S6 : Séries entières

I Convergence des séries entières

I.1 Définition

On appelle série entière toute série de la forme

$$\sum_{n\in\mathbf{N}} a_n z^n$$

$(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ étant une suite de nombres complexes et z un nombre complexe (qui va assez vite être restreint à $\mathbf{R}$).

I.2 Convergence ponctuelle ; rayon de convergence

a. Lemme d'Abel

Proposition Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\geq 0}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration *Il est naturel d'écrire $a_n z^n$ (le terme général de la série que l'on étudie) à l'aide de $a_n z_0^n$ (le terme général de la suite sur laquelle on sait quelque chose).*

b. Rayon de convergence

Proposition - Définitions

Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Il existe $R \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ unique tel que :

• si $|z| < R$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est absolument convergente
(*ce cas ne se produit pas si* $R = 0$)

• si $|z| > R$, la série $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ est (très) grossièrement divergente : la suite $(a_n z^n)_{n\geq 0}$ n'est pas bornée, et donc a fortiori ne converge pas vers 0.
(*ce cas ne se produit pas si* $R = +\infty$)

R est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.
$D(0, R)$ est le disque ouvert de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$.
Si $R = +\infty$, ce disque ouvert est $\mathbf{C}$. Si $R = 0$, c'est $\emptyset$. Sinon, c'est un « vrai » disque.

Démonstration

L'unicité est assez simple. Pour l'existence, le lemme d'Abel suggère d'étudier

$$X = \{r \in \mathbf{R}^+ \ ; \ (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ bornée}\}$$

Remarques sur la définition On a donc défini le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$: c'est l'unique $R \in [0, +\infty[\cup\{+\infty\}$ tel que, si $|z| < R$, la série converge absolument, et si $|z| > R$, la suite $(a_n z^n)$ n'est pas bornée.

On peut formuler cette définition autrement : par exemple, on peut décider de définir

$$R = \mathrm{Sup}\left(\left\{r \in \mathbf{R}^+ \ ; \ (a_n r^n)_{n\geq 0} \text{ bornée}\right\}\right)$$

(avec la convention bien évidente que, si l'ensemble n'est pas majoré, sa borne supérieure est $+\infty$).

Remarque Et si $|z| = R$? on ne peut rien dire a priori, tout peut arriver !

c. Méthodes de détermination pratique du rayon de convergence

Méthode 1. Critère de D'Alembert

Typiquement utilisé pour la plupart des déterminations de rayons de convergence dans les énoncés d'écrit. Il faut être bien attentif, lors de la rédaction, à n'appliquer le critère de d'Alembert qu'à des séries à termes réels strictement positifs.

Exemples Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ et $\sum n^2 z^n$.

Méthode 2. Une remarque qui résout tout

Si on a la chance de trouver un z tel que $\sum a_n z^n$ converge, mais non absolument, ou un z tel que la suite $(a_n z^n)$ soit bornée mais la série $\sum a_n z^n$ diverge, on est sûr que $R =$.

Exemples Déterminer le rayon de convergence des séries $\sum \dfrac{z^n}{n}$ et $\sum (\sin n) z^n$. Le critère de D'Alembert leur est-il applicable ?

Méthode 3. Suites bornées

Les exercices les plus délicats de détermination de rayons de convergence se font en utilisant plutôt les suites bornées et les deux considérations suivantes : si la suite $(a_n z^n)$ est bornée, alors $|z|$ R ; si la suite $(a_n z^n)$ est non bornée, alors $|z|$ R.

On utilise aussi : si la suite $(a_n z^n)$ converge vers 0, alors $|z|$ R ; si la suite $(a_n z^n)$ ne converge pas vers 0, alors $|z|$ R.

Exemple : Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ où a_n est le n-ième chiffre du développement décimal de $\sqrt{3}$.

Exemple : Soit R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$. Déterminer en fonction de R le rayon de convergence de $\sum a_n^2 z^n$.

Il est bon de retenir qu'il n'est jamais nécessaire d'utiliser la convergence des séries pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière. En revanche, il peut s'avérer indispensable d'utiliser les suites bornées.

d. Comparaison de rayons de convergence

Proposition On note R_a et R_b les rayons de convergence respectifs des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$. Alors,

si $a_n = O(b_n)$,

et si $a_n \sim b_n$,

On peut remarquer que $a_n = o(b_n)$ est un cas particulier de $a_n = O(b_n)$.

II Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes

Définition : Soit (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels ou complexes. Le produit de Cauchy de la série $\sum u_n$ et de la série $\sum v_n$ est la série $\sum w_n$ où, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k} = \sum_{p+q=n} u_p v_q$$

Proposition : Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, $\sum w_n$ l'est, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big)$$

Remarques : Si l'une des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ seulement est absolument convergente, et si l'autre est convergente, $\sum w_n$ l'est (théorème de Mertens, h.p.).

Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, mais pas absolument, alors $\sum w_n$ peut diverger.

Application Si $(z, z') \in \mathbf{C}^2$, alors

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z'^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+z')^n}{n!}$$

Un conseil pratique Quand on effectue le produit de Cauchy de deux séries, il est conseillé de « faire commencer ces deux séries à 0 » : Si on veut faire le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ par $\sum\limits_{n\geq 2} v_n$, on pose $u_0 = v_0 = v_1 = 0$ et on fait le produit de Cauchy de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ par $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$.

III Opérations algébrique sur les séries entières

III.1 Somme, produit par un scalaire

Proposition

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b. On note ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0}(a_n+b_n)z^n$. Alors

$$\rho \geq \min(R_a, R_b)$$

De plus,

$$\forall z \in D\big(0, \min(R_a, R_b)\big) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n+b_n)z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$$

Enfin, si $R_a \neq R_b$, on a : $\rho = \min(R_a, R_b)$.

Proposition

Si λ est un nombre complexe non nul, le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0}(\lambda a_n)z^n$ est égal au rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

III.2 Produit de Cauchy de séries entières

Définition - Proposition

On considère deux séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ de rayons de convergence respectifs R_a et R_b.

Définition

La série entière produit de Cauchy de ces deux séries entières est la série entière $\sum_{n\geq 0} c_n z^n$ où, pour tout entier naturel n,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

Proposition Notons R_c son rayon de convergence ; alors

$$R_c \geq \min(R_a, R_b)$$

et

$$\forall z \in D\big(0, \min(R_a, R_b)\big) \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$$

Remarque Même si $R_a \neq R_b$, il se peut que l'on ait $R_c > \min(R_a, R_b)$. Se méfier d'une confusion avec **1.**, donc.

Remarque Il est déconseillé de faire l'économie de ce résultat en se disant qu'on pourra toujours appliquer le produit de Cauchy « général ».

IV Classe d'une somme de série entière

Dorénavant, on considère des séries entières de la variable réelle : on étudie la série de fonctions

$$\sum_n \phi_n$$

où $\phi_n \ : \ x \longmapsto a_n x^n$. La suite $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ peut être une suite de nombres réels ou complexes, mais x reste réel.

IV.1 Rayon de convergence d'une série dérivée

Proposition Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels ou complexes; les séries entières $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Démonstration C'est un exercice intéressant sur les rayons de convergence; le principe en est une croissance comparée : multiplier par n le coefficient de z^n influe peu sur la convergence, car le terme géométrique z^n est prépondérant.

IV.2 Classe de la somme d'une série entière

Lemme Soit R le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$. On suppose $R > 0$. Alors la série $\sum(x \mapsto a_n x^n)$ converge normalement, donc uniformément, sur tout segment inclus dans $]-R, R[$.

Proposition On suppose que la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Alors

$$S \ : \ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \ .$$

Alors S est de classe C^∞ sur $]-R, R[$, et se dérive terme à terme sur cet intervalle : pour tout $k \geq 1$, pour tout $x \in]-R, R[$, on peut écrire :

$$S^{(k)}(x) \ = \ \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k} \ = \ \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(p+k)!}{p!} a_{p+k} x^p$$

(toutes ces séries ayant le même rayon de convergence R).

IV.3 Primitivation de la somme d'une série entière

Proposition On suppose que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Alors une primitive de $S\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,R[$ est

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

(cette série entière ayant encore pour rayon de convergence R).

IV.4 Quelques calculs

Partons d'une série entière simple et plutôt célèbre :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n =$$

On peut dériver ou primitiver autant qu'on veut. Par exemple :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} =$$

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n =$$

Et ainsi de suite...On prend vite l'habitude de « bricoler » si on n'a pas exactement la forme voulue pour les séries entières que l'on veut calculer :

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n =$$

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} =$$

Il n'y a pas que la primitivation et la dérivation : les opérations algébriques (combinaison linéaire, produit) sont aussi bien utiles. Par exemple, définissons, si $n \geq 1$,

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Alors le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} h_n x^n$ est $r =$ et on calcule

$$\forall x \in]-r, r[\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n =$$

IV.5 Sur le bord

Les résultats vus dans cette section sont énoncés sur $]-R, R[$, où R est le rayon de convergence de la série entière. Si $R = +\infty$, c'est parfait. Sinon, en $-R$ et en R, tout peut arriver, on ne peut rien dire de général. Le résultat suivant n'est plus au programme, mais comme il est simple et utile, mieux vaut le comprendre :

Proposition Si le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est R, si $R \in]0, +\infty[$, et si $\sum |a_n| R^n$ converge, alors

$$S : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est continue sur $[-R, R]$.

Démonstration

Mais attention : si on veut dériver, il faut se replier prudemment sur $]-R, R[$. Par exemple,

$$x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

est continue sur $[-1, 1]$, mais est C^∞ sur $]-1, 1[$ seulement.

V Fonctions développables en série entière

V.1 Fonction développable en série entière

a. Définition du programme

Soit $r > 0$, f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au moins sur $]-r, r[$; on dit que f est développable en série entière sur $]-r, r[$ lorsqu'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall x \in]-r, r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

b. Autres définitions assez compréhensibles

On dit parfois que f est développable en série entière, ou développable en série entière au voisinage de 0, lorsqu'il existe $r > 0$ tel que f soit développable en série entière sur $]-r, r[$.

On dit que f est développable en série entière au voisinage de a lorsque la fonction $h \mapsto f(a+h)$ est développable en série entière au voisinage de 0, c'est à dire lorsqu'il existe $r > 0$ et une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence au moins égal à r telle que

$$\forall x \in]a-r, a+r[\qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n$$

V.2 Stabilité par combinaison linéaire et produit

Proposition

Une combinaison linéaire de fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$ l'est.

Proposition

Un produit de fonctions développables en série entière sur $]-r, r[$ l'est.

V.3 Stabilité par dérivation et primitivation

Proposition

La dérivée d'une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ l'est.

Proposition

Toute primitive d'une fonction développable en série entière sur $]-r,r[$ l'est.

V.4 Condition nécessaire ; série de Taylor

Constatons d'abord que pour que f soit développable en série entière sur $]-r,r[$, il est nécessaire qu'elle soit de classe C^∞ sur cet intervalle.

Définition Soit f une fonction d'une variable réelle, à valeurs réelles ou complexes, de classe C^∞ au voisinage de 0 (i.e. de classe C^∞ sur au moins un certain intervalle $]-\delta,\delta[$, $\delta>0$). On appelle **série de Taylor de** f la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Proposition (condition nécessaire et unicité)

Si f est développable en série entière sur $]-r,r[$ ($r>0$), elle est de classe C^∞ sur $]-r,r[$ et somme de sa série de Taylor sur cet intervalle (cette série de Taylor a donc un rayon de convergence au moins égal à r).

Il y a donc unicité du développement en série entière si il existe.

Simple mais important ! « par unicité du développement en série entière » sera un argument fréquemment utilisé.

Proposition (unicité du d.s.e.) Si

$$\forall x \in]-r,r[\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

(on suppose $r>0$, et on suppose que les rayons de convergence de chacune des séries sont $\geq r$), alors

$$\forall n \in \mathbf{N} \qquad a_n = b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

Un exemple montrant que la condition n'est pas suffisante

$$x \longmapsto \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)$$

prolongée par continuité en 0, est de classe C^∞ sur $\mathbf{R}$. Sa série de Taylor a un rayon de convergence infini.
Et pourtant la fonction n'est pas développable en série entière.

V.5 Critère de développabilité en série entière

Proposition Soit f une fonction de classe C^∞ sur $]-r,r[$ ($r>0$), à valeurs réelles ou complexes. On note, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$$

Alors f est développable en série entière sur $]-r,r[$ si et seulement si, pour tout x dans $]-r,r[$, la suite $\left(R_n(x)\right)_{n\in\mathbf{N}}$ converge vers 0.

Plus qu'une « proposition », c'est une constatation...qui prend toute sa valeur quand on se souvient de certains résultats :

Mode d'emploi On rappelle que

$$R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt$$

et surtout que

$$\left|R_n(x)\right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{[0,x]} \left|f^{(n+1)}\right|$$

VI Développements en séries entières des fonctions usuelles

*Comment montrer qu'une fonction est développable en série entière ? La réponse est un peu analogue au problème des développements limités : un théorème nous permet de trouver des développements en série entière de fonctions usuelles (*exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^{\alpha}\ldots$*). Puis, ces développements « de base » connus, on trouve en général les développements en série entière par opérations. Pour les développements limités, le résultat permettant d'obtenir les DL de départ est le théorème de Taylor-Young. Pour les développements en série entière, c'est la formule de Taylor avec reste-intégrale ou l'inégalité de Taylor-Lagrange qui donne les DSE dits « usuels ».*

VI.1 Fonction exponentielle et associées

a. Exponentielle réelle

Proposition : La fonction $x \mapsto e^x$ (c'est-à-dire l'unique solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui prend en 0 la valeur 1) est développable en série entière sur **R**, et

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

b. Sinus et cosinus, trigonométriques et hyperboliques

Proposition : Les fonctions sin, cos, ch, sh sont développables en série entière sur **R**, et

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\forall x \in \mathbf{R} \qquad \mathrm{sh}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \qquad , \qquad \forall x \in \mathbf{R} \qquad \mathrm{ch}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty}$$

c. Exponentielle complexe

Définition : On définit, pour tout $z \in \mathbf{C}$,

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Proposition : Pour tous z et z' dans $\mathbf{C}$,

$$\exp(z+z') = \exp(z)\ \exp(z')$$

Proposition : Pour tout θ réel,

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\ \sin\theta$$

VI.2 Fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Proposition Pour tout α réel, la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

$$\forall x \in]-1,1[\qquad (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

Remarque Dans le cas $\alpha \in \mathbf{N}$, on retrouve le développement du binôme...c'est-à-dire un dse polynomial. Dans le cas contraire, on évitera de noter $\begin{pmatrix} n \\ \alpha \end{pmatrix}$ un coefficient qui n'a pas de signification en termes de dénombrement.

Proposition Si $z \in \mathbf{C}$, $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$$

VI.3 ln(1+x), ln(1-x)

S'obtiennent directement par primitivation, à partir de

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \frac{1}{1-x} =$$

et de

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \frac{1}{1+x} =$$

On a donc

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \ln(1-x) =$$

et

$$\forall x \in]-1,1[\qquad \ln(1+x) =$$

Ce dernier développement donne la méthode la plus rapide pour retrouver la formule

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$$

VI.4 Arctan, Arcsin

Le développement en série entière de Arctan s'obtient de la même manière que les deux précédents : on sait développer la dérivée, on primitive.

On en déduit encore une belle somme de série dûe à Euler :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots =$$

Pour le développement en série de Arcsin, c'est plus laborieux, mais c'est un calcul qu'il faut savoir faire.

VII Recherche de solutions dse d'une équation différentielle

Il est parfois possible de trouver des solutions d'équations différentielles sous forme de sommes de séries entières. Cela concerne surtout des équations de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = c(x) \qquad \text{ou} \qquad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

(spécialement quand a, b, c, d sont des fonctions polynômes de petits degrés). Considérons par exemple l'équation différentielle :

$$(x^2+2)y'' + 6xy' + 6y = 0 \tag{E}$$

Soit $(a_n) \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ telle que le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n x^n$ soit supérieur ou égal à $r > 0$. Définissons $\phi\ :\ x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-r, r[$. Alors ϕ est solution de (E) sur $]-r, r[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-r, r[\qquad (x^2+2)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 6x\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + 6\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = 0 \quad (1)$$

On réécrit alors (1) en « coupant en morceaux », rentrant les puissances dans les sommes, puis réindexant les sommes qui doivent l'être pour obtenir une condition équivalente à (1) de la forme

$$\forall x \in]-r, r[\qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} (\ldots)x^n = 0$$

qui permette d'utiliser l'unicité du développement en série entière. Ici, on aboutira donc à :
Par unicité du développement en série entière,

$$(1) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbf{N} \quad a_{n+2} = -\frac{n+3}{2(n+1)} a_n$$

Le calcul « formel » est alors terminé. . .mais même si on a procédé par équivalences, il faut faire une « réciproque » : les suites (a_n) trouvées donnent-elles bien un des séries entières à rayon de convergence non nul ? et quel est ce rayon de convergence ? On peut aussi se poser la question subsidiaire suivante :

les fonctions développables en série entière que l'on a trouvées sont-elles exprimables au moyen des fonctions usuelles ? (par exemple, ici, pour $a_0 = 0$ et $a_1 = 0$, on trouve entre autres la fonction solution $x \longmapsto \dfrac{4-2x^2}{(2+x^2)^2}$)

D'un exemple à l'autre les choses se passent parfois un peu différemment ; on peut chercher les solutions développables en série entière de l'équation

$$x(x+1)y'' - 2y = 0$$

Table des matières