positifs** indexée par **Z** est sommable si et seulement si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_{-n}$ convergent. Quand c'est le cas, $\sum_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$

d. Famille non sommable

Pour exprimer que la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on pourra écrire

$$\sum_{i\in I} u_i \ = \ +\infty$$

Par exemple, $\sum_{n\in\mathbf{N}_*} \frac{1}{n} = +\infty$.
Cette notation est évidemment à réserver aux familles de réels **positifs**, et revient à étendre la définition de la borne supérieure d'une partie de **R** : si A n'est pas majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$.
Il est alors assez cohérent d'écrire $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$ pour exprimer que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, mais cette notation n'étant pas vraiment au programme, on évitera de l'utiliser...sauf si l'énoncé d'un sujet de problème le fait, ce qui n'est pas si rare, surtout à X-ens.

e. Deux propriétés « évidentes »

Voici deux propriétés hors-programme mais, une fois n'est pas coutume, utilisables sans redémonstration. Le programme ne tient pas à surcharger ce chapitre, néanmoins ces résultats très simples sont une conséquence directe de la définition et ne demandent pas de redémonstration, sauf si l'énoncé le demande explicitement
Propriété 1 Si I est un ensemble dénombrable, si $\forall i \in I \quad 0 \leq a_i \leq b_i$, alors

$$[(b_i)_{i\in I} \text{ sommable}] \Longrightarrow [(a_i)_{i\in I} \text{ sommable}]$$

Et le cas échéant,

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i$$

Propriété 2 Si I est un ensemble dénombrable, si J est une partie de I, alors

$$[(a_i)_{i\in I} \text{ sommable}] \Longrightarrow \left[(a_i)_{i\in J} \text{ sommable}\right]$$

Et la cas échéant,

$$\sum_{i\in J} a_i \leq \sum_{i\in I} a_i$$

Remarque : La définition d'une somme finie, ce n'est pas de l'analyse, c'est de l'algèbre. On n'en a donc pas parlé ci-dessus. Mais les propriétés énoncées sont toutes valables, a fortiori, pour des sommes finies.

IV.2 Sommabilité et sommation par paquets

On observera qu'en général, lorsqu'on étudie une série, faire des « paquets » n'est pas sans risque. Par exemple, on peut avoir l'impression que la série
$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ converge
...et si on ne limite pas la taille des paquets, avoir l'impression que la série $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ diverge (voir plus haut).
Pour les familles de réels positifs, tout se passe bien, on peut faire tous les paquets qu'on veut pour examiner la sommabilité et calculer la somme.

Théorème (sommabilité, sommation par paquets pour des réels positifs)

Soit I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une « partition » de I :

$$(p \neq q) \ \Rightarrow \ I_p \cap I_q = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n = I$$

Il peut y avoir des I_n vides, auquel cas ce n'est pas une « vraie » partition.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.
(ii) La série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

Et, si c'est le cas :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$$

Remarque Les I_n sont finis ou dénombrables. Si n est tel que I_n soit fini, $(u_i)_{i\in I_n}$ est automatiquement sommable.

Remarque Il se peut qu'il n'y ait qu'un nombre fini de I_n non vides, le résultat reste bien sûr valable (autrement dit, on peut considérer une « partition » finie $(I_n)_{0\leq n\leq p}$). La condition (ii) est alors automatiquement vérifiée dès que (i) l'est).

Remarque Ce résultat est d'une importance considérable, car c'est souvent un moyen de montrer la sommabilité **et** de calculer la somme.

Exemple Retrouver simplement, en utilisant ce théorème, le critère de sommabilité des familles de réels indexés par $\mathbf{Z}$ que l'on a vu en **IV.1.**.

Remarque La condition (ii) pourrait être écrite, de manière équivalente : « la famille $\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)_{n\in\mathbf{N}}$ est sommable ». Ce serait plus élégant (on ne mélangerait pas les vocabulaires). Mais on donne ici la formulation du programme.

Exercice Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{(m+n)^4}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2\setminus\{(0,0)\}}$ est sommable. Exprimer sa somme comme somme d'une série.

Démonstration (h.p., donnée « pour information » seulement, si on vise X-ens essayer de l'écrire n'est pas forcément du temps perdu, la difficulté n'est pas insurmontable)

Si la famille $(u_i)_{i\in I}$ **est sommable**, toute partie finie de I_n étant une partie finie de I, on conclut assez facilement que $(u_i)_{i\in I_n}$ l'est, ce pour tout $n\in\mathbf{N}$. Soit N un entier naturel; pour toutes parties finies J_k de I_k $(0\leq k\leq N)$, $J=\bigcup_{k=0}^{N} J_k$ est une partie finie de I, donc

$$\sum_{k=0}^{N}\left(\sum_{i\in J_k} u_i\right)=\sum_{i\in J} u_i\leq\sum_{i\in I} u_i$$

On obtient donc que $\sum_{i\in I} u_i$ est un majorant de $A_0+\ldots+A_N$, où, pour chaque k,

$$A_k=\left\{\sum_{i\in J} u_i\ ,\ J\in P_f(I_k)\right\}$$

Mais il est facile de montrer que la somme d'un nombre fini de parties majorées de $\mathbf{R}$ est une partie majorée de $\mathbf{R}$, et que sa borne supérieure est la somme des bornes supérieures (commencer par le vérifier pour deux parties, puis faire une récurrence). On en déduit

$$\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)\leq\sum_{i\in I} u_i$$

et ce pour tout N, donc la série $\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$ converge, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)\leq\sum_{i\in I} u_i$$

Supposons réciproquement que (i) et (ii) soient vérifiées et soit J une partie finie de I. Chaque élément de J est dans un I_n exactement (propriété de partition), et donc il existe N tel que $J \subset \bigcup_{n=0}^{N} I_n$. Mais alors

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$$

ce qui montre que $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, et que

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} u_i\right)$$

On conclut donc.

IV.3 Commutativité

Résumé : Pour une famille de réels positifs, peu importe l'ordre dans lequel on prend les termes, que ce soit pour tester la sommabilité ou pour calculer la somme.

Proposition Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, I étant dénombrable. Soit σ une permutation de I. Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ l'est. Et si c'est le cas,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

Rappel Une permutation de I est une bijection de I dans I.

Démonstration Non exigible. Il suffit de remarquer que l'ensemble des images par σ des parties finies de I est l'ensemble des parties finies de I.

Proposition bis (sommabilité par indexation)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs, I étant dénombrable.
Soit $k \mapsto i_k$ une bijection de $\mathbf{N}$ sur I *(i.e. une « indexation » de I)*.
$(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_k u_{i_k}$ converge, et le cas échéant,

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

La proposition bis est plus importante que la proposition, et elle affirme qu'on peut indexer la partie I n'importe comment pour ramener l'étude d'une sommabilité à celle d'une série. Donc, finalement, étudier la sommabilité de la famille $(u_i)_{i\in I}$ peut se faire en « indexant » I et en étudiant la série correspondante.

Démonstration : Non exigible, pas difficile et pas inintéressante…
Si $(u_i)_{i\in I}$ **est sommable**, pour tout n $J_n = \{i_0, \dots, i_n\}$ est une partie finie de I, donc

$$\sum_{k=0}^{n} u_{i_k} = \sum_{i\in J_n} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i$$

ce qui implique que $\sum_k u_{i_k}$ converge, et que

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k} \leq \sum_{i\in I} u_i$$

Si $\sum_k u_{i_k}$ **converge**, on remarque que pour toute partie finie J de I, il existe N tel que $J \subset J_N$. Donc, pour toute partie finie J de I,

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

ce qui implique que $\sum_{i\in I} u_i$ est sommable, et que

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

Voilà donc une autre manière de montrer qu'une famille est sommable et de calculer sa somme.

V Familles sommables de nombres réels ou complexes

V.1 Définition, somme

Définition (sommabilité, familles réelles ou complexes)

Soit I un ensemble dénombrable, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par I. On dit que la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque $(|u_i|)_{i\in I}$ l'est.

C'est peut-être une définition commode de la sommabilité...mais cela ne nous avance pas tellement pour la somme, qu'il faut trouver moyen de définir. On reprend une technique déjà rencontrée :

Définition (somme, familles réelles)

Soit I un ensemble dénombrable, $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels indexée par I. On écrit, pour tout i,

$$u_i^+ = \max(u_i, 0) \qquad , \qquad u_i^- = \max(-u_i, 0)$$

ou plus simplement,
si $u_i \geq 0$, $u_i^+ = u_i$, $u_i^- = 0$;
si $u_i \leq 0$, $u_i^- = -u_i$, $u_i^+ = 0$.
Ce qui fait que

$$u_i = u_i^+ - u_i^- \qquad , \qquad |u_i| = u_i^+ + u_i^-$$

La famille $(u_i)_{i\in I}$ est donc sommable si et seulement si les deux familles $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ le sont. Ce qui permet de définir

$$\sum_{i\in I} u_i \ = \ \sum_{i\in I} u_i^+ \ - \ \sum_{i\in I} u_i^-$$

C'est une définition théorique, qui ne sert jamais dans la pratique à calculer une somme.

Définition (somme, familles complexes)

Soit J un ensemble dénombrable, $(u_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes indexée par J. La famille $(u_j)_{j\in J}$ est sommable si et seulement si les deux familles $\big(\mathrm{Re}(u_j)\big)_{j\in J}$ et $\big(\mathrm{Im}(u_j)\big)_{j\in J}$ le sont. On définit alors

$$\sum_{j\in J} u_j \ = \ \sum_{j\in J} \mathrm{Re}(u_j) \ + \ i \sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j)$$

Cas $I = \mathbf{N}$ La famille $(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si la série $\sum u_i$ est **absolument** convergente. Sa somme est alors la somme de la série $\sum u_i$.

Cas $I = \mathbf{Z}$ La famille $(u_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ de nombres réels ou complexes est sommable si et seulement si les séries $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ et $\sum\limits_{n\geq 0} |u_{-n}|$ convergent. Quand c'est le cas, $\sum\limits_{n\in\mathbf{Z}} u_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_{-n}$

Remarque Même si la famille $(u_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on n'écrira néanmoins pas $\sum\limits_{i\in I} u_i = +\infty$ si elle n'est pas à termes réels positifs.

V.2 Sommation par paquets

Théorème de sommation par paquets

Soit I un ensemble dénombrable, $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une « partition » de I :

$$(p \neq q) \ \Rightarrow\ I_p \cap I_q = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{n\in\mathbf{N}} I_n = I$$

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de nombres réels ou complexes. Alors

(i) Pour tout n, $(u_i)_{i\in I_n}$ est sommable.

(ii) La série $\sum\limits_n \left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)$ converge.

(iii) $\sum\limits_{i\in I} u_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{i\in I_n} u_i\right)$

Mode d'emploi On commence par montrer que $(u_i)_{i\in I}$ est une famille sommable. Ce qui veut dire qu'on commence par montrer que $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable, souvent d'ailleurs en utilisant le théorème de sommabilité par paquets pour les familles de réels positifs. Alors, et seulement alors, on peut utiliser le théorème de sommation par paquets.

Autrement dit, on utilise en général **IV.2** puis **V.2**. Losqu'on a affaire à des réels positifs, **IV.2** suffit.

Insistons Pour les familles de réels positifs, on a un théorème de **sommabilité et sommation par paquets**. Pouvoir sommer les paquets implique la sommabilité. Pour les familles quelconques de réels ou de complexes, on n'a qu'un théorème de **sommation par paquets**, « activable » seulement une fois la sommabilité démontrée.

V.3 Commutativité

Proposition Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de nombres réels ou complexes (I est un ensemble dénombrable). Soit σ une permutation de I. Alors $(u_{\sigma(i)})_{i\in I}$ est sommable, et

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_{\sigma(i)}$$

Proposition bis Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels ou complexes (I est un ensemble dénombrable), $k \mapsto i_k$ une bijection de $\mathbf{N}$ sur I. La famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si $\sum_k u_{i_k}$ est **absolument convergente**, et si c'est le cas, on a

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$$

V.4 Linéarité

Proposition Si I est un ensemble dénombrable, si $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ sont deux familles sommables d'éléments de $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K} = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$), si λ et μ sont dans $\mathbf{K}$, la famille $(\lambda u_i + \mu v_i)_{i\in I}$ est sommable, et

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + \mu v_i) \;=\; \lambda \sum_{i\in I} u_i \;+\; \mu \sum_{i\in I} v_i$$

VI Sommabilité des suites doubles

Appliquons un petit peu ce qui a été vu à un cas particulier très intéressant : celui où l'ensemble d'indexation est $\mathbf{N}^2$.

VI.1 Sommabilité et somme des suites doubles de réels positifs

Proposition La « suite double » (terminologie h.p., on parle simplement de famille indexée par $\mathbf{N}^2$) de réels **positifs** $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i) pour tout n, $\sum_m a_{m,n}$ converge

et, notant alors $s_n = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}$,

(ii) $\sum_n s_n$ converge.

Bis : La suite double $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ de réels **positifs** est sommable si et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

(i') pour tout m, $\sum_n a_{m,n}$ converge

(ii') et, notant $\sigma_m = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}$, $\sum_m \sigma_m$ converge.

Et, dans le cas de sommabilité,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$$

Démonstration : C'est une conséquence d'un résultat déjà vu.

Remarque : Il ne faut pas penser que ces deux propositions soient les seules façons de montrer qu'une suite double est sommable. Surtout quand $m+n$ figure de manière « prépondérante » dans la définition de $a_{m,n}$ (voir exercices).

VI.2 Un exemple

Exercice (Oral Mines)
Pour quelles valeurs du réel α la suite double $\left(\dfrac{1}{(m^2+n^2)^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}_*^2}$ est-elle sommable ?

1. Résoudre le problème avec le critère du **IV.1.**
2. Démontrer que, pour tous m et n positifs,
$$\frac{1}{2}(m+n)^2 \leq m^2+n^2 \leq (m+n)^2$$
3. Etudier la sommabilité de la suite double $\left(\dfrac{1}{(m+n)^\beta}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}_*^2}$ suivant les valeurs du réel β, en n'utilisant pas le critère du **IV.1.** mais une partition de $\mathbf{N}_*^2$ bien adaptée à cette suite double. Retrouver ainsi le résultat de la première question.

VI.3 Encore un exemple

Assez souvent, on utilise le résultat beaucoup plus simplement : supposons qu'on sache que $\sum_n u_n$ converge, où les u_n sont ≥ 0, et supposons que chaque u_n s'écrive $u_n = \sum_{p=0}^{+\infty} v_{n,p}$ où les $v_{n,p}$ sont ≥ 0. Alors on a la sommabilité de la famille $\left(v_{n,p}\right)_{(n,p)\in\mathbf{N}^2}$, et on a directement le droit d'écrire $x = \sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_{n,p}\right)$, où $x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Par exemple, on sait que, si $s>1$,
$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}$$
et on a le droit d'écrire pour tout $n\geq 1$,
$$\frac{1}{n^s} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^{s+1}}$$

On en déduit que la famille $\left(u_{k,n}\right)_{(k,n)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable, où $u_{k,n} = \dfrac{1}{n^{s+1}}$ si $1 \leq k \leq n$, 0 sinon. Et sa somme vaut $\zeta(s)$. Ce qui autorise immédiatement à écrire

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty}\left(\sum_{n=k}^{+\infty}\frac{1}{n^{s+1}}\right)$$

sans justification supplémentaire.

On voit là que le théorème de sommation par paquets permet d'obtenir facilement des formules d'interversion de sommes infinies.

VI.4 Sommabilité et somme des suites doubles de nombres réels ou complexes

La suite double $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable si et seulement si la suite double $(|a_{m,n}|)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ l'est...voir paragraphe précédent. Et, **si la suite double** $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ **est sommable**,

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^2} a_{m,n}$$

On remarquera encore que ce n'est pas, loin s'en faut, la seule façon d'écrire la sommabilité d'une suite double.

VI.5 Cas particulier : suites doubles « produits »

a. Critère de sommabilité

Soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels ou complexes, que l'on suppose distinctes de la suite nulle (elles peuvent s'annuler, mais elles ne sont pas constamment nulles). Alors la suite double $(u_m v_n)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable si et seulement si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes. Et le cas échéant :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbf{N}^2} u_m v_n = \left(\sum_{m=0}^{+\infty} u_m\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)$$

b. Corollaire : le produit de Cauchy

Proposition Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries réelles ou complexes absolument convergentes. On note, pour tout $n \in \mathbf{N}$:

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

$\sum w_n$ est absolument convergente, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\big)\big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\big)$$

VI.6 Un exemple célèbre

Soit $s \geq 1$.

1. Montrer que la suite double $\left(2^{-sm}3^{-sn}\right)_{(m,n)\in\mathbf{N}^2}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S.
2. On suppose $s > 1$. Montrer que

$$S < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

3. On suppose $s \geq 1$. Montrer que

$$S > \sum_{k=1}^{5-1} \frac{1}{k^s}$$

4. Montrer que la suite triple $\left(2^{-sn_1}3^{-sn_2}5^{-sn_3}\right)_{(n_1,n_2,n_3)\in\mathbf{N}^3}$ est sommable. Calculer sa somme, que l'on notera S_3.
5. On suppose $s > 1$. Montrer que

$$S_3 < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s}$$

6. On suppose $s \geq 1$. Montrer que

$$S_3 > \sum_{k=1}^{7-1} \frac{1}{k^s}$$

7. Pour $s > 1$, étendre les résultats précédents et justifier la formule

$$\prod_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$$

   où $\mathscr{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers.
8. Pour $s = 1$, étendre les résultats précédents et montrer que

$$\sum_{p\in\mathscr{P}} \frac{1}{p} = +\infty$$

VI.7 Résumé sur les « suites doubles »

Si les $u_{n,p}$, $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, sont des réels positifs, l'existence de

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$$

(ce qui résume l'existence de deux séries !) équivaut à l'existence de

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$$

et quand elles existent, elles ont même « valeur » (somme).

Si les $u_{n,p}$, $(n,p) \in \mathbf{N}^2$, sont des nombres réels ou complexes quelconques, on ne peut pas dire ça. Mais si $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} |u_{n,p}|\right)$ ou $\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} |u_{n,p}|\right)$ existe (ces deux existences, comme on vient de le dire, sont équivalentes), alors $\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$ et $\sum_{p=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,p}\right)$ existent et sont égales.

Ces résultats sont des écritures des théorèmes de sommablité et/ou sommation par paquets pour $I = \mathbf{N}^2$, avec les I_n « lignes » ou « colonnes » de $\mathbf{N}^2$. Mais ce ne sont pas les seules manières de faire des paquets dans $\mathbf{N}^2$, les paquets diagonaux sont par exemple intéressants dans de nombreuses situations :
$I_n = \{(p,q)\ ;\ p+q=n\}$.

VI.8 Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans N

Ce résultat est probablement le plus important du chapitre, on l'utilisera beaucoup, surtout en probabilités. Montrons par exemple un résultat classique :

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, on dit que X a une espérance lorsque $(n\mathrm{P}(X=n))_{n\geq 0}$ est sommable, et on définit l'espérance $\mathrm{E}(X)$ comme la somme de cette famille.
Montrer que X a une espérance si et seulement si $(\mathrm{P}(X>n))_{n\geq 0}$ est sommable, et qu'alors $\mathrm{E}(X)$ est la somme de cette famille.

On part du résultat suivant :

$$\mathrm{P}(X>n)=\sum_{j=n+1}^{+\infty}\mathrm{P}(X=j)$$

(quand un évènement, ici $(X>n)$, est réunion dénombrable d'évènements disjoints (ici les $(X=j)$ pour $j>n$), la « σ-additivité » de P permet d'affirmer cela). Comme on s'intéresse à la série $\sum P(X>n)$, il est naturel de définir une suite double adaptée au problème : pour $(j,n)\in\mathbf{N}^2$,

$$u_{j,n}=\mathrm{P}(X=j)\quad\text{si } j\geq n+1\ ,\qquad u_{j,n}=0\quad\text{sinon.}$$

Alors, pour tout n, $\sum_j u_{j,n}$ converge, et sa somme vaut :

$$s_n=\sum_{j=0}^{+\infty}u_{j,n}=\mathrm{P}(X>n)$$

Donc la famille u est sommable si et seulement si $\sum_{n\geq 0}\mathrm{P}(X>n)$ converge, et le cas échéant, sa somme vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{P}(X>n)$$

Mais d'autre part, « dans l'autre sens », pour tout j, $\sum_n u_{j,n}$ converge et sa somme vaut

$$\sigma_j=j\mathrm{P}(X=j)$$

la conclusion s'ensuit...

VI.9 Une suite double

On définit $I = \{(p,q) \in \mathbf{N}_*^2\ ;\ p \neq q\}$ et, si $(p,q) \in I$, $u_{p,q} = \dfrac{1}{p^2 - q^2}$.

Il est clair, par comparaison (équivalent) à une série de Riemann, que pour tout q la série $\sum\limits_{p \neq q} u_{p,q}$ converge. Notons

$$\sigma_q = \sum_{\substack{p=1 \\ p \neq q}}^{+\infty} u_{p,q}$$

et essayons de calculer σ_q. Pour cela, on peut penser se servir de la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{p^2 - q^2} = \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right)$$

On peut regarder

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}\sum_{p=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p+1}\right) =$$

(télescopisme pas trop compliqué) ; si $q > 1$, c'est un peu plus alambiqué, on ne peut guère échapper aux sommes partielles (pour ne pas couper en deux séries divergentes) : en supposant $N > q$,

$$\begin{aligned}
\sigma_q^{(N)} &= \frac{1}{2q}\left(\sum_{p=1}^{q-1}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right) + \sum_{p=q+1}^{N}\left(\frac{1}{p-q} - \frac{1}{p+q}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2q}\left(-\sum_{j=1}^{q-1}\frac{1}{j} - \sum_{j=q+1}^{2q-1}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{N-q}\frac{1}{j} - \sum_{j=2q+1}^{q+N}\frac{1}{j}\right)
\end{aligned}$$

On simplifie les deux premières sommes avec la troisième, en supposant $N - q > 2q - 1$ ce qui n'est pas gênant puisqu'on va prendre les limites quand $N \to +\infty$:

$$\sigma_q^{(N)} = \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q} + \sum_{j=2q}^{N-q}\frac{1}{j} - \sum_{j=2q+1}^{q+N}\frac{1}{j}\right)$$

et enfin on simplifie les deux sommes restantes entre elles :

$$\sigma_q^{(N)} = \frac{1}{2q}\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{2q} - \sum_{j=N-q+1}^{N+q}\frac{1}{j}\right)$$

La somme restante tend vers 0 quand $N \to +\infty$ (il n'est pas nécessaire pour cela d'avoir le développement asymptotique des sommes partielles de la série harmonique), donc

$$\sigma_q = \frac{3}{4q^2}$$

Conclusion : $\sum \sigma_q$ converge, et $\displaystyle\sum_{q=1}^{+\infty} \sigma_q = \frac{\pi^2}{8}$.

Mauvaise conclusion :

Bonne conclusion :

Chemin plus court pour arriver à la bonne conclusion :

Table des matières